Catégories de Variétés

---

par

Alexander Grothendieck

Transcription by



Edited by Mateo Carmona
mateo.carmona@csg.igrothendieck.org
Centre for Grothendieckian Studies (CSG)
Grothendieck Institute
Corso Statuto 24, 12084 Mondovì, Italy

© 2026 Grothendieck Institute
All rights reserved

This transcription is based on an unpublished scan from the Fonds du secrétariat Bourbaki (ENS-ULM) of Rédaction Bourbaki No. 262. This project was carried out by researchers and volunteers of the CSG under the supervision of Mateo Carmona. Special thanks are extended to Ivan Gentile (IFAB Foundation) for having provided an earlier version of the transcription. More details are available at:
https://csg.igrothendieck.org/transcriptions/

This transcription has been prepared within the Editorial Support framework of the Centre for Grothendieckian Studies (CSG), which is non-authoritative and non-publishing in nature. It is provided solely as a preparatory research resource and does not constitute a published or definitive edition. The CSG assumes no editorial ownership, publication rights, or decision-making authority; all such responsibilities remain with the relevant editors, publishers, or rights holders.

Cite this transcription:
Alexander Grothendieck. *Catégories de Variétés*. Unpublished, 1957. Transcription by M. Carmona et al., CSG, Grothendieck Institute. Draft, November 2026.

PRÉLIMINAIRES AU LIVRE DES VARIÉTÉS
CATÉGORIES DE VARIÉTÉS

Commentaires du rédacteur 1

I. Catégories topologiques 2

1. Catégories prétopologiques 2
2. Un procédé de recollement 4
3. Produits, catégories topologiques 6
4. Produits de $\mathcal{C}$-espaces locaux. Catégories topologiques recollables 7
6. Structures induites 8
7. Structures quotient 10
8. Espaces réduits à un point 16
9. Espaces fibrés de type (C, Φ, Φ_0) 17
10. $\mathcal{C}$-espaces fibrés à $\mathcal{C}$-groupe structural 21
11. $\mathcal{C}$-fibrés associés 26
11bis. Extension et restriction du groupes structural 29
12. Sections de $\mathcal{C}$-fibrés 34
13. Images réciproques de $\mathcal{C}$-fibrés 34
14. Catégories de modèles 36
15. Catégorie topologique définie par une catégorie de modèles 38
16. Foncteurs topologiques 42

II. Catégories de variétés 45

1. Espaces K-annelés 45
2. Catégories de variétés sur K 47
3. Structures induites 51

4. Structures quotient 56
5. Un axiome supplémentaire 56
6. $\mathcal{V}$-structures sur les espaces vectoriels 57
7. $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels, relations avec les faisceaux de modules 59
8. Opérations sur les fibrés vectoriels 63
9. Sous-$\mathcal{V}$-fibrés vectoriels, $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels quotients, $\mathcal{V}$-fibrés en drapeaux 66
10. Extensions de fibrés vectoriels 71

COMMENTAIRES DU RÉDACTEUR

Ce rapport est destiné à esquisser les fondements fonctoriels pour le livre des variétés, mais il semble hors de doute que sa place véritable est dans le livre de Top. Elem.

Une grande partie de ce rapport sera bouffée par le rapport ultérieur de Cartan-Sammy, néanmoins il était indispensable au rédacteur, pour pouvoir commencer la rédaction des variétés. On notera que le paragraphe 1, comprend en réalité trois parties assez distinctes. Les n^{os} 1 à 8 donnent les généralités sur les catégories topologiques ; les n^{os} 9 à 13 les notions essentielles sur les fibrés, enfin, les n^{os} 14, 15 16 introduisent les catégories de modèles, qui ne sont que des intermédiaires techniques pour construire, par recollement, des vraies catégories topologiques. (Faire attention qu'il n'y a pas de n° 5, mais on revanche un n° 11 bis).

Les notions introduites dans le paragraphe 1 sont utilisées aussitôt dans le paragraphe 2, qui en est une bonne illustration. Un paragraphe 3 devait donner la définition des catégories usuelles de variétés (en supposant connu seulement quelques résultats élémentaires de déptoiriés divers) et les relations entre ces catégories de variétés, mais le rédacteur a fini par se dégonfler. Bien que très probablement un tel paragraphe serait finalement démembré, il semble indiqué qu'il soit rédigé prochainement (Chevalley ?), pour qu'on se rende compte si la présente rédaction donne tout ce qu'il faut.

Il va sans dire que le rédacteur n'a pas fait le moindre effort en direction d'un style canonique.

§ I. — CATÉGORIES TOPOLOGIQUES

---

1. — Catégories prétopologiques.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, muni d'un foncteur $i_{\mathcal{C}}$ à valeurs dans la catégorie $\mathcal{T}$ des espaces topologiques. On dit que $(\mathcal{C}, i_{\mathcal{C}})$ est une *catégorie prétopologique*, et que $i_{\mathcal{C}}$ est son *foncteur fondamental*, si les axiomes CT 1 à CT 4 qui suivent sont satisfaits.

CT 1) *i est fidèle* :

Rappelons (Ens. 2ème Ed., Chap. 4) que cela signifie que, si $f, g : A \longrightarrow B$ sont deux $\mathcal{C}$-morphismes tels que $i(f) = i(g)$, alors $f = g$, et que si f est un *isomorphisme* dans $\mathcal{C}$, tel que $i(f)$ soit l'application identique de $i(A)$ sur $i(B) = i(A)$, alors $A = B$ et f est le morphisme identique. Pour tout $X \in \mathcal{T}$, soit $\mathcal{S}(X)$ la classe des objets A de $\mathcal{C}$ tels que $i(A) = X$, on identifie alors, conformément aux conventions générales relatives aux foncteurs fidèles, un $A \in \mathcal{S}(X)$ à l'espace X, muni de la structure supplémentaire A, et on mettra le plus souvent A dans la notation, suivant un abus de notation couramment employé dans tous les livres de notre traité. Les morphismes d'un $X \in \mathcal{C}$ dans un $Y \in \mathcal{C}$ sont donc *certaines* applications continues de l'espace X dans l'espace Y, appelées $\mathcal{C}$-applications.

CT 2) *i est transportable*.

Rappelons (Ens. 2ème Ed. chap. 4) que cela signifie que si $A \in \mathcal{C}$, $Y \in \mathcal{T}$ et si f' est un isomorphisme (i.e. un homéomorphisme) de $i(A) = X$ sur Y, alors il existe un morphisme f dans $\mathcal{C}$ tel que $i(f) = f'$. Il résulte alors de CT 1, que cet f est unique,

et appliquant l'axiome CT 2, à f'^{-1}, on voit que f est un isomorphisme. On voit donc qu'un homéomorphisme f d'un espace X sur un espace Y définit une bijection $\bar{f}$ de la classe $\mathcal{C}(X)$ des $\mathcal{C}$-structures sur X, sur la classe $\mathcal{C}(Y)$ des $\mathcal{C}$-structures sur Y. Pour f variable, $\bar{f}$ a les propriétés fonctorielles usuelles. Dans tous les cas de foncteurs transportables que nous aurons à considérer, les $\mathcal{C}(X)$ sont des ensembles (il n'y aurait donc guère d'inconvénient à mettre ceci comme condition dans la définition d'un foncteur transportable), et $X \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ est donc un foncteur sur la catégorie restreinte de $\mathcal{C}$ (i.e. où on restreint les morphismes à être des isomorphismes) à valeurs dans la catégorie $\mathcal{E}$ des espaces topologiques, c'est donc une "espèce de structure" (Ens. 2è ed. chap.IV) — Les objets de $\mathcal{C}$ seront aussi appelés des $\mathcal{C}$-espaces.

Rappelons enfin, dans le contexte des foncteurs transportables la notion de structure initiale et de structure finale ; choisissons comme un foncteur transportable à valeurs dans la catégorie des ensembles. Soit X un ensemble, soit (f_i) une famille de morphismes, i.e. d'applications, de X dans des $X_i \in \mathcal{C}$, on dit qu'une $\mathcal{C}$-structure S sur X est *structure initiale* pour la famille (f_i), si, quel que soit $Y \in \mathcal{C}$, et l'application f de Y dans X, f est un $\mathcal{C}$-morphisme si et seulement si les $f_i f$ le sont. Cette structure S est alors manifestement unique. En particulier, on a la notion de *$\mathcal{C}$-structure induite* sur une partie U d'un $X \in \mathcal{C}$, qui est uniquement déterminée si elle existe. La définition des *structures finales*, et en particulier des *$\mathcal{C}$-structures quotient*, est duale.

CT 3) *Soit $X \in \mathcal{C}$, U une partie ouverte de X. Alors U admet une $\mathcal{C}$-structure induite, et la topologie correspondante de U est celle induite par X*

CT 4) *Soient $X, Y \in \mathcal{C}$, (U_i) un recouvrement ouvert de X, f une application continue de X dans Y, dont la restriction à tout U_i est un $\mathcal{C}$-morphisme ; alors f est un $\mathcal{C}$-morphisme.*

On déduit immédiatement de CT 4 :

Proposition 1. — *Soient X un espace topologique, (U_i) un recouvrement ouvert de X, S et S' deux $\mathcal{C}$-structures sur X qui induisent sur chaque U_i des $\mathcal{C}$-structures identiques. Alors $S = S'$.*

Corollaire. — *Soient f une application d'un $\mathcal{C}$-espace X dans un autre Y, (U_i) un recouvrement ouvert de X. Pour que f soit un $\mathcal{C}$-isomorphisme de X sur un ouvert de Y,*

il faut et il suffit que f soit un monomorphisme et que sa restriction à tout U_i soit un $\mathcal{C}$-isomorphisme de U_i sur une partie ouverte de Y.

Sous-catégories prétopologiques. — Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux catégories pré-topologiques. On dit que $\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie prétopologique de $\mathcal{C}$ si $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$, si le foncteur $i_{\mathcal{C}'}$ est induit par $i_{\mathcal{C}}$ et si pour $X, Y \in \mathcal{C}'$, les $\mathcal{C}'$-morphismes de X dans Y coincident avec les $\mathcal{C}$-morphismes de X dans Y, et enfin si pour tout ouvert U d'un $X \in \mathcal{C}'$, la $\mathcal{C}$-structure induite est dans $\mathcal{C}'$ (donc identique à la $\mathcal{C}'$-structure induite). Il s'ensuit que $\mathcal{C}'$ est complètement connue quand on connait la *classe* $|\mathcal{C}'|$ de ses éléments. Une sous-classe $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ correspond à une sous-catégorie prétopologique si et seulement si elle satisfait les conditions suivantes :

(i) Un $X \in \mathcal{C}$ qui est $\mathcal{C}$-isomorphe à un $Y \in \mathcal{C}'$, est dans $\mathcal{C}'$.

(ii) Si $X \in \mathcal{C}'$, alors toute partie ouverte U de X munie de la $\mathcal{C}$-structure induite, est dans $\mathcal{C}'$.

2. — Un procédé de recollement.

Nous dirons qu'un espace X est muni d'une $\mathcal{C}$-structure locale, ou est un *$\mathcal{C}$-espace local*, si on s'est donné un recouvrement ouvert (U_i) de X et des $\mathcal{C}$-structures S_i sur les U_i, telle façon que pour tout couple (i, j) d'indices tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on ait $S_i|U_i \cap U_j = S_j|U_i \cap U_j$; étant entendu que deux telles données (U_i, S_i) et (U'_j, S'_j) sont considérées comme définissant la même structure de $\mathcal{C}$-espace local, si et seulement si $U_i \cap U'_j \neq \emptyset$ implique que S_i et S'_j induisent la même $\mathcal{C}$-structure sur $U_i \cap U'_j$. (C'est bien là une relation d'équivalence dans l'ensemble des systèmes (U_i, S_i) grâce à CT 4). On désigne par $\hat{\mathcal{C}}$ la classe des $\mathcal{C}$-espaces locaux. Tout $\mathcal{C}$-espace est un $\hat{\mathcal{C}}$-espace local (prendre le recouvrement de X réduit à un seul élément X), et deux $\mathcal{C}$-structures sur un espace X sont identiques si et seulement si les $\hat{\mathcal{C}}$-structures locales correspondantes sont identiques, donc on a $\mathcal{C} \subset \hat{\mathcal{C}}$. Soit X un $\hat{\mathcal{C}}$-espace local défini par un système (U_i, S_i), U une partie ouverte de X, alors les $(U \cap U_i, S_i|U \cap U_i)$ définissent sur U une $\hat{\mathcal{C}}$-structure locale qui ne dépend que de celle de X, et appelée *$\hat{\mathcal{C}}$-structure locale induite*. Si $X \in \mathcal{C}$, on retrouve bien la $\mathcal{C}$-structure induite. D'après la transitivité (évidente) des structures induites, on voit que tout point d'un $\hat{\mathcal{C}}$-espace local admet un système fondamental de

voisinages ouverts qui sont dans $\mathcal{C}$ (pour la structure induite). On dira qu'une application f d'un $\hat{\mathcal{C}}$-espace local X dans un autre est une $\hat{\mathcal{C}}$-application, si pour tout $x \in X$ on peut trouver un voisinage ouvert U de x et une partie ouverte V de Y, telles que U et V soient des $\mathcal{C}$-espaces, $f(U) \subset V$, et que f soit un $\mathcal{C}$-morphisme de U dans V. D'après CT 4), si $X, Y \in \mathcal{C}$, on retrouve la notion donnée de $\mathcal{C}$-application. Ainsi $\hat{\mathcal{C}}$ devient une catégorie, de plus le foncteur naturel i de $\mathcal{C}$ dans $\hat{\mathcal{C}}$ est trivialement représentable et fidèle, et la notion de structure induite S_i sur un ouvert $U \subset X$ introduite plus haut est bien celle qui se déduit de la donnée de i et des morphismes dans $\hat{\mathcal{C}}$.

Cela signifie en effet que si Y est un $\mathcal{C}$-espace local et f une application continue de Y dans U, alors f est un $\mathcal{C}$-morphisme de Y dans U si et seulement si c'est un $\mathcal{C}$-morphisme de Y dans X, ce qui résulte facilement des définitions. Enfin, la vérification de l'axiome CT 4) pour $\hat{\mathcal{C}}$ est aussi triviale, ainsi $\hat{\mathcal{C}}$ devient une *catégorie prétopologique*. D'ailleurs $\mathcal{C}$ en est une sous-catégorie prélocale. On dit que $\mathcal{C}$ est *sursaturée* si $\mathcal{C} = \hat{\mathcal{C}}$. Ainsi $\hat{\mathcal{C}}$ est une catégorie prélocale sursaturée, dite *associée* à $\mathcal{C}$.

Proposition 2. — *Soit X un ensemble, (U_i) un recouvrement de X par des ensembles U_i munis de $\mathcal{C}$-structures S_i. On suppose que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, $U_i \cap U_j$ est la réunion d'ensembles W ayant les propriétés suivantes : W est ouvert dans U_i et U_j, et $S_i|W = S_j|W$. Alors il existe sur X une $\hat{\mathcal{C}}$-structure locale S et une seule telle que les U_i soient des parties ouvertes de X, et $S_i = S|U_i$ pour tout i. La topologie sous-jacente est la topologie pour laquelle les U_i sont ouverts et induisent sur chaque U_i la topologie de U_i.*

Considérons sur X la topologie T la moins fine induisant sur chaque U_i une topologie moins fine que la topologie T_i de U_i. Montrons que les U_i sont ouverts pour T, et que $T|U_i = T_i$. Pour ceci, il suffit de montrer que si V est une partie de U_i ouverte pour T_i, alors V est ouverte pour T, i.e. $V \cap U_j$ est ouvert pour T_j quel que soit j. Or $U_i \cap U_j$ est réunion d'ensembles W, ouverts pour T_i et T_j, sur lesquels S_i et S_j, donc aussi T_i et T_j coïncident, il suffit de montrer que pour un tel W, $W \cap V$ est ouvert pour T_j ($V \cap U_j$ étant la réunion de tels $W \cap V$). Or $W \cap V$ est ouvert dans W pour T_i, donc pour T_j, donc aussi ouvert dans U_j pour T_j. Il reste à prouver seulement que si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors $S_i|U_i \cap U_j = S_j|U_i \cap U_j$.

Or, pour les W de l'énoncé, ces deux $\mathcal{C}$-structures sur $U_i \cap U_j$ induisent la même $\mathcal{C}$-structure sur W, elles sont donc identiques en vertu de prop.1. Le résultat d'unicité de la prop.2 résulte aussitôt de la prop.1, car on voit que la topologie associée à S ne peut

être que T.

3. — Produits, catégories topologiques.

Soient X et Y deux $\mathcal{C}$-espaces. Conformément aux définitions générales (Ens, 2ème edt. chap. IV) on dit que $X \times Y$ admet une *$\mathcal{C}$-structure produit* si elle admet une $\mathcal{C}$-structure initiale pour les applications de projection $X \times Y \longrightarrow X$ et $X \times Y \longrightarrow Y$; alors $X \times Y$, muni de la $\mathcal{C}$-structure produit, est aussi un produit de X et Y dans la catégorie $\mathcal{C}$, i.e. les $\mathcal{C}$-morphismes d'un $Z \in \mathcal{C}$ dans $X \times Y$ correspondent biunivoquement aux couples de morphismes de Z dans X et dans Y. On dit qu'une catégorie prétopologique $\mathcal{C}$ est une *catégorie topologique* si elle satisfait à l'axiome suivant

CT 5) *Si X, Y sont deux $\mathcal{C}$-espaces, $X \times Y$ admet une $\mathcal{C}$-structure produit*

D'après les propriétés générales sur les produits dans une catégorie, (loc. cité) le produit de $\mathcal{C}$-espaces est commutatif, et associatif ; d'après la transitivité des structures initiales, si U est un ouvert du $\mathcal{C}$-espace X et V un ouvert du $\mathcal{C}$-espace Y, alors $U \times V$ est un ouvert du $\mathcal{C}$-espace $X \times Y$, et la $\mathcal{C}$-structure induite est identique à la $\mathcal{C}$-structure produit de U et V. Le fait que $U \times V$ soit ouvert résulte du fait que les projections de $X \times Y$ sur X et Y, étant des $\mathcal{C}$-applications, sont continues, en d'autres termes :

Proposition 3. — *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie topologique, X et $Y \in \mathcal{C}$, la topologie de $X \times Y$ associée à sa $\mathcal{C}$-structure est plus fine que la topologie produit des topologies de X et Y.*

On fera attention qu'elle peut être strictement plus fine. Sauf mention expresse du contraire, quand nous considérerons une topologie sur le produit de deux $\mathcal{C}$-espaces, ce sera celle associée à la $\mathcal{C}$-structure produit.

Définition 1. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie topologique. Un $\mathcal{C}$-espace X est dit* séparé *si la diagonale de $X \times X$ est fermée.*

Il suffit pour ceci que la diagonale soit fermée pour la topologie produit, i.e. que la topologie de l'espace X soit séparée, (et cette condition est aussi nécessaire dans le cas, peu intéressant du reste, où la topologie de $X \times X$ est identique à la topologie produit). Si X est un $\mathcal{C}$-espace séparé, toute partie de X qui admet une $\mathcal{C}$-structure induite, en particulier toute partie ouverte de X, est un $\mathcal{C}$-espace séparé. Le produit de deux $\mathcal{C}$-espaces

séparés est séparé, car la diagonale de $(X \times Y) \times (X \times Y)$ est l'intersection des images réciproques des diagonales de $X \times X$ et $Y \times Y$ par les applications de projection, qui sont continues.

Une catégorie locale est dite *séparée* si elle satisfait à :

CT 6) *Tout $X \in \mathcal{C}$ est séparé.*

Sous-catégories topologiques.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories topologiques, on dit que $\mathcal{C}'$ est une sous-catégorie topologique de $\mathcal{C}$ si c'est une sous-catégorie prétopologique (cf. n°1) et si pour $X, Y \in \mathcal{C}'$, la $\mathcal{C}'$-structure produit sur $X \times Y$ est identique à la $\mathcal{C}$-structure produit. Pour qu'une sous-classe $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ provienne d'une sous-catégorie topologique, il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux conditions (i) et (ii) du n°1 et à la condition suivante :

(iii) Si X et Y sont dans $\mathcal{C}'$, alors $X \times Y$ (qui est dans $\mathcal{C}$ à priori) est aussi dans $\mathcal{C}'$.

(C'est trivialement nécessaire : et c'est suffisant, car on vérifie aussitôt que la $\mathcal{C}$-structure produit est aussi une $\mathcal{C}'$-structure produit)

Si $X \in \mathcal{C}'$, il revient alors au même de dire que X est séparé dans $\mathcal{C}'$, ou dans $\mathcal{C}$.

Soit par exemple $\mathcal{C}$ une catégorie locale, soit $\mathcal{C}^s$ la classe des $\mathcal{C}$-espaces séparés, alors les conditions (i), (ii) et (iii) sont satisfaites, donc :

Proposition 4. — *La classe $\mathcal{C}^s$ des $\mathcal{C}$-espaces séparés est une sous-catégorie topologique séparée de la catégorie topologique $\mathcal{C}$.*

4. — Produits de $\mathcal{C}$-espaces locaux. Catégories topologiques saturées, parfaites.

Proposition 5. — *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie topologique, alors $\hat{\mathcal{C}}$ est une catégorie topologique, et $\mathcal{C}$ en est une sous-catégorie topologique .*

Soient X et Y deux $\hat{\mathcal{C}}$-espaces locaux, (U_i) (resp. (V_j)) un recouvrement de X (resp. Y) par des ouverts qui sont des $\mathcal{C}$-espaces. Alors $X \times Y$ est un ensemble recouvert par les ensembles $U_i \times V_j$, qui d'ailleurs sont munis de $\mathcal{C}$-structures produits. La proposition 2 s'applique, et on trouve sur $X \times Y$ une unique $\hat{\mathcal{C}}$-structure locale telle que les $U_i \times V_j$

soient des ouverts, et leur $\hat{\mathcal{C}}$-structure la structure induite. Je dis que muni de cette $\hat{\mathcal{C}}$-structure locale, $X \times Y$ est un produit de X et Y au sens de $\hat{\mathcal{C}}$. Soit en effet, f une application d'un $\hat{\mathcal{C}}$-espace local Z dans $X \times Y$, il faut montrer que f est un morphisme si et seulement si ses composantes le sont.

C'est évidemment nécessaire, car les projections de $X \times Y$ sont manifestement des $\hat{\mathcal{C}}$-morphismes. C'est suffisant, car alors les images réciproques des $U_i \times V_j$ sont ouvertes, on peut alors se ramener aussitôt au cas où Z est un $\mathcal{C}$-espace et $f(Z)$ contenu dans un des $U_i \times V_j$, auquel cas c'est immédiat.

Reste à vérifier pour $\mathcal{C}$ plongé dans $\hat{\mathcal{C}}$ la condition (iii) du numéro précédent, ce qui est immédiat.

On dira que la catégorie topologique $\mathcal{C}$ est *saturée* si elle satisfait à la condition suivante :

CT 7) *Tout $\hat{\mathcal{C}}$-espace local séparé est un $\mathcal{C}$-espace*, i.e. $\hat{\mathcal{C}}^s \subset \mathcal{C}$.

Une catégorie topologique est dite *parfaite*, si elle est séparée et saturée (i.e. satisfait aux axiomes CT 1) à CT 7)). Une variante de cette notion , rencontrée en Géométrie Algébrique, est celle de catégorie *locale semi-parfaite* , et obtenue en remplaçant CT 7) par l'axiome le plus faible :

CT 7 bis) *Tout $\hat{\mathcal{C}}$-espace local séparé, réunion d'un nombre fini d'ouverts qui sont des $\mathcal{C}$-espaces, est un $\mathcal{C}$-espace, et tout $\mathcal{C}$-espace est un espace de Zariski.*

Rappelons qu'un espace topologique est dit un espace de Zariski si toute suite croissante de parties ouvertes est stationnaire.

Proposition 6. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie topologique. Alors la catégorie $\hat{\mathcal{C}}^s$ des $\mathcal{C}$-espaces locaux séparés est une catégorie locale parfaite.*

C'est en effet, une catégorie lacale, séparée (prop.4) et manifestement saturée.

Nous dirons qu'une catégorie topologique est *recollable*, si elle est soit sursaturée, soit parfaite, soit semi-parfaite.

6. — Structures induites.

Dans la suite de ce §, $\mathcal{C}$ désigne une catégorie topologique fixée. Soit X un $\mathcal{C}$-espace, Y une partie de X. Conformément aux définitions générales (Ens. 2è ed, chap.IV) on dit

qu'une $\mathcal{C}$-structure sur Y est *induite* par celle de X, ou simplement induite par X, si c'est une structure initiale pour l'application f de *l'ensemble* Y dans le $\mathcal{C}$-espace X.

(N.B. — le foncteur fondamental $i_{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C}$ est donc considéré ici comme foncteur à valeurs dans la catégorie des *ensembles*). On fera attention que la topologie sous-jacente à la structure induite n'est pas nécessairement la topologie induite (géodésiques du tore !). Rappelons (Ens., loc cité) les faits suivants : (i) Soit X un $\mathcal{C}$-espace, Y une partie de X admettant une $\mathcal{C}$-structure induite, et Z une partie de Y. Pour que Z admette une structure induite dans Y, il faut et il suffit qu'il admette une structure induite dans X, et ses deux structures induites sont alors identiques ; (ii) Soient X_i $(i = 1, 2)$ des $\mathcal{C}$-espaces, soit Y_i une partie de X_i admettant une $\mathcal{C}$-structure induite, alors $Y_1 \times Y_2$ est une partie de $X_1 \times X_2$ admettant une $\mathcal{C}$-structure induite, identique à la $\mathcal{C}$-structure produit de Y_1 et Y_2. — Voici un fait spécial au contexte des catégories locales :

Proposition 7. — *Soit X un $\mathcal{C}$-espace, Y une partie de X. Si Y admet une $\mathcal{C}$-structure induite, alors pour tout ouvert $U \subset X$, $U \cap Y$ est une partie de U admettant une structure induite, identique à la $\mathcal{C}$-structure induite sur $U \cap Y$ considéré comme partie ouverte du $\mathcal{C}$-espace Y. Réciproquement, supposons que $\mathcal{C}$ soit recollable, et que X admette un recouvrement ouvert (U_i) tel que pour tout i, $U_i \cap Y$ soit une partie de U_i admettant une $\mathcal{C}$-structure induite. Alors Y admet une $\mathcal{C}$-structure induite.*

Appliquons (i) à $X \supset Y \supset U \cap Y$: comme $U \cap Y$ est une partie ouverte de Y, comme image inverse de l'ouvert $U \subset X$ par l'application d'injection $Y \longrightarrow X$ qui est continue, $U \cap Y$ admet une $\mathcal{C}$-structure induite dans Y, donc aussi dans X, et ses deux $\mathcal{C}$-structures sont égales. Appliquons maintenant (i) à $X \supset U \supset U \cap Y$, il s'ensuit que $U \cap Y$ a une structure induite dans U, identique à sa structure induite dans X. Soit maintenant (U_i) un recouvrement ouvert de X, tel que pour tout i, $U_i \cap Y$ ait une structure induite dans U_i (ou dans X, cela revient au même d'après (i) ci-dessus). Montrons d'abord que Y admet alors une $\hat{\mathcal{C}}$-structure induite, où $\hat{\mathcal{C}}$ est la catégorie topologique sursaturée associée à $\mathcal{C}$. Soit $Y_i = U_i \cap Y$, montrons que les Y_i satisfont à la condition de cohérence de la proposition 2 ; c'est à dire que $Y_i \cap Y_j$ est ouvert dans Y_i pour tout couple (i, j), et que les $\mathcal{C}$-structures induites sur $Y_i \cap Y_j$ par Y_i et Y_j sont les mêmes. Or $Y_i \cap Y_j$ est l'image réciproque de la partie ouverte U_j de X par l'application d'injection $Y_i \longrightarrow X$ qui est continue, elle est donc bien ouverte, de plus la structure induite sur $Y_i \cap Y_j$ par Y_i est identique à celle induite par X d'après la propriété de transitivité (i),

donc aussi identique à la $\mathcal{C}$-structure induite par Y_j. Il existe donc une $\mathcal{C}$-structure locale sur Y, pour laquelle les Y_i soient des parties ouvertes, et les structures induites sur les Y_i soient les structures induites par X. Montrons que c'est là une $\hat{\mathcal{C}}$-structure *induite* par X sur Y. Tout d'abord, en vertu de CT 4), l'application d'injection $Y \longrightarrow X$ est un morphisme, il reste donc à montrer que si f est une application d'un $\hat{\mathcal{C}}$-espace Z dans Y, qui soit un morphisme de Z dans X, c'est un morphisme de Z dans Y. Par localisation, on peut supposer que $Z \in \mathcal{C}$, et de plus que f applique Z dans un des Y_i. Mais comme la $\mathcal{C}$-structure de Y_i est induite par celle de X, f est un morphisme de Z dans Y_i, donc aussi de Z dans Y. Notons maintenant que si la $\mathcal{C}$-structure locale mise sur Y, induite par X d'après ce qui précède, est une $\mathcal{C}$-structure, ce sera aussi une $\mathcal{C}$-structure induite. Or cette condition est remplie trivialement si $\mathcal{C} = \hat{\mathcal{C}}$ i.e. si $\mathcal{C}$ est sursaturée. Elle l'est aussi si $\mathcal{C}$ est parfaite, car il suffit de prouver que la $\mathcal{C}$-structure locale de Y est séparée, ce qui résulte du fait que celle de X l'est et de la

Proposition 8. — *Soit f un morphisme injectif d'un $\mathcal{C}$-espace local Y dans un autre X. Si X est séparé, Y est séparé.*

En effet, la diagonale de $Y \times Y$ est l'image réciproque de celle de $X \times X$ par l'application $f \times f$. Comme cette dernière est continue puisque c'est un morphisme, et que la diagonale de $X \times X$ est fermée par hypothèse il en est de même de celle de $Y \times Y$. Cela prouve la proposition 8, et achève en même temps la démonstration de la proposition 7.

7. — Structures quotient.

Soient X un $\mathcal{C}$-espace, R une relation d'équivalence dans X, $Y = X/R$, f l'application canonique de X sur Y. Conformément aux définitions générales (loc. cité) on dit qu'une $\mathcal{C}$-structure sur Y est *quotient* de celle de X, si c'est une structure finale pour l'application f du $\mathcal{C}$-espace X dans l'ensemble Y. Rappelons les faits suivants (loc.cité) : (i) Soit Y un ensemble quotient du $\mathcal{C}$-espace X, admettant une $\mathcal{C}$-structure quotient, et soit Z un ensemble quotient de Y ; pour que Z admette une $\mathcal{C}$-structure quotient en tant que quotient de Y, il faut et il suffit qu'il en admette une en tant que quotient de X, et ces deux structures quotient sont identiques. (ii) Un Buchsbaum pour le (ii) du numéro précédent, pour le plaisir de l'oeil. (Il y est question de $\mathcal{C}$-espace *somme* de deux autres ;

il semble bien que dans une prochaine rédaction, on devra dire un ou deux sorites sur les espaces somme : sous-trucs, quotients et produits de sommes sont ce qu'on pense).

Faute d'un analogue, pour la prop.7, la notion de $\mathcal{C}$-structure quotient n'a pas toute la souplesse qu'on lui souhaiterait. Qu'à cela ne tienne, on va l'assouplir à l'instant.

Définition 2. — *Soient X un $\mathcal{C}$-espace muni d'une relation d'équivalence R, f l'application canonique de X sur $Y = X/R$. On dit que Y est un* $\mathcal{C}$-espace quotient *de X, si Y admet une $\mathcal{C}$-structure quotient, satisfaisant à la condition suivante : la topologie sous-jacente du $\mathcal{C}$-espace Y est la topologie quotient de celle de X, et pour toute partie ouverte U de Y, la $\mathcal{C}$-structure induite sur U par Y est une $\mathcal{C}$-structure quotient de $f^{-1}(U)$.*

Cette dernière condition s'énonce aussi ainsi : *Si une application g de U dans un $\mathcal{C}$-espace Z est telle que gf est un morphisme de X dans Z, alors g est un morphisme de U dans Z.* Cet énoncé reste alors vrai si Z est seulement un $\mathcal{C}$-espace local, comme on vérifie aussitôt, (donc Y est aussi un $\hat{\mathcal{C}}$-espace quotient de X). Il est trivial à partir de la définition que si Y est un $\mathcal{C}$-espace quotient de X, alors toute partie ouverte U de Y est un $\mathcal{C}$-espace quotient de $f^{-1}(U)$ (et sa structure quotient est celle induite par Y). De même, il est immédiat que *si Y est un $\mathcal{C}$-espace quotient de X, Z un $\mathcal{C}$-espace quotient de Y, alors Z s'identifie aussi à un $\mathcal{C}$-espace quotient de X.*

Proposition 9. — *Soient X un $\mathcal{C}$-espace, R une relation d'équivalence dans X, f l'application canonique de X sur $Y = X/R$. On munit X/R de la topologie quotient, et on suppose que X/R est réunion d'ouverts U_i tels que U_i soit un $\mathcal{C}$-espace quotient de $f^{-1}(U_i)$. Alors Y est un $\hat{\mathcal{C}}$-espace quotient de X.*

En effet, U_i et U_j induisent la même structure sur leur partie ouverte $U_i \cap U_j$, à savoir la $\mathcal{C}$-structure quotient de $f^{-1}(U_i \cap U_j)$. Il existe donc une $\hat{\mathcal{C}}$-structure sur Y dont la topologie sous-jacente est celle de Y, et induisant sur les U_i la $\mathcal{C}$-structure qui y est donnée. L'application f est un morphisme de X dans Y, puisque ses restrictions aux parties ouvertes $f^{-1}(U_i)$ recouvrant X le sont. Pour prouver que Y muni de sa $\hat{\mathcal{C}}$-structure est bien un $\hat{\mathcal{C}}$-espace quotient, il reste à montrer que si g est une application d'une partie ouverte U de Y dans un $\hat{\mathcal{C}}$-espace Z telle que gf soit un morphisme de $f^{-1}(U)$ dans Z, alors g est un morphisme de U dans Z. Il suffit pour ceci de prouver que sa restriction à chaque $U \cap U_i$ est un morphisme, pour la $\hat{\mathcal{C}}$-structure induite par U. Or c'est aussi celle induite par Y, donc celle induite par U_i, de sorte qu'on est ramené à

montrer que l'application gf de $f^{-1}(U \cap U_i)$ dans Z est un morphisme, ce qui est bien le cas puisque c'est la restriction d'un morphisme de $f^{-1}(U)$ dans Z.

Corollaire. — *Supposons $\mathcal{C}$ recollable. Soient X un $\mathcal{C}$-espace, R une relation d'équivalence dans X, f l'application canonique de X sur $Y = X/R$. On munit Y de la topologie quotient, et on suppose que pour tout couple de deux points de Y, existe un ouvert U les contenant tel que U soit un $\mathcal{C}$-espace quotient de $f^{-1}(U)$. Alors Y est un $\mathcal{C}$-espace quotient de X.*

On sait déjà en vertu de prop. 9 que Y est un $\hat{\mathcal{C}}$-espace quotient de X, il reste donc à montrer que Y est en fait un $\mathcal{C}$-espace. On peut supposer $\mathcal{C}$ parfaite ou semi-parfaite. Dans le deuxième cas, on voit aussitôt que Y est recouvert par un nombre *fini* d'ouverts U qui sont des $\mathcal{C}$-espaces quotients des $f^{-1}(U)$. Donc on est ramené à prouver que Y est séparé. Or tout couple de deux points de Y est contenu dans un ouvert U tel que U soit (pour la $\hat{\mathcal{C}}$-structure induite par Y) un $\mathcal{C}$-espace quotient de $f^{-1}(U)$ et en particulier séparé. On en conclut aussitôt que Y est séparé, en vertu du lemme suivant, dont la démonstration est laissée au lecteur,

Lemme. — *Soit $X \in \hat{\mathcal{C}}$. Supposons que pour tout couple de deux points de X, existe un ouvert les contenant qui soit séparé pour la $\hat{\mathcal{C}}$-structure induite. Alors X est un $\hat{\mathcal{C}}$-espace séparé.*

La notion de "variété quotient" utilisée par Chevalley dans son séminaire n'est pas équivalente à celle de la définition 2, et n'est ni plus forte, ni moins forte ; elle peut s'énoncer en termes morphiques, mais la condition est assez canularesque. En renforçant légèrement la définition de Chevalley, on obtient la notion suivante, que peut être il faudra substituer à la définition 2 : $Y = X/R$ est dit un *$\mathcal{C}$-espace quotient strict* de X, si pour toute partie ouverte U de X, U/R_U admet une $\mathcal{C}$- structure quotient, et l'application canonique $U/R_U \longrightarrow X/R$ est un isomorphisme sur une partie ouverte de X/R. (C'est la condition Chevalley, plus le fait que l'application $X \longrightarrow X/R$ soit ouverte). Nous n'utiliserons cette notion que dans la proposition suivante :

Proposition 10. — *Soit X un $\hat{\mathcal{C}}$-espace muni d'une relation d'équivalence ouverte R. Soit $Y = X/R$ muni de la topologie quotient, et soit $f : X \longrightarrow Y$ l'application canonique. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

a) X/R *est un* $\hat{\mathcal{C}}$*-espace quotient strict de* X*.*

b) Pour tout $(x, y) \in R$*, existe un ouvert* W *contenant* x *et* y*, tel que* W/R_W *soit un* $\hat{\mathcal{C}}$*-espace quotient strict de* W*.*

c) Pour tout $(x, y) \in R$*, existent des voisinages ouverts arbitrairement petits* U *de* x *et* V *de* y*, tels que* $f(U) = f(V)$*, que* U/R_U *et* V/R_V *soient des* $\hat{\mathcal{C}}$*-espaces quotients de* U *resp.* V *(déf. 2) et que l'application composée* $U/R_U \longrightarrow f(U) = f(V) \longrightarrow V/R_V$ *soit un isomorphisme.*

Démonstration. — L'implication a) ⇒ b) est triviale, il suffit de prendre un voisinage ouvert W' de $f(x) = f(y)$ tel que W' soit un $\hat{\mathcal{C}}$-espace pour la structure induite par Y, et de poser $W = f^{-1}(W')$. Prouvons b) ⇒ c). Soit $(x, y) \in R$, soient U_0 un voisinage ouvert de x, V_0 un voisinage ouvert de y, alors $f(U_0)$ et $f(V_0)$ sont des voisinages ouverts de $z = f(x) = f(y)$, donc $A = f(U_0) \cap f(V_0)$ est un voisinage ouvert de z. W étant comme la condition b), on peut supposer $U_0 \subset W$, $V_0 \subset W$. Soit $U = U_0 \cap f^{-1}(A)$, $V = V_0 \cap f^{-1}(A)$, on a alors $f(U) = f(V) = A$; d'autre part comme W/R_W est par hypothèse un $\hat{\mathcal{C}}$-espace quotient strict de W, et que U est un ouvert de W, il en résulte que U/R_U est un $\hat{\mathcal{C}}$-espace quotient de U, s'identifiant à A muni de la structure induite par W/R_W. De même V/R_V est un $\mathcal{C}$-espace quotient de V s'identifiant à A, d'où résulte que U et V satisfont aux conditions exigées dans a). Prouvons enfin que c) implique a). Pour tout ouvert $U \subset X$ tel que U/R_U soit un $\mathcal{C}$-espace quotient de U, soit $Y_U = f(U)$ muni de la structure de $\mathcal{C}$-espace déduite de celle de U/R_U par transport de structure. Comme la topologie sous-jacente du $\mathcal{C}$-espace U/R_U est la topologie quotient de U, et que f est ouverte, la topologie de $\mathcal{C}$-espace Y_U est celle induite par Y. L'hypothèse implique que la réunion des Y_U est Y. Nous allons montrer que la famille des Y_U satisfait aux conditions de cohérence de prop. 2 n° 2. Soit $z \in Y_U \cap Y_V$, on a $z = f(x) = f(y)$, avec $x \in U$, $y \in V$. On peut (par hypothèse) trouver des voisinages ouverts $U' \subset U$ de x et $V' \subset V$ de y, tels que $Y_{U'} = Y_{V'}$ (avec identité aussi pour les $\mathcal{C}$-structures), c'est une partie ouverte W de Y, donc de Y_U et Y_V, contenant z, il reste à montrer que sa $\mathcal{C}$-structure est celle induite par Y_U, donc aussi celle induite par Y_V, de sorte que ces deux structures induites coïncident. Cela nous ramène à montrer que dans le cas où $U \subset V$, la $\mathcal{C}$-structure S de Y_U est identique à la $\mathcal{C}$-structure S' induite par celle de Y_V. Il est immédiat qu'elle est plus fine que la structure induite, il reste à montrer

que l'application identique de (Y_U, S') dans $Y_U = (Y_U, S)$ est un morphisme. Comme Y_V est un $\mathcal{C}$-espace quotient de V, cela signifie aussi que l'application correspondante f' de $V' = V \cap f^{-1}(Y_U)$ dans Y_U est un morphisme, et pour ceci il suffit de vérifier que tout point y de V' a un voisinage ouvert $V_1 \subset V'$ tel que $f'|V_1$ soit un morphisme de V_1 dans Y_U. Or soit $x \in U$ tel que $f(x) = f(y)$, il existe alors des voisinages ouverts $V_1 \subset V$ de y et $U_1 \subset U$ de x tels que $Y_{U_1} = Y_{V_1}$ (identique de $\mathcal{C}$-espace). Or $f'|V_1$ est un morphisme de V_1 dans Y_{V_1} donc aussi dans Y_{U_1} , donc aussi un morphisme de Y_{V_1} dans Y_U. Cela achève de montrer que les conditions de prop.2 sont satisfaites. Il existe par suite sur Y une $\hat{\mathcal{C}}$-structure locale unique pour laquelle les Y_U sont ouverts et qui induise sur tout Y_U la structure donnée sur Y_U. La topologie sous-jacente est identique à la topologie quotient sur Y. Montrons que Y est un $\hat{\mathcal{C}}$-espace quotient de X pour cette $\hat{\mathcal{C}}$-structure. Comme f est évidemment un morphisme de X dans Y (en vertu de *CT 4)*), il reste à vérifier que si W est une partie ouverte de Y, g une application de W dans un $\hat{\mathcal{C}}$-espace Z telle que l'application gf de $f^{-1}(W)$ dans Z soit un morphisme, alors g est un morphisme. Or W est réunion d'ouverts du type Y_U, et la structure Y_U étant celle induite par Y i.e. celle induite par W, il suffit de prouver que la restriction de g à Y_U est un morphisme, i.e. que la restriction de gf à U est un morphisme, ce qui est évidemment le cas.

Corollaire 1. — *Avec les notations de la prop.10, supposons de plus que $\mathcal{C}$ soit recollable. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) X/R *est un $\mathcal{C}$-espace quotient strict de X.*

b) Pour tout couple (x, y) de points de X (non nécessairement congrus mod. R !.) existe un ouvert W les contenant, tel que W/R_W soit un $\mathcal{C}$-espace quotient strict de W.

Quand $\mathcal{C}$ est sursaturée, cet énoncé est un cas particulier de la proposition 10 (l'implication a) $\Rightarrow$ b) étant triviale à priori). Si $\mathcal{C}$ est parfaite ou semi-parfaite, on est ramené, comme dans le corollaire à prop.9, à prouver que Y est un $\mathcal{C}$-espace local *séparé*, Or il résulte de la condition b) que deux points quelconques de Y sont contenus dans un ouvert qui est un $\mathcal{C}$-espace pour la structure induite, *donc* séparé, d'où résulte que Y est séparé, en vertu du lemme donné plus haut.

Corollaire 2. — *Soient X un $\mathcal{C}$-espace muni d'un groupe G d'automorphismes, $Y =$*

X/G l'espace des orbites, $f : X \longrightarrow Y$ l'application canonique de X sur Y. On suppose que pour tout $x \in X$, il existe un système fondamental de voisinages ouverts U de x tels que U/R_U soit un $\mathcal{C}$-espace quotient de U (où R_U désigne la relation d'équivalence sur U induite par la relation d'équivalence définie par G). Alors Y est un $\mathcal{C}$-espace quotient de X, et pour tout ouvert $U \subset X$, U/R_U est un $\mathcal{C}$-espace quotient de U, s'identifiant à un sous-espace ouvert de Y muni de la $\mathcal{C}$-structure induite par Y.

En effet, la condition c) de la proposition 10 est visiblement satisfaite. Le fait que R soit ouverte résulte du fait que pour tout ouvert U, le saturé de U pour R est identique à la réunion des ouverts $g \cdot U (g \in G)$ donc lui-même ouvert.

Définition 3. — *Soient X, Y deux $\mathcal{C}$-espaces, f un morphisme de X sur Y. Une application s de Y dans X est dite une $\mathcal{C}$-section pour f si c'est un $\mathcal{C}$-morphisme et si fs est l'application identique de Y. On dit que f admet localement une $\mathcal{C}$-section si Y est réunion d'ouverts U tels que les morphismes $f^{-1}(U) \longrightarrow U$ induits par f admettent une $\mathcal{C}$-section.*

Proposition 11. — *Soient X, Y deux $\mathcal{C}$-espaces f un morphisme de X sur Y, R la relation d'équivalence définie par f, f' la bijection de X/R sur Y déduite de f. Si s est une $\mathcal{C}$-section pour f, s est un isomorphisme sur une partie Y' de X ayant une structure induite par X ; si X est un $\mathcal{C}$-espace séparé, Y' est une partie fermée de X. Si f admet* localement *une $\mathcal{C}$-section, alors X/R est un $\hat{\mathcal{C}}$-espace quotient de X et f' est un isomorphisme.*

Supposons qu'il existe une $\mathcal{C}$-section s, montrons que la $\mathcal{C}$-structure sur X/R déduite de celle de Y par transport de structure fait de X/R un $\mathcal{C}$-espace quotient de X. Il revient au même de dire, puisque f est déjà un morphisme, que toute application g d'une partie ouverte U de Y dans un $\mathcal{C}$-espace Z, telle que gf soit un morphisme de $f^{-1}(U)$ dans Z, est elle-même un morphisme. En effet, on a $g = g(fs) = (gf)s$, qui est un morphisme comme composé de deux morphismes $U \longrightarrow f^{-1}(U) \longrightarrow Z$. Mettons sur $Y' = s(Y)$ la structure de $\mathcal{C}$-espace déduite de celle de Y par transport de structure, montrons que c'est là une $\mathcal{C}$-structure induite par X. Comme l'application d'injection de Y' dans X est déjà un morphisme (puisque s l'est) il faut seulement vérifier que si g est une application d'un $\mathcal{C}$-espace Z dans Y telle que sg soit un morphisme, alors g est un morphisme ; or on a $g = (fs)g = f(sg)$, c'est donc un morphisme comme composé des deux morphismes sg et f. Soit $p = sf$, c'est un morphisme de X dans X, et Y' est

l'ensemble des $x \in X$ tels que $px = x$, i.e. l'image inverse de la diagonale de $X \times X$ par le morphisme $x \longrightarrow (x, px)$ de X dans $X \times X$. Si la diagonale de $X \times X$ est fermée, c'est donc une partie fermée de X. Supposons enfin que f n'ait pas nécessairement de $\mathcal{C}$-section mais admette localement une $\mathcal{C}$-section. Alors la première assertion de la proposition est valable, comme il résulte aussitôt de ce qu'on vient de dire, et de proposition 9.

Corollaire. — *Soient X_i, Y_i des $\mathcal{C}$-espaces ($i = 1, 2$), f_i un morphisme de X_i sur Y_i admettant localement une $\mathcal{C}$-section. Alors $f_1 \times f_2$ est un morphisme de $X_1 \times X_2$ sur $Y_1 \times Y_2$ admettant localement une $\mathcal{C}$-section, et par suite sur $Y_1 \times Y_2$ la $\mathcal{C}$-structure produit des structures quotients des Y_i est identique à une $\mathcal{C}$-structure quotient du $\mathcal{C}$-espace produit $X_1 \times X_2$.*

8. — $\mathcal{C}$-Espaces réduits à un point.

(Le rédacteur laisse aux spécialistes de faire un n° étoffé sur les $\mathcal{C}$-espaces vides). Dans les catégories topologiques que nous aurons à considérer, l'axiome suivant sera satisfait :

CT 8) *Il existe un $\mathcal{C}$-espace réduit à un point. Si e est un tel $\mathcal{C}$-espace, alors toute application d'un $\mathcal{C}$-espace X dans e est un morphisme.*

Soient e, e' deux $\mathcal{C}$-espaces réduits à un point, soit f (resp. f') l'unique application de e dans e' (resp. de e' dans e). D'après CT 8), ce sont là des morphismes, réciproques l'un de l'autre, donc en fait des isomorphismes. En particulier, prenant $e = e'$, on voit qu'il n'existe qu'une *seule structure de $\mathcal{C}$-espace sur un ensemble e réduit à un point* : on supposera alors toujours implicitement que e est muni de cette structure. *Si alors $X \in \mathcal{C}$, l'application des projections $X \times e \longrightarrow X$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme.*

Proposition 12. — *Supposons que $\mathcal{C}$ soit une catégorie prétopologique satisfaisant l'axiome CT 8) ci-dessus. Soient X un $\mathcal{C}$-espace, x un point de X. Pour que $\{x\}$ admette une $\mathcal{C}$-structure induite, il faut et il suffit que toute application constante d'un $\mathcal{C}$-espace Y dans X, prenant la valeur x, soit un morphisme, ou encore que l'application identique de $\{x\}$ dans X soit un morphisme.*

Beweis klar. Le lecteur notera que dans le cas important de la catégorie des espaces algébriques définis sur un corps k, et dont le corps des valeurs K est $\neq k$, (cf par. 3), il y

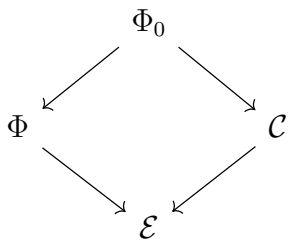
a en général des points de X qui ne satisfont pas les conditions de la proposition 12.

Corollaire. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie topologique, satisfaisant à l'axiome CT 8) soient X, Y deux $\mathcal{C}$-espaces, x un point de X tel que $\{x\}$ ait une $\mathcal{C}$-structure induite. Alors l'application $y \longrightarrow (x, y)$ de Y dans $X \times Y$ est un morphisme et même un $\mathcal{C}$-isomorphisme de Y sur une partie de $X \times Y$ munie d'une $\mathcal{C}$-structure induite.*

Cette application i est en effet composée de deux applications $Y \longrightarrow \{x\} \times Y \longrightarrow X \times Y$, la seconde est un morphisme comme produit de deux morphismes, et la première est aussi un morphisme, car ses deux applications composantes $Y \longrightarrow \{x\}$ et $Y \longrightarrow Y$ sont des morphismes. La dernière résulte du fait que i admet un morphisme inverse à gauche, savoir l'application $(a, b) \longrightarrow (x, b)$, (qui est bien un morphisme comme produit de deux morphismes)

9. — Espaces fibrés.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie topologique ("catégorie base"), Φ_0 et Φ deux catégories "catégories fibres", $\mathcal{E}$ désignant la catégorie des ensembles, on suppose donnés, en plus du foncteur fondamental $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$, des foncteurs covariants $\Phi_0 \longrightarrow \mathcal{C}$ et $\Phi_0 \longrightarrow \Phi \longrightarrow \mathcal{E}$, de telle façon que le diagramme suivant de foncteurs



soit commutatif. On ne suppose pas que ces trois foncteurs supplémentaires soient fidèles, néanmoins, suivant notre habitude, nous considérerons les éléments de Φ et de Φ_0 comme des ensembles munis de structures de type Φ (resp. de type Φ_0) (mais un morphisme dans Φ_0 pourrait ne pas être déterminé sans ambiguïté par l'application d'ensembles qu'elle définit). Ainsi une structure de type Φ_0 porte des structures "sous-jacentes" de type $\mathcal{C}$ et de type Φ. Il sera commode de supposer que le foncteur $\Phi_0 \longrightarrow \Phi$ est fidèle et transportable, et que si $A, B \in \Phi_0$, un Φ-morphisme $A \longrightarrow B$ est un Φ_0-morphisme si et seulement si l'application qu'il définit est un $\mathcal{C}$-morphisme. Le cas le plus important est celui où $\Phi_0 = \Phi$

Le cas $\Phi \neq \Phi_0$ se rencontre en Géométrie algébrique, $\mathcal{C}$ étant la catégorie des (k, K)-espaces algébriques, alors Φ_0 sera par exemple, la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie *définis sur* k, tandis que Φ sera la catégorie des K-espaces vectoriels sans plus. Cf; par.2, n° 6 et suivants.

Définition 4. — *$\mathcal{C}$, Φ et Φ_0 étant comme ci-dessus, on appelle fibré de type ($\mathcal{C}$, Φ, Φ_0) (ou simplement fibré de type ($\mathcal{C}$, Φ) si $\Phi = \Phi_0$, ou enfin simplement $\mathcal{C}$-fibré si $\mathcal{C} = \Phi = \Phi_0$) l'objet ξ formé par : (i) un morphisme p (la* projection*) d'un $\mathcal{C}$-espace E (l'*espace fibré*) sur un $\mathcal{C}$-espace X (la* base*) (ii) pour tout $x \in X$, la donnée d'une Φ-structure sur la fibre $f^{-1}(x)$ de x ; ces données étant assujetties à l'axiome suivant :*

LF) X est réunion d'ouverts U tels que l'objet "induit" par ξ sur U soit isomorphe à un produit $U \times F$, où $F \in \Phi_0$.

Il est clair ce qu'il faut entendre par l'objet induit, et aussi quelles structures (i) et (ii) définit un produit $U \times F$; On met sur $U \times F$ la structure de $\mathcal{C}$-espace produit, on considère le morphisme canonique $U \times F \longrightarrow U$, les fibres de ce fibré ensembliste s'identifient toutes à F, et de ce fait ont une Φ-structure sous-jacente. On ne suppose pas que le choix de F puisse être pris indépendant de U, encore moins qu'il figure dans la structure de E. Si on peut choisir un F indépendant de U, on dit que l'espace fibré est *monotype*, et F est alors appelé une *fibre type* de ξ. Même dans ce cas, F n'est pas nécessairement déterminé par ξ, même à isomorphisme près dans Φ_0. Cependant, si un $x \in X$ est tel que $\{x\}$ admette une $\mathcal{C}$-structure induite, alors la fibre E_x de E sur x est canoniquement munie d'une structure de type Φ_0 (résulte du corollaire à prop. 12), et s'il existe une fibre-type F, elle est Φ_0-isomorphe à E_x.

Définition 5. — *Soient $\xi = (E, p, X)$ et $\xi' = (E', p', X')$ deux fibrés de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$. On appelle $(\mathcal{C}, \Phi)$-morphisme de ξ dans ξ' toute application f de E dans E', ayant les propriétés suivantes : f applique fibre dans fibre et est un Φ-morphisme sur les fibres ; l'application $f : E \longrightarrow E'$ et l'application $X \longrightarrow X'$ déduite de f par passage au quotient est un $\mathcal{C}$-morphisme.*

Pour la notion évidente de composition des morphismes, on voit que les $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$-fibrés forment une *catégorie*. Le foncteur $\xi = (E, p, X) \longrightarrow E$ à valeurs dans $\mathcal{C}$ est *transportable* et *fidèle* (d'où l'identification de ξ à E) ; le foncteur $\xi = (E, p, X) \longrightarrow X$

de la catégorie des $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$-fibrés dans $\mathcal{C}$ est appelé foncteur-base. D'autre part, si E est un $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$-fibré sur X, on a la notion de *restriction* de ce fibré à une partie ouverte U de X, ce sera encore un $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$-fibré. On vérifie aussitôt qu'on a là les données pour une *catégorie prélocale* (Top. Elém. chap. I)

Proposition 13. — *Si la catégorie topologique $\mathcal{C}$ est recollable, alors les fibrés de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$ forment une catégorie locale.*

Il faut prouver, dans chacun des cas nommés dans la propoisition, le critère de recollement : On a un $\mathcal{C}$-espace X, un recouvrement ouvert (U_i) de X, sur tout U_i un fibré E_i de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$, et sur $U_i \cap U_j$ un isomorphisme f_{ij} de $E_j|U_{ij}$ sur $E_i|U_{ij}$, satisfaisant aux conditions de cohérence $f_{ik} = f_{ij}f_{jk}$. On veut trouver un fibré E, sur X, et des isomorphismes $E_i \longrightarrow E|U_i$, de telle façon qu'on ait $f_{ij} = f_i^{-1}f_j$ sur U_{ij} (avec les abus d'écriture habituels). On sait (loc. cité) qu'on peut trouver un espace topologique E et une application continue p de E sur X, enfin des homéomorphismes $f_i : E_i \longrightarrow E|U_i$ tels qu'on ait $f_{ij} = f_i^{-1}f_j$. De plus, pour tout $x \in X$, mettons sur la fibre $p^{-1}(x) = E_x$ une structure de type Φ, en prenant un $U_i \ni x$ et la structure déduite de celle de $E_{ix} = p_i^{-1}(x)$ par transport de structure à l'aide de $f_i|E_{ix}$. En vertu de $f_j = f_i f_{ij}$, la structure ainsi mise sur E_x est indépendante du choix de i. De plus, soit $E'_i = p^{-1}(U_i)$, munissons E'_i de la $\mathcal{C}$-structure déduite de la $\mathcal{C}$-structure de E_i par transport de structure à l'aide de f_i. Les $\mathcal{C}$-structures des ouverts E'_i et E'_j de E induisent la même $\mathcal{C}$-structure dans $E'_i \cap E'_j = p^{-1}(U_{ij})$, puisque $f_i^{-1}f_j = f_{ij}$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme $E_j|U_{ij}$ sur $E_i|U_{ij}$. Il s'ensuit qu'il y a sur E une $\mathcal{C}$- structure *locale* dont la topologie sous-jacente soit celle de E, et induisant sur les ouverts E'_i la $\mathcal{C}$-structure donnée, i.e. telle que les f_i soient des $\hat{\mathcal{C}}$-isomorphismes de E_i sur les ouverts E'_i. Il est clair maintenant que E est un fibré de type $(\hat{\mathcal{C}}, \hat{\Phi}, \hat{\Phi}_0)$, et les f_i des isomorphismes de $(\hat{\mathcal{C}}, \hat{\Phi}, \hat{\Phi}_0)$-fibrés ayant les propriétés requises. Il reste à montrer que E est en fait un $\mathcal{C}$-espace. C'est trivial si $\mathcal{C}$ est sursaturée i.e. $\mathcal{C} = \hat{\mathcal{C}}$. Montrons maintenant que si X et les E_i sont des $\mathcal{C}$-espaces séparés, alors E est un $\mathcal{C}$-espace séparé, i.e. la diagonale D de $E \times E$ est fermée. Comme $E \times E$ est réunion des ouverts $E'_i \times E'_j$, il suffit de montrer que $D \cap (E'_i \times E'_j)$ est fermé dans $E'_i \times E'_j$, ou encore que l'ensemble A des points (u, v) de $E_i \times E_j$ tels que $f_i(u) = f_j(v)$ est fermé. Or cet ensemble est contenu dans l'ensemble B des points (u, v) tels que $p_i(u) = p_j(v)$, qui est fermé puisque c'est image réciproque de la diagonale de $X \times X$ (fermée par hypothèse) par l'application continue

$p_i \times p_j$ de $E_i \times E_j$ dans $X \times X$. Comme d'autre part B est contenu dans l'ensemble $F_i \times F_j$, où $F_i = E_i|U_{ij}$, $F_j = E_j|U_{ij}$, il suffit donc de montrer que A est fermé dans $F_i \times F_j$. Or A est aussi l'ensemble des points de $F_i \times F_j$ tels que $u = f_{ij}(v)$, i.e, l'image répiproque de la diagonale de $F_i \times F_i$ par l'application produit $1 \times f_{ij}$, qui est continue puisque c'est un morphisme. Comme E_i donc F_i est séparé, la diagonale de $F_i \times F_i$ est fermée, d'où s'ensuit bien que A est fermé dans $F_i \times F_j$. — Ceci prouve en particulier que si $\mathcal{C}$ est parfaite, alors E, étant un $\mathcal{C}$-espace local *séparé* d'après ce qui précède, est un $\mathcal{C}$-espace. Enfin, si $\mathcal{C}$ est semi-parfaite, alors il existe une sous famille, finie de (V_i) recouvrant X, donc E, étant un $\mathcal{C}$-espace local *séparé* réunion *finie* de parties ouvertes qui sont des $\mathcal{C}$-espaces, est lui-même un $\mathcal{C}$-espace. Cela achève la démonstration de la prop. 13.

Corollaire. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie topologique, recollable. On suppose donnés de plus Φ, Φ_0 comme ci-dessus. Soient $F \in \Phi_0$, $X \in \mathcal{C}$, G le groupe des Φ-automorphismes de F, et soit $\mathcal{F}$ le faisceau des germes d'applications de X dans G, dont les sections sur un ouvert U sont les applications g de U dans G telles que $(x, y) \to g(x)y$ et $(x, y) \to g(x)^{-1}y$ soient des $\mathcal{C}$-morphismes de $U \times F$ dans F. $\mathcal{F}$ s'identifie au faisceau des germes d'automorphismes du fibré de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$ trivial $U \times F$. Sur un ensemble E, la donnée d'une structure de fibré de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$ homogène de fibre type F et de base X, est équivalent à la donnée d'une structure de fibré à faisceau structural de type $(\mathcal{F}, U \times F)$.*

Il résulte en effet, des définitions que les automorphismes du fibré $U \times F$ de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$ sont les applications $(x, y) \longrightarrow (x, g(x)y)$ où g est une application de U dans $G = \mathrm{Aut}(F)$ satisfaisant aux conditions énoncées, d'où la première partie du corollaire (valable sans hyptohèse sur $\mathcal{C}$). Or les fibrés homogènes de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$ de base X, et de fibre type F, sont par définition les fibrés de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$ sur X *localement isomorphes* à $X \times F$. Comme les fibrés de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$ forment une *catégorie locale*, la dernière assertion est un cas particulier de Top. Elém. chap I...On voit donc que si on ne s'intéresse qu'aux fibrés homogènes de fibre donnée F, ceux-ci sont déterminés par la seule donnée d'un $\mathcal{C}$-espace F muni d'un certain sous-groupe G du groupe des $\mathcal{C}$-automorphismes de F. La catégorie Φ n'intervient que pour préciser la notion de morphisme de fibrés.

Corollaire 2. — *Sous les conditions du corollaire 1, l'ensemble des classes de fibrés ho-*

mogènes de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$ *sur* X*, de fibre type* F*, s'identifie à l'ensemble de cohomologie* $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{F})$.

10. — $\mathcal{C}$-espaces fibrés à $\mathcal{C}$-groupe structural.

On suppose que la catégorie locale $\mathcal{C}$ satisfait l'axiome CT 8) du n° 8. Conformément aux définitions générales (??) on appelle $\mathcal{C}$-groupe un ensemble G muni d'une $\mathcal{C}$-structure et d'une structure de groupe, compatibles dans le sens suivant : les applications $(x, y) \mapsto xy$ et $x \mapsto x^{-1}$ de $G \times G$ dans G et de G dans G sont des $\mathcal{C}$-morphismes, et l'élément unité de G admet une $\mathcal{C}$-structure induite (cf n°8). Une application $G \longrightarrow G'$ est dite un morphisme de $\mathcal{C}$-groupes, si c'est un morphisme pour les deux structures sous-jacentes. Les $\mathcal{C}$-groupes forment ainsi une catégorie $\mathcal{G}(\mathcal{C})$, munie de deux foncteurs fidèles et transportables, à valeurs dans la catégorie $\mathcal{G}$ des groupes et dans $\mathcal{C}$ respectivement, et satisfaisant aux conditions envisagées au début du n°9. La notion de "$\mathcal{C}$-fibré en groupes" est donc définie, mais ce n'est pas à elle qu'ici nous en avons.

Soit G un $\mathcal{C}$-groupe. Toujours conformément aux définitions générales un $\mathcal{C}$-espace à $\mathcal{C}$-groupe d'opérateurs G est un ensemble E, muni des structures de $\mathcal{C}$-espace et d'ensembles à groupe d'opérateurs G, compatibles dans le sens suivant : l'application $(g, x) \to g.x$ de $G \times E$ dans E est un $\mathcal{C}$-morphisme. Les morphismes pour de tels objets se définisent comme ci-dessus en séparant les structures, soit qu'on garde G fixe, soit qu'on le bouge. Dans chaque cas on obtient encore une catégorie avec foncteurs à valeurs dans $\mathcal{C}$ resp. la catégorie des ensembles à groupe d'opérateurs, satisfaisant toujours aux conditions du début du n°9, et permettant donc de définir la notion de "$\mathcal{C}$-fibré à $\mathcal{C}$-groupe d'opérateurs" mais ce n'est pas à celle-là non plus que nous en avons.

Supposons qu'on se soit donné un $\mathcal{C}$-espace F à $\mathcal{C}$-groupe d'opérateurs G, G opérant *fidèlement* sur F. Soit X un $\mathcal{C}$-espace, soit $\mathcal{G}$ le faisceau des germes morphismes de X dans G, c'est un faisceau de groupes, qui opère de façon évidente par germes d'automorphismes du $\mathcal{C}$-espace fibré trivial $X \times F$.

Définition 6. — *Les notations sont celles qui précèdent. On appelle* $\mathcal{C}$*-espace fibré à groupe structural* G*, fibré* F *(muni de sa structure de* $\mathcal{C}$*-espace à opérateurs) et base* X*, un ensemble* E *muni de la structure d'*$\mathcal{C}$*-espace fibré ensembliste sur* X*, à faisceau structural* $\mathcal{G}$*, de type* $(\mathcal{G}, X \times F)$.

Cela signifie donc qu'on se donne une application p de E sur X, et un faisceau de germes d'isomorphismes de $X \times F$ sur E, qui soit stable par composition à droite avec les germes de $\mathcal{G}$, et qui soit principal sous G. En vertu des propriétés, si les $\mathcal{C}$-fibrés forment une catégorie locale, comme $\mathcal{G}$ est un faisceau de germes d'automorphismes du $\mathcal{C}$-fibré $X \times F$, *un fibré E à groupe structural G, fibre F est muni canoniquement d'une structure de $\mathcal{C}$-fibré* ; il en est ainsi en particulier si $\mathcal{C}$ est sursaturée, ou parfaite, ou semi-parfaite (prop. 13). Plus généralement, avec les notations du début du n°9, supposons que $F \in \Phi_0$, et que G soit un groupe de Φ-*automorphismes* de F, alors $\mathcal{G}$ est un faisceau de germes d'automorphismes de $X \times F$ considéré comme un fibré de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$; ainsi, sous ces conditions, un fibré à groupe structural G, fibre F a une structure sous-jacente de $\mathcal{C}$-fibré de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$. Voici un cas important où on a une réciproque :

Proposition 14. — *Les notations étant celles du début, du n° 9, et celles précédant la définition 6, supposons que $F \in \Phi_0$, que G soit exactement le groupe des Φ-automorphismes de F, et que la condition suivante soit satisfaite : si g est une application d'un $\mathcal{C}$-espace U dans G, telle que $(x, y) \longrightarrow g(x).y$ et $(x, y) \longrightarrow g(x)^{-1}.y$ soient des $\mathcal{C}$-morphismes de $U \times F$ dans F, alors g est un $\mathcal{C}$-morphisme de U dans G. Supposons enfin $\mathcal{C}$ recollable. Alors pour tout ensemble E, la donnée sur E d'une structure de $\mathcal{C}$-espace fibré à groupe structural G, fibre F est équivalente à la donnée d'une structure de $\mathcal{C}$-espace fibré de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$ de fibre type F.*

Ceci résulte en effet aussitôt du corollaire 1 à la proposition 13.

On notera, que pour un $\mathcal{C}$-espace F à $\mathcal{C}$-groupe fidèle G d'opérateurs, il existe toujours des catégories Φ_0, Φ du type envisagé n° 9, et une structure de type Φ_0 sur F, telle que G soit exactement le groupe des Φ-automorphismes de F : Il suffit de considérer la catégorie Φ des ensembles Y munis à la fois d'une structure de "G-ensemble de type F" donnée par un élément de l'ensemble quotient de l'ensemble des bijections de F sur Y par les opérations de G), et la catégorie Φ_0 des ensembles munis à la fois d'une structure Φ et d'une structure de $\mathcal{C}$-espace, soumis à la condition que les bijections "permises" de F dans Y soient des $\mathcal{C}$-isomorphismes. Cela montre que, pour peu que la condition, supplémentaire sur G, F envisagée dans la prop. 14 est satisfaite, la notion de fibré à groupe structural se ramène (avantageusement) aux notions du n° 9.

Prenons par exemple $F = G$, G opérant sur lui-même par translations *gauches*. Si g est une application de U dans G telle que l'application $(x, y) \longrightarrow g(x).y$ de $U \times G$ dans

G soit un morphisme, on en conclut, en composant avec l'application $x \longrightarrow (x, e)$ de U dans $U \times G$, qui est un morphisme en vertu du corollaire à prop. 12, que g est bien un morphisme de U dans G. Prenons pour Φ_0 la catégorie des $\mathcal{C}$-espaces à $\mathcal{C}$-groupe d'opérateurs à droite, F, pour Φ la catégorie des ensembles à groupe d'opérateur à droite G, et considérons $F = G$ comme un élément de cette catégorie, en faisant opérer G sur F par *translations à droite*. Les $\mathcal{C}$-fibrés de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$, i.e. les $\mathcal{C}$-espaces fibrés à $\mathcal{C}$-groupe d'opérateurs G à droite, qui admettent la fibre type qu'on vient de définir, sont appelés les *$\mathcal{C}$-espaces principaux* (à droite) de *groupe* G. On déduit donc de ce qui précède :

Corollaire. — *Les $\mathcal{C}$-espaces fibrés principaux de groupe G s'identifient aux $\mathcal{C}$-espaces fibrés à groupe structural G, fibre G, où le groupe G opère par translations à gauche. (On suppose $\mathcal{C}$ recollable).*

En vertu des faits généraux bien connus (Top. Elém. chap. I) la catégorie prélocale des $\mathcal{C}$-espaces fibrés à groupe structural G fibre F sur des ouverts de X, i.e. des fibrés ensemblistes sur des ouverts U de X, à faisceau structural $\mathcal{G}$, de type $(\mathcal{G}, U \times F)$, ne dépend, à "isomorphisme canonique" près, que du faisceau $\mathcal{G}$ et non du fibré ensembliste $X \times F$ où on fait opérer ce faisceau, donc ne dépend que de G et non de la fibre F. Ceci montre donc *à priori* la correspondance entre $\mathcal{C}$-fibrés à groupe structural et fibre F, et $\mathcal{C}$-fibrés *principaux* (de groupe G) associés. On en conclut, compte tenu de prop. 13 :

Corollaire 2. — *Si $\mathcal{C}$ est recollable, alors la catégorie prélocale des $\mathcal{C}$-fibrés sur X à groupe structural G, fibre F, est une catégorie locale.*

On a oublié, dans les remarques précédant le corollaire 2, et dans ledit corollaire, de préciser que les morphismes d'un $\mathcal{C}$-fibré E à groupe structural G, fibre F dans un autre (de même groupe structural, de même fibre et de même base, sont ici par définition les isomorphismes de fibrés ensemblistes à faisceau structural $\mathcal{G}$, de type $(\mathcal{G}, X \times F)$. Prenant comme morphismes dans Φ les isomorphismes d'ensembles à groupe d'opérateurs G fixé (applications "compatibles" avec les opérations de G), ce qui détermine aussi la notion de morphismes dans Φ_0, on voit que la correspondance envisagée dans prop. 14 est fonctorielle. Ceci montre en plus clairement que la notion de $\mathcal{C}$-espace fibré à groupe structural n'est pas très commode telle quelle quand on veut avoir des notions plus variées de morphismes de fibrés ; ainsi la notion naturelle de morphismes de $\mathcal{C}$-fibrés vectoriels (cf par.

2) ne s'exprime pas en termes de groupes structuraux. Aussi le langage du n° 9 sera-t-il le plus souvent préférable à celui développé ici.

Nous ne reviendrons pas ici sur la construction "géométrique" d'un $\mathcal{C}$-fibré à groupe structural G et fibre F, *associé* à un fibré principal et vice-versa, espérant qu'elle découlera automatiquement des trucs généraux exposés dans Top. Elém. Chap.I

Enfin il faut encore préciser la version globale de la notion de $\mathcal{C}$-fibré principal à $\mathcal{C}$-groupe structural G. Soit d'abord E un $\mathcal{C}$-fibré principal à $\mathcal{C}$-groupe structural G, de base X ; alors E admet localement une $\mathcal{C}$-section (n° 7, déf. 3) : on peut en effet supposer que E est de la forme $X \times G$, et on prend la section définie par l'application constante $x \longrightarrow e$ de X dans G, qui est une $\mathcal{C}$-section en vertu du corollaire à prop. 12. Donc (n° 7, prop. 11) X s'identifie à un $\mathcal{C}$- espace quotient de E. Par suite, *le $\mathcal{C}$-espace fibré principal E est connu, à isomorphisme près, quand on connait la structure sous-jacente de $\mathcal{C}$-espace à $\mathcal{C}$-groupe d'opérateurs à droite.*

Définition 7. — *Un $\mathcal{C}$-espace E à $\mathcal{C}$-groupe d'opérateurs G à droite est dit* localement trivial *(ou encore on dit que X est* fibré localement trivial par *G) s'il est isomorphe au $\mathcal{C}$-espace à $\mathcal{C}$-groupe d'opérateurs défini par un $\mathcal{C}$-espace fibré principal E_1 à $\mathcal{C}$-groupe structural G.*

S'il en est ainsi, on peut supposer alors que $E_1 = E$ en tant que $\mathcal{C}$-espace à opérateurs, et que la base de E_1 est $\mathcal{C}$-espace quotient $X = E/G$.

Proposition 15. — *Soit E un $\mathcal{C}$-espace à $\mathcal{C}$-groupe d'opérateurs G à droite. Pour que E soit isomorphe à un $\mathcal{C}$-espace fibré principal trivial, il faut et il suffit qu'il existe un $\mathcal{C}$-morphisme f de E dans G ayant les propriétés suivantes :*

(i) $f(xg) = f(x).g$ *pour* $x \in E$, $g \in G$

(ii) l'ensemble X des $x \in E$ tels que $f(x) = e$ admet une $\mathcal{C}$-structure induite.

La condition est nécessaire, car si $E = X \times G$, on pose $f(x, g) = g$; la condition (i) est vérifiée trivialement, et la condition (ii) résulte du corollaire à prop. 12. La condition est suffisante, car considérons les applications $(x, g) \longrightarrow x.g$ de $X \times G$ dans E, et $y \longrightarrow (y.f(y)^{-1}, f(y))$ de E dans $X \times G$, ce sont là des $\mathcal{C}$-morphismes, compatibles avec les opérations de G, et on constate aussitôt qu'elles sont inverses l'une de l'autre.

Corollaire 1. — *Soit E un $\mathcal{C}$-espace à $\mathcal{C}$-groupe d'opérateurs G à droite. Supposons $\mathcal{C}$ sursaturée. Pour que E soit fibré localement trivial par G (déf.7) il faut et il suffit que pour tout $x \in E$ existe un voisinage ouvert U stable par G, et un $\mathcal{C}$-morphisme f de U dans G satisfaisant les conditions (i) et (ii) de la proposition 15.*

Corollaire 2. — *Soit E un $\mathcal{C}$-espace à $\mathcal{C}$-groupe d'opérateurs G à droite. Supposons $\mathcal{C}$ parfaite ou semi-parfaite. Pour que E soit fibré localement trivial par G (déf. 7), il faut et il suffit que la relation d'équivalence définie par G ait un graphe fermé, et que pour tout $x \in E$ existe un voisinage ouvert U de x et un $\mathcal{C}$-morphisme f de U dans G satisfaisant les conditions (i) et (ii) de prop. 15.*

Démontrons les corollaires : la nécessité étant évidente dans chaque cas grâce à prop.15, il suffit de démontrer la suffisance des conditions envisagées. Il résulte des hypothèses et de prop.15 que tout $x \in E$ admet un voisinage ouvert U stable par G, tel que U/G soit un $\mathcal{C}$-espace quotient de U ; il en résulte ($n°7$, prop.9) que E/G est un $\mathcal{C}$-espace quotient de E. C'est donc un $\mathcal{C}$-espace quotient si $\mathcal{C}$ est sursaturée. Dans le cas où $\mathcal{C}$ est parfaite ou semi-parfaite, montrons que $X = E/G$ est séparé, d'où résultera aussitôt que X est un $\mathcal{C}$-espace quotient de E. Or il résulte de prop.11, corollaire que $X \times X$ est un $\mathcal{C}$-espace quotient de $E \times E$, en particulier sa topologie est la topologie quotient de celle de $E \times E$. Comme l'image inverse de la diagonale D de $X \times X$ est le graphe de la relation d'équivalence définie par G dans E, donc fermée, il s'ensuit que D est fermée, donc X est séparé. Donc en tous cas $X = E/G$ est un $\mathcal{C}$-espace quotient de E.

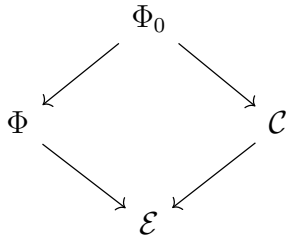
Munissons alors E de sa $\mathcal{C}$-structure, de sa projection sur le $\mathcal{C}$-espace $X = E/G$ (projection qui est un $\mathcal{C}$-morphisme) et des structures d'ensembles à groupe d'opérateurs G sur les fibres, définies par les opérations de G dans E, je dis qu'alors E devient un $\mathcal{C}$-fibré au sens du n° 9, déf. 4. Cela résulte en effet de prop. 15 appliquée aux ouverts U envisagés dans les corollaires 1 et 2.

Remarque. — Nous verrons que dans les cas les plus importants, la condition (ii) de la proposition 15 résulte déjà de la condition (i). C'est le cas évidemment si $\mathcal{C}$ est la catégorie topologique des espaces topologiques, puisque toute partie d'un espace topologique admet une structure induite. C'est aussi le cas si $\mathcal{C}$ est la catégorie des ensembles algébriques définis sur un corps k, car toute partie fermée d'un $\mathcal{C}$-espace admet

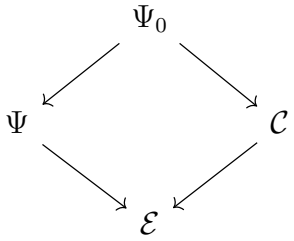
alors une structure induite. C'est enfin aussi le cas si $\mathcal{C}$ est la catégorie des variétés m-fois différentiables, ou analytiques réelles, ou analytiques complexes, comme nous le verrons ultérieurement.

11. — $\mathcal{C}$-fibrés associés.

Revenons à la situation générale du début du n° 9, symbolisé par un diagramme de foncteurs fidèles et transportables.



et supposons un diagramme analogue faisant intervenir des catégories Φ, Φ_0 :



Supposons donnés enfin des foncteurs, covariants pour fixer les idées (mais rien ne serait essentiellement changé s'ils étaient tous deux contravariants)

$$F : \Phi \longrightarrow \Psi \quad , \quad F_0 : \Phi_0 \longrightarrow \Psi_0$$

donnant lieu aux trois relations de commutation naturelles relativement aux foncteurs intervenant dans les diagrammes ci-dessus. Supposons que $\mathcal{C}$ soit recollable. Nous allons alors définir un foncteur, dénoté de façon abrégée par F', de la catégorie des fibrés de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$ dans la catégorie des fibrés de type $(\mathcal{C}, \Psi, \Psi_0)$, à un espace fibré ξ étant associé un espace fibré de même base, dit *associé* à ξ et aux foncteurs (F, F_0). (Dans le cas où $\Phi = \Phi_0$, on a $F = F_0$, et on ne parle plus que de F). Soit $\xi = (E, p, X)$ le fibré envisagé, pour tout $x \in X$ la fibre de $F'(\xi)$ est par définition $F(\xi_x)$, où $\xi_x = p^{-1}(x) \in \Phi_0$ est la fibre de ξ sur x : on prendra donc pour $F'(\xi)$ l'ensemble somme

des $\xi'_x = F(\xi_x)$, pour projection $p' : E' \longrightarrow X$ l'application dont les fibres sont les ξ'_x, enfin on définit sur E' une structure de fibré de type $(\mathcal{C}, \Psi, \Psi_0)$ par recollement au moyen de la famille suivante de structures de ce type sur des $p'^{-1}(U_i)$: pour tout isomorphisme $f_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times A_i$ (où U_i est un ouvert de X, et $A_i \in \Phi_0$), on déduit une famille d'isomorphismes $\xi_x \longrightarrow A_i$ dans Φ $(x \in U_i)$, d'où en appliquant le foncteur F une famille d'isomorphismes $\xi'_x \longrightarrow F(A_i)$ dans Ψ, d'où une bijection $f'_i : p'^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times F(A_i)$, compatible avec les applications de projection sur U_i et les structures de type Ψ sur les fibres. Il faut vérifier que les cartes f'_i ainsi obtenues sont compatibles, pour ceci, il faut imposer au foncteur F la condition suivante :

- *Soient $U \in \mathcal{C}$ et $A, B \in \Phi_0$, enfin soit $g : U \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Phi(A, B)$ une application telle que l'application $(x, a) \longrightarrow g(x)a$ de $U \times A$ dans B soit un $\mathcal{C}$-morphisme, alors l'application $x \longrightarrow g'(x) = F(g(x))$ de U dans $\mathrm{Hom}_\Psi(F(A), F(B))$ a la propriété analogue*.

Supposant cette condition satisfaite, les cartes envisagées sur les $p'^{-1}(U_i)$ se recollent, et définissent donc en vertu de prop.13 une structure de fibré de type $(\mathcal{C}, \Psi, \Psi_0)$ sur E', et par définition $F'(\xi)$ désigne E' muni de la structure en question.

Soient $\xi = (E, p, X)$ et $\xi_1 = (E_1, p_1, X_1)$ deux fibrés de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$ et f un morphisme du premier dans le second, f est donc défini par un $\mathcal{C}$-morphisme $f_X : X \longrightarrow X_1$, et par une application $x \longrightarrow f(x)$, où pour tout $x \in X$, $f(x)$ désigne un élément de $\mathrm{Hom}_\Phi(\xi_x, \xi_{1,f_X(x)})$. Posons

$$\xi' = F'(\xi), \quad \xi'_1 = F'(\xi_1), \quad f'(x) = F(f(x)) \in \mathrm{Hom}_\Psi(\xi'_x, \xi'_{1,f_X(x)})$$

Utilisant la condition imposée ci-dessus à F, on constate que l'application $f' : E' \longrightarrow E'_1$ définie par f_X et les $f'(x)$ définis par la formule précédente, est un $\mathcal{C}$-morphisme, donc en fait un morphisme de fibrés de type $(\mathcal{C}, \Psi, \Psi_0)$. On le désigne par $F'(f)$. On constate que les fonctions $F'(\xi)$ et $F'(f)$ définissent bien un foncteur comme annoncé i.e. que $F'(\text{identité}) = \text{identité}$, $F'(gf) = F'(g)F'(f)$, ce qui achève la définition que nous avions en vue.

Parmi les propriétés imprtantes de la notion de fibré associé, il faut signaler la *transitivité des fibrés associés*, exprimée par la formule fonctorielle,

$$(GF)' = G'F'$$

(où la variance de G et F est ce qu'elle veut). De plus, *F' est un foncteur par rapport au couple* (F, F_0), i.e. si on a un couple analogue (G, G_0) de foncteurs $\Phi \longrightarrow \Psi$ et $\Phi_0 \longrightarrow \Psi_0$, et un homomorphisme fonctoriel $u : F \longrightarrow G$ tel que, pour $A \in \Phi_0$, l'homomorphisme $u(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$ soit en fait un Ψ_0-homomorphisme de $F_0(A)$ dans $G_0(A)$, il correspond à u

$$u' : F' \longrightarrow G'$$

dont la définition, évidente, est laissée à un lecteur fictif, (que, suivant l'usage, nous supposons infiniment scrupuleux). Ce même lecteur vérifiera aussi les importantes formules

$$(\text{identité})' = \text{identité}, \quad (vu)' = v'u'$$

qui justifient notre assertion que F' est un foncteur en (F, F_0).

On a oublié de dire que les foncteurs construits dans ce numéro, sont des foncteurs de catégories locales sur $\mathcal{C}$ (Top. Elem. Chap I) ; et les homomorphismes fonctoriels u' sont des homomorphismes de foncteurs de catégories locales.

En particulier, soit G un $\mathcal{C}$-groupe, et désignons comme au n° 10, par Φ_o la catégorie des $\mathcal{C}$-espaces à $\mathcal{C}$-groupe d'opérateurs *à droite* G isomorphes à G (opérant sur lui-même par la représentation régulière droite), les morphismes étant les isomorphismes, et par Φ la catégorie des ensembles à groupe d'opérateurs G à droite, les morphismes étant les isomorphismes. Soient Ψ_o, Ψ comme au début de ce numéro. Notons que $\mathrm{Hom}_\Phi(G, G)$ est isomorphe à G, opérant sur lui-même par la représentation régulière gauche. Donc un couple de foncteurs (F, F_0) satisfaisant aux conditions envisagées définit un objet $A \in \Psi_0$, savoir $A = F_0(G)$, et des opérations à gauche de G par Ψ-automorphismes de A (Transformées par F des Φ-automorphismes de G), et la condition sou-lignée sur F (appliquée au cas où $U = G$, et où $g : G \times G \longrightarrow G$ est définie par la loi de groupe de G) implique que en fait $A = F_0(G)$ est un $\mathcal{C}$-espace à opérateurs à gauche. Inversement, la donnée d'un $A \in \Psi_o$, avec une structure de $\mathcal{C}$-espace à groupe d'opérateurs G *à gauche*, les opérations de G étant des Ψ-automorphismes, définit de façon bien connue un foncteur $\Phi \longrightarrow \Psi$, et de même un foncteur $\Phi_0 \longrightarrow \Psi_0$ noté $E \longrightarrow (E, A)_G$ (en tant qu'ensemble, $(E, A)_G$ est le quotient de $E \times A$ par le groupe G opérant par $g.(e, a) = (e.g^{-1}, g.a)$) ; ces foncteurs satisfont aux trois relations de compatibilité qu'il faut, et de plus à la condition soulignée , comme on vérifie aisément. Ainsi, *un couple de foncteurs* (F, F_0) *ayant les propriétés envisagées dans ce numéro, s'identifie aussi à*

un objet de Ψ_0 qui est en même temps un $\mathcal{C}$-espace à $\mathcal{C}$-groupe d'opérateurs G, les opérations de G étant des Ψ-automorphismes. Cela précise du point de vue actuel la notion de fibré associé à un $\mathcal{C}$-fibré principal et une représentation de G par des automorphismes d'un ensemble-fibre A. On notera aussi que dans l'interprétation précédente de foncteurs (F, F_0) par des $\mathcal{C}$-espaces à opérateurs, les homomorphismes fonctoriel (permettant, comme on l'a dit, de construire des homomorphismes fonctoriels pour les fibrés associés à un même fibré) correspondent aux morphismes $A \longrightarrow B$, étant entendu que morphisme signifie morphisme pour la structure de $\mathcal{C}$-espaces à groupe d'opérateurs G, *et* pour la structure de type $_0$.

Un cas intéressant est celui où on prend pour Ψ_0 la catégorie des $\mathcal{C}$-groupes, pour Ψ la catégorie des groupes, et pour A le groupe G lui-même (donc $A \in \Psi_0$) opérant sur lui-même par représentation intérieure : $\mathrm{int}(g)g' = gg'g^{-1}$. On trouve donc, pour tout $\mathcal{C}$-fibré principal P à groupe structural G, un $\mathcal{C}$-fibré en groupes tous isomorphes à G, dont la fibre en $x \in X$ s'identifie d'ailleurs au groupe des permutations de la fibre P_x qui permutent aux opérations de G ; ce fibré en groupes est appelé le *fibré adjoint*. Il est défini chaque fois qu'on a un $\mathcal{C}$-fibré à groupe structural G (non nécessairement principal, car on peut commencer par passer au fibré principal associé). Ses $\mathcal{C}$-sections sur X s'identifient aux automorphismes de $\mathcal{C}$.

Bien entendu, le passage d'un fibré à groupe structural au fibré principal associé rentre aussi dans le cadre exposé dans ce numéro, pourvu que l'on soit sous les conditions de prop.14, permettant de ramener la notion de fibré à groupes structural aux notions du n° 9.

11bis. — Extension et restriction du groupes structural.

Dans tout ce numéro, $\mathcal{C}$ désigne une catégorie locale recollable. Soit G un $\mathcal{C}$-groupe , F un sous-$\mathcal{C}$-groupe fermé (i.e. un sous-ensemble fermé, muni d'une $\mathcal{C}$-structure induite, et qui est en même temps un sous-groupe, ce qui implique que F est lui-même un $\mathcal{C}$-groupe). Soit $\Phi_0(G)$ la catégorie des $\mathcal{C}$-espaces à $\mathcal{C}$-groupe d'opérateurs G à droite, $\Phi(G)$ la catégorie des ensembles à groupe d'opérateurs G à droite. On a $G \in \Phi_0(G)$, et d'autre part G, opérant sur $G \in \Phi(G)$ par translations à *gauche*, s'identifie à $\mathrm{Aut}_\Phi(G)$. Donc l'injection $i : F \longrightarrow G$ définit un homomorphisme $F \longrightarrow \mathrm{Aut}_\Phi(G)$. Donc cela permet, en vertu de n°10, pour tout $\mathcal{C}$-fibré principal P à $\mathcal{C}$-groupe structural F, de

construire le fibré principal P' à groupe structural G associé à P et i ; on dit que P' est déduit de P par *extension du $\mathcal{C}$-groupe structural F à G*. On va définir un morphisme fonctoriel

$$P \longrightarrow P' \tag{1}$$

compatible avec les opérations de F sur les deux membres (et bien sur avec les restrictions aux parties ouvertes de X). Pour ceci, soit Φ_0 la catégorie des $\mathcal{C}$-espaces à $\mathcal{C}$-groupes d'opérateurs à droite (groupes non précisés), Φ la catégorie des ensembles à groupes d'opérateurs à droite. Un morphisme $(E, G) \longrightarrow (E', G')$ dans Φ_0 est un *couple* (f, u) d'un $\mathcal{C}$-morphisme $f : E \longrightarrow E'$ et d'un morphisme $u : G \longrightarrow G'$ de $\mathcal{C}$-groupes tel que $f(x.g) = f(x).u(g)$ pour $x \in E$, $g \in G$, et on définit de façon analogue les morphismes dans Φ. Alors les deux membres de (1) peuvent être considérés comme des fibrés de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$ associés à P, et la représentation naturelle de F dans $\mathrm{Aut}_\Phi(F)$ resp. dans $\mathrm{Aut}_\Phi(G)$ par translations à gauche (où F et G sont considérés comme des éléments de Φ_0, leurs groupes d'opérateurs étant F resp. G). Le couple $(1, i)$, où 1 est l'application identique $F \longrightarrow F$, est un morphisme $F \longrightarrow G$ dans Φ_0 compatible avec les automorphismes définis par les éléments de F. En vertu des sorites du n° 11, ce morphisme définit donc bien un morphisme (1) pour les fibrés associés, succès brillant de l'axiomatique. Comme i est injectif, il en est de même de (1), d'après un des nombreux sorites oubliés. En fait, F étant un sous-ensemble fermé du $\mathcal{C}$-espace G, admettant une $\mathcal{C}$-structure induite, il en est de même de P considéré comme sous-ensemble de P' (re-sorite oublié, s'appuyant sur prop.7)

Inversement, partons d'un $\mathcal{C}$-fibré principal à $\mathcal{C}$-groupe structural G.

Définition 7 bis. — *Soit P_1 un $\mathcal{C}$-fibré principal à $\mathcal{C}$-groupe structural G. On appelle* restriction du groupe structural à F *tout $\mathcal{C}$-fibré à $\mathcal{C}$-groupe structural F, satisfaisant aux conditions suivantes : P est contenu dans P_1, et il existe un isomorphisme sur P_1 du $\mathcal{C}$-fibré principal P' déduit de P par extension du groupe structural à G, se réduisant à l'identité sur P.*

Une telle restriction existe donc si et seulement si P_1 est isomorphe à un $\mathcal{C}$-espace fibré principal obtenu par extension à G du groupe structural d'un $\mathcal{C}$-espace fibré principal à $\mathcal{C}$-groupe structural F. Ceci peut encore s'exprimer de la façon suivante. Soit $\mathcal{O}_X(G)$ le faisceau de groupes des germes de $\mathcal{C}$-morphismes de X dans G, définissons de même

$\mathcal{O}_X(F)$. L'homomorphisme d'injection $i : F \longrightarrow G$ définit un homomorphisme de faisceaux $\mathcal{O}_X(F) \longrightarrow \mathcal{O}_X(G)$, d'où une application

$$\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(F)) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(G))$$

Il est immédiat que, pour que P_1 admette une restriction du groupe structural à F, il faut et il suffit que sa classe $c(P_1) \in \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(G))$ soit dans l'image de $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(F))$ (compte tenu d'une compatibilité générale entre fibrés associés et images de classes de cohomologie, que nous avons oubliée au numéro précédent).

Nous allons donner une interprétation plus géométrique de la notion de restrictions du groupe structural. Notons d'abord qu'une telle restriction est bien déterminée quand on connait la partie P de P_1 qu'elle définit. En effet, il résulte de ce qu'on a vu que sa $\mathcal{C}$-structure est la $\mathcal{C}$-structure induite par P_1, sa projection sur X est induite par celle de P_1, et les opérations de F sur P sont induites pa par les opérations de F dans P_1. D'ailleurs, P est l'image réciproque, par l'application canonique $P_1 \longrightarrow P_1/F$, d'une partie $s(X)$, où s est une section de P_1/F (considéré comme fibré ensembliste sur X) sur X, bien déterminée par P. On est ainsi amené à examiner quelles sont les sections de P_1/F qui correspondent à une restriction de groupe structural. Je dis que *ce sont exactement celles qui, localement, sont images de $\mathcal{C}$-sections de P_1*. La nécessite est évidente, puisque on peut supposer alors que P_1 est le fibré P' déduit d'un fibré $P = X \times F$ par extension du groupe structural : alors $P_1 = X \times G$, et la section s est l'image canonique de la section de P_1 définie par l'application constante $x \longrightarrow e$ de X dans G, section qui est un $\mathcal{C}$-morphisme. Pour la suffisance, supposons d'abord que s provienne d'une section régulière s_1 de P_1, cette section définit un isomorphisme de P_1 avec $X \times G$, et identifiant P_1 à $X \times G$, on voit que s correspond à la partie $X \times F$ de $X \times G$, qui est bien une restriction du groupe structural. Si on suppose seulement que localement, s provient d'une $\mathcal{C}$-section de P_1, il en résulte d'abord que la partie P de P_1 correspondante à s admet une $\mathcal{C}$-structure induite (car son intersection avec les images inverses des ouverts U de X assez petits ont une structure induite, de sorte qu'on peut appliquer la prop.7). Munissons alors P de cette $\mathcal{C}$-structure induite, de la projection sur X induite par celle de P_1, enfin des opérations de F sur les fibres induites par les opérations de F dans P_1 : il est immédiat que P devient alors un $\mathcal{C}$-espace fibré principal à $\mathcal{C}$-groupe structural F, i.e. satisfait la condition LT de déf.4. On prouve aussi facilement que le $\mathcal{C}$-fibré P' déduit de P par extension du groupe structural à G s'identifie bien à P_1 ; on définit une bijection

canonique $P' \longrightarrow P_1$, compatible avec les projections sur X et les opérations de G, c'est d'ailleurs un $\mathcal{C}$-isomorphisme au-dessus des ouverts U de X assez petits, c'est donc un $\mathcal{C}$-isomorphisme, donc un isomorphisme pour les structures de $\mathcal{C}$-fibré principaux. Nous avons prouvé :

Proposition 15 bis. — *Supposons $\mathcal{C}$ recollable, et soit P_1 un $\mathcal{C}$-fibré principal à $\mathcal{C}$-groupe structural G. Les restrictions du groupe structural de P_1 à F correspondent biunivoquement aux sections du fibré ensembliste P_1/F sur X qui localement sont des images de sections $\mathcal{C}$-régulières de P_1.*

Supposons maintenant que le couple (F, G) satisfasse à la condition suivante :

(2) *Pour tout $Y \in \mathcal{C}$, $(Y \times G)/F$ est un $\mathcal{C}$-espace quotient de $Y \times G$ ($n°7$, déf.2) et s'identifie au produit $Y \times (G/F)$.*

Ce produit a un sens, puisque G/F est un $\mathcal{C}$-espace quotient de G, comme on voit en prenant Y réduit à un point).

Corollaire 1. — *Soient G un $\mathcal{C}$-groupe, F un sous-$\mathcal{C}$-groupe satisfaisant à la condition (2) ci-dessus, P_1 un $\mathcal{C}$-fibré principal à $\mathcal{C}$-groupe structural G, de base X. Alors P_1/F est un $\mathcal{C}$-espace quotient de P_1, et muni de la projection $P_1/F \longrightarrow X$ c'est un $\mathcal{C}$-espace fibré à fibre-type G/F. Les sections de P_1/F associées aux restrictions du groupe structural de P_1 à F sont des $\mathcal{C}$-sections.*

Soit p la projection de P_1 sur X. Il résulte immédiatement de (2) que pour tout ouvert $U \subset X$ assez petit, $p^{-1}(U)/F$ est un $\mathcal{C}$-espace quotient de $p^{-1}(U)$, isomorphe à $U \times (G/F)$ (isomorphisme compatible avec les projections naturelles sur U). En vertu de prop. 9 il en résulte que $Q = P_1/F$ est un $\mathcal{C}$-espace quotient de P_1. Il faut donc montrer que si $\mathcal{C}$ est parfaite ou semi-parfaite, Q est un $\mathcal{C}$-espace local *séparé*. Or on montre que $Q \times Q$ est un $\mathcal{C}$-espace quotient de $P_1 \times P_1$ par $F \times F$, tout d'abord si $P_1 = X \times G$ en utilisant (2) deux fois, et tenant compte de la transitivité des $\mathcal{C}$-espaces quotients, puis dans le cas général en utilisant prop. 9. En particulier la topologie de $Q \times Q$ est la topologie quotient de celle de $P_1 \times P_1$, et pour prouver que la diagonale Δ de $Q \times Q$ est fermée, il suffit de prouver que le graphe B de la relation d'équivalence définie par F dans P_1 est une partie fermée de $P_1 \times P_1$. Or si A est le graphe de la relation d'équivalence définie par G dans P_1, et si u est l'application de A dans G telle

que $(x, y) \in A$ implique $y = x.u(x, y)$, B est l'image réciproque de F par l'application u. Notre assertion résulte alors du lemme suivant, dont la démonstration est facile et laissée au lecteur :

Lemme 1. — *Soit P_1 un $\mathcal{C}$-fibré principal à $\mathcal{C}$-groupe structural G, base X. Soient A le graphe de la relation d'équivalence définie par G dans P_1, u l'application de A dans G telle que $(x, y) \in A$ implique $y = x.u(x, y)$. Alors u est un $\mathcal{C}$-morphisme, et pour que X soit séparé, il faut et il suffit que A soit fermé.*

Cela achève de prouver que, sous les conditions du corollaire 1, P_1/F est un $\mathcal{C}$-espace quotient de P_1. La démonstration montre en même temps que c'est un $\mathcal{C}$-espace fibré sur X (et même un $\mathcal{C}$-espace fibré à $\mathcal{C}$-groupe structural G, pourvu que G opère fidèlement dans G/F). Le fait que les sections de ce fibré associées aux restrictions du groupe structural sont des $\mathcal{C}$-sections résulte alors immédiatement de prop. 15 bis.

Corollaire 2. — *Soient G un $\mathcal{C}$-groupe , F un sous-$\mathcal{C}$-groupe tel que G fibré par F (opérant à droite) soit localement trivial (n° 10 définition 7). Soit P_1 un $\mathcal{C}$-fibré principal à $\mathcal{C}$-groupe structural G. Alors P_1/F est un $\mathcal{C}$-espace quotient de P_1 et un $\mathcal{C}$-espace fibré sur X, à fibre-type G/F, dont les $\mathcal{C}$-sections correspondent biunivoquement aux restrictions du groupe structural G de P_1 à F.*

Tout d'abord, l'hypothèse faite sur le couple (F, G) implique l'hypothèse (2) du corollaire 1, en vertu de n° 7, cor. à prop. 11. On peut donc appliquer le dit corolaire 1, de sorte qu'il reste seulement à montrer que *toute* $\mathcal{C}$-section de P_1/F sur X correspond à une restriction du groupe structural à F, i.e. (prop. 15 bis) est localement l'image d'une $\mathcal{C}$-section de P_1. Or on peut supposer pour ceci que $P_1 = X \times G$, donc $P_1/F = X \times (G/F)$, de sorte qu'une $\mathcal{C}$-section de P_1/F s'identifie à un $\mathcal{C}$-morphisme f de X dans G/F. Comme G est un $\mathcal{C}$-fibré, sur G/F, on voit aussitôt que f provient, localement, d'un $\mathcal{C}$-morphisme de X dans G, ce qui prouve notre assertion.

Remarque. — La condition (2) est toujours vérifiée quand $\mathcal{C}$ est la catégorie des ensembles algébriques sur un corps de définition k, mais en général, dans cette catégorie, il ne sera pas vrai que G fibré par F soit localement trivial, et le corollaire 2 ne sera plus valable.

Exemple. — $G = \underline{k}^*$, F sous-groupe fini de G non réduit à e, $X = G/F$, $P_1 = X \times$

G d'où $P_1/F = X \times (G/F)$, s la section de P_1/F définie par l'application identique de X sur G/F ; cette section provient localement d'une section $\mathcal{C}$-régulière de P_1 si et seulement si G fibré par F est localement trivial, ce qui n'est pas le cas ici. (On notera que le raisonnement qu'on vient de faire prouve une réciproque du corollaire 2, qui mérite de figurer dans son énoncé).

Enfin, il faut aussi définir la notion d'extension et restriction du groupe structural dans des espaces fibrés à fibre *fixée*, F où G opère fidèlement. Le rédacteur en laisse le soin à son successeur, et ne s'en permettra pas moins d'utiliser dans la suite cette notion.

12. — Sections de $\mathcal{C}$-fibrés.

Pour la notion de $\mathcal{C}$-section, voir définition 3, n° 7. Pour ne pas s'exposer à d'innombrables confusions, nous n'avons pas cru devoir adopter la suggestion de dire "section" au lieu de "$\mathcal{C}$-section", car quand il y a dix structures différentes sur un fibré (i.e. dix catégories $\mathcal{C}$ différentes) il y a ambiguïté décuple ; mais on pourra convenir qu'on se permet, par abus de langage, de dire simplement "section" quand aucune confusion ne pourra en résulter. L'ensemble des $\mathcal{C}$-sections d'un $\mathcal{C}$-fibré (ou simplement d'un $\mathcal{C}$-morphisme $f : E \longrightarrow X$) est un foncteur contravariant par rapport à ce fibré, dont les propriétés d'exactitude (à gauche) doivent être explicitées. Les diverses lois de composition sur les fibres passent aux ensembles de sections, et sont respectées par le foncteur précédent. Sorites sur les restrictions de sections.

Soit P un $\mathcal{C}$-fibré principal à droite sur X, de groupe G, et soit F un $\mathcal{C}$-espace à groupe d'opérateurs G à gauche, soit enfin E le $\mathcal{C}$-fibré à groupe structural G associé à P et F. Alors les $\mathcal{C}$-sections de E s'identifient aux $\mathcal{C}$-morphismes f de P dans F, tels que $f(e \cdot g) = g^{-1} \cdot f(e)$ pour $e \in E, g \in G$. Cette identification est compatible avec les lois de composition résultant des lois de composition sur F, et est bien entendu fonctorielle.

13. — Images réciproques de $\mathcal{C}$-fibrés.

(Si dans la notion de catégorie locale, on impose la donnée d'une notion d'image réciproque, il faudra incorporer ce numéro au numéro 9, où on a dit que les fibrés de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$ forment une catégorie locale).

Comme au numéro précédent, nous supposons la catégorie $\mathcal{C}$ recollable, et nous supposons données des catégories Φ, Φ_0 donnant lieu à un diagramme fonctoriel, et permettant donc de définir la catégorie locale des fibrés de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$.

Proposition 15. — *Sous les conditions précédentes, soit $E = (E, p, X)$ un fibré de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$, et soit $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme de $\mathcal{C}$-espaces. Soit E' la partie de $X' \times E$ formée des (x', e) avec $f(x') = p(e)$. Alors E' admet une $\mathcal{C}$-structure induite, et si on considère le morphisme $p' : E' \longrightarrow X'$ induit par la projection $X' \times E \longrightarrow X'$, et sur les fibres ${p'}^{-1}(x')$ les structures de type Φ déduites par transport de structure des structures sur les $p^{-1}(f(x'))$, E' devient un fibré de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$.*

Utilisant les propositions de localisation 7 et 14, on est ramené au cas où E est un produit $X \times F$ ($F \in \Phi_0$). Alors E' s'identifie en tant qu'ensemble à $X' \times F$, montrons que la $\mathcal{C}$-structure produit est une $\mathcal{C}$-structure induite par $X' \times E = X' \times X \times F$: en effet, l'application d'injection $(x', e) \longrightarrow (x', f(x'), e)$ est un $\mathcal{C}$-morphisme, et l'application $(x', x, e) \longrightarrow (x', e)$ est un $\mathcal{C}$-morphisme inverse à gauche, d'où notre assertion. Les autres assertions sont alors triviales.

$\xi' = (E', p', X')$ est appelé le fibré de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$ *image réciproque* de ξ, et sera parfois noté $f^{-1}(\xi)$. On aurait pu aussi commencer par définir le *fibré produit* $X' \times E$ sur $X' \times X$, et prendre le *fibré induit* par ce dernier sur l'image de l'injection $X' \longrightarrow X' \times X$, de composantes $1_{X'}$ et f. Il convient de prouver les propriétés formelles usuelles de la notion d'image réciproque (cf. Top. Elém. chap. I), notamment le fait que l'*image réciproque $f^{-1}(\xi)$ est un foncteur en ξ, et la transitivité des images réciproques*. Enfin, une *propriété de commutativité de l'opération image réciproque, et de l'opération "fibré associé"* étudiées au numéro précédent. La donnée d'un morphisme de fibrés $\xi = (E, p, X) \longrightarrow \xi' = (E', p', X')$, correspondant à un $\mathcal{C}$-morphisme donné $f : X \longrightarrow X'$, est équivalente à la donnée d'un morphisme à *base fixée* de ξ dans $f^{-1}(\xi')$; prenant $E = X$, $p =$ identité, on trouve la condition usuelle de relèvement d'un $\mathcal{C}$-morphisme $f : X \longrightarrow X'$ dans la base d'un $\mathcal{C}$-fibré E', à savoir que le fibré image réciproque admette une $\mathcal{C}$-section.

Soient encore $\xi = (E, p, X)$ un fibré de type $(\mathcal{C}, \Phi, \Phi_0)$, $f : X' \longrightarrow X$ un $\mathcal{C}$-morphisme, $\xi' = (E', p', X')$ le fibré image réciproque de ξ par f. Alors toute section ensembliste de E donne par image réciproque une section ensembliste de E', et on constate aussitôt que $\mathcal{C}$-sections sont transformées en $\mathcal{C}$-sections. (Seule la structure de $\mathcal{C}$-

fibrés est intervenue). L'application ainsi obtenue est un homomorphisme de foncteurs par rapport à ξ.

14. — Catégories de modèles.

Soit $\mathcal{M}$ une catégorie, munie d'un foncteur $i_{\mathcal{M}}$ (noté aussi i pour abréger, s'il ne peut en résulter de confusion) covariant à valeurs dans la catégorie $\mathcal{C}$ des espaces topologiques. Nous allons montrer comment on peut lui associer une catégorie prétopologique, notée $\hat{\mathcal{M}}$, par une construction généralisant celle du n° 2. Pour simplifier, nous allons cependant supposer que les conditions suivantes sont satisfaites (qui correspondent à CT 1 à CT 4)

M 1) *Le foncteur $i_{\mathcal{M}}$ est fidèle.*

Nous dirons alors qu'un $\mathcal{M}$-morphisme $M \longrightarrow N$ est un *$\mathcal{M}$-isomorphisme*, si la $\mathcal{M}$-structure de M est une structure initiale pour l'application f, i.e. si pour tout $P \in \mathcal{M}$, et toute application g de P dans M, g est un $\mathcal{M}$-morphisme si et seulement si fg l'est. — Appelons *modèles* les éléments de $\mathcal{M}$.

M 2) *Tout modèle M admet une base d'ouverts de la forme $f(N)$, où f est un $\mathcal{M}$-isomorphisme d'un modèle N dans M.*

M 3) *Un $\mathcal{M}$-isomorphisme, d'un modèle M dans un modèle N, dont l'image est ouverte, est une application ouverte.*

M 4) *Soient f une application d'un modèle M dans un autre N, (f_i) une famille de $\mathcal{M}$-isomorphismes de modèles M_i dans M. On suppose que les $f_i(M_i)$ sont des ouverts recouvrant M, et que les $f f_i$ sont des $\mathcal{M}$-morphismes. Alors f est un $\mathcal{M}$-morphisme.*

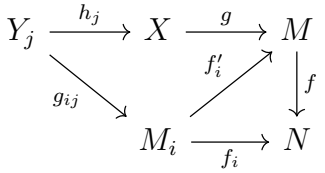
Une catégorie $\mathcal{M}$, munie d'un foncteur $i = i_{\mathcal{M}}$ à valeurs dans $\mathcal{C}$, et satisfaisant aux conditions *M 1)* à *M 4)* précédentes est dite une *catégorie de modèles*. Par exemple, une catégorie prélocale est évidemment une catégorie de modèles. Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ sont des catégories de modèles, on dit que $\mathcal{M}'$ est une *sous-catégorie de modèles* de $\mathcal{M}$ si la classe $\mathcal{M}'$ est contenue dans la classe $\mathcal{M}$, si les $\mathcal{M}'$-morphismes entre deux objets $M, N \in \mathcal{M}'$ sont identiques aux $\mathcal{M}$-morphismes, la loi de composition de $\mathcal{M}'$-morphismes étant celle des $\mathcal{M}$-morphismes (i.e. $\mathcal{M}'$ est une sous-catégorie de $\mathcal{M}$), si le foncteur $i_{\mathcal{M}'}$ est induit par $i_{\mathcal{M}}$, et si enfin la condition suivante est satisfaite :

Si M, N sont dans $\mathcal{M}'$ et si $f : M \longrightarrow N$ est un $\mathcal{M}$-isomorphisme de M dans N, tel que $f(M)$ soit une partie ouverte, alors f est même un $\mathcal{M}'$-isomorphisme.

Proposition 16. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de modèles, et soit $\mathcal{M}$ une classe contenue dans $\mathcal{C}$. Pour que ce soit une sous-catégorie de modèles, il faut et il suffit que $\mathcal{M}$ satisfasse la condition suivante :*

M' 2) Tout $M \in \mathcal{M}$, admet une base d'ouverts de la forme $f(N)$, où f est un $\mathcal{C}$-isomorphisme d'un $N \in \mathcal{M}$ dans M.

La condition est évidemment nécessaire. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit manifestement de prouver que, si $f : M \longrightarrow N$ est un $\mathcal{M}$-isomorphisme tel que $f(M)$ soit une partie ouverte de N, alors f est de même un $\mathcal{C}$-isomorphisme de M dans N. (Bien entendu, on met dans $\mathcal{M}$ la structure de catégorie avec foncteur fondamental induits par $\mathcal{C}$). Alors les axiomes *M 1)* à *M 4)* pour $\mathcal{M}$ résultent trivialement de ces mêmes axiomes pour $\mathcal{C}$, donc $\mathcal{M}$ sera une catégorie de modèles, et même une sous-catégorie de $\mathcal{C}$. Nous devons donc prouver, avec les notations ci-dessus : si $X \in \mathcal{C}$ et si g est une application de X dans M telle que fg est un $\mathcal{C}$-morphisme, alors g est un $\mathcal{C}$-morphisme. Or, $f(M)$ étant ouvert, il résulte de M' 2) que $f(M)$ est la réunion d'ouverts de la forme $f_i(M_i)$, où $M_i \in \mathcal{M}$ et où les f_i sont des *$\mathcal{C}$-isomorphismes* des M_i dans N. Comme fg est continue (étant un $\mathcal{C}$-morphisme), les images réciproques X_i des $f_i(M_i)$ par fg sont des parties ouvertes de X. D'après l'axiome *M 2)* sur $\mathcal{C}$, X_i est donc la réunion de parties ouvertes de la forme $h_j(Y_j)$, où h_j est un $\mathcal{C}$-isomorphisme de Y_j dans X. D'après M 4) pour $\mathcal{C}$, il suffit de prouver que les gh_j sont des $\mathcal{C}$-morphismes. Soit f'_i l'application de M_i dans M définie par $ff'_i = f_i$, comme f est un $\mathcal{M}$-isomorphisme (dans), et ff'_i un $\mathcal{M}$-morphisme, f'_i est un $\mathcal{M}$-morphisme, i.e. un $\mathcal{C}$-morphisme. De plus, on a par construction, $gh_j = f'_i h_{ij}$ pour une application g_{ij} convenable de Y_j dans M_i.



Il suffit donc de prouver que les g_{ij} sont des $\mathcal{C}$-morphismes ou encore, puisque les f_i sont des $\mathcal{C}$-isomorphismes, que $f_i g_{ij}$ est un $\mathcal{C}$-morphisme. Or $f_i g_{ij} = (fg)h_j$, donc est bien un $\mathcal{C}$-morphisme.

D'autres axiomes utiles sur les catégories de modèles sont les suivants, qui généralisent les axiomes de même numéro pour les catégories locales :

M 5) *Pour deux modèles M, N, il existe un modèle P tel que $l(P) = M \times N$ et pour lequel la $\mathcal{M}$-structure sur $M \times N$ soit la structure produit des $\mathcal{M}$-structures des facteurs.*

(Bien entendu ce P est alors unique). On dit que $\mathcal{M}$ est une catégorie de modèles multiplicative. Une sous-catégorie de modèles de $\mathcal{M}$ est dite *sous-catégorie multiplicative de modèles* si elle est stable sous l'opération $M \times N$.

M 6) *$\mathcal{M}$ est une catégorie de modèles avec produits, et pour tout modèle M, la diagonale de $M \times M$ est fermée.* (Alors $\mathcal{M}$ est dite séparée).

M 7) *Pour tout modèle M et tout ouvert $U \subset M$, U est réunion finie d'ouverts de la forme $f(N)$, où f est un $\mathcal{M}$-isomorphisme de N dans M.*

15. — Catégorie topologique définie par une catégorie de modèles.

Théorème 1. — *Soit $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles. Alors on peut trouver une catégorie prétopologique sursaturée $\hat{\mathcal{M}}$, telle que $\mathcal{M}$ en soit une sous-catégorie de modèles, et que tout $X \in \hat{\mathcal{M}}$ admette une base d'ouverts isomorphes à des modèles $M \in \mathcal{M}$. $\hat{\mathcal{M}}$ est déterminé à un isomorphisme unique près, se réduisant à l'identité sur $\mathcal{M}$. Si $\mathcal{M}$ satisfait à l'axiome M 5), alors $\hat{\mathcal{M}}$ satisfait à l'axiome CT 5) i.e. est une catégorie topologique, et $\mathcal{M}$ en est une sous-catégorie* multiplicative *de modèles.*

Il s'ensuit facilement compte tenu de prop.5 :

Corollaire 1. — *Si $\mathcal{M}$ est une catégorie multiplicative de modèles séparés alors $\mathcal{C}(\mathcal{M}) = \hat{\mathcal{M}}^s$ est une catégorie locale* parfaite *(dite associée à $\mathcal{M}$), dont $\mathcal{M}$ est une sous-catégorie multiplicative de modèles.*

De plus, on vérifie aussitôt :

Corollaire 2. — *Sous les conditions du corollaire précédent, supposons la condition M 7)bis) vérifiée. Alors les $X \in \mathcal{C}(\mathcal{M})$ qui sont réunions finies de modèles forment une sous-catégorie multiplicative semi-parfaite de $\mathcal{C}(\mathcal{M})$ contenant $\mathcal{M}$ (dite* associée *à $\mathcal{M}$)*

Remarques. — La prop.6 montre que les axiomes *M 1)* à *M 4)* sont aussi nécessaires pour la validité du théorème 1. La démonstration du théorème 1, notamment de la première assertion, esquissée ci-dessus, est assez pénible. On notera qu'elle devient triviale si on sait déjà que $\mathcal{M}$ est une sous-catégorie de modèles d'une catégorie prétopologique $\mathcal{C}$; ce sera le cas dans toutes les applications raisonnables auxquelles le rédacteur peut penser en ce moment, mais il semblerait antibourbachique de trainer cette hypothèse superflue.

Démonstration du théorème 1. — Soit X un espace topologique. On appelle $\mathcal{M}$-*carte*, de X ou simplement carte, un homéomorphisme f de U sur un modèle M. (N.B. dans la suite de ce numéro nous réserverons le nom de "modèle" aux éléments de $\mathcal{M}$). U est dit l'ouvert de la carte, K le modèle de la carte. Deux cartes $f : U \longrightarrow K$ et $g : V \longrightarrow N$ de X seront dites *compatibles* si pour toute application continue h d'un modèle P dans $U \cap V$, la relation "fh est un $\mathcal{M}$-morphisme" est équivalente à la relation "gh est un $\mathcal{M}$-morphisme". Un ensemble (f_i) de cartes $f_i : U_i \longrightarrow M_i$ de X est dite un $\mathcal{M}$-atlas, ou simplement un atlas, si les U_i recouvrent X, et si ces cartes sont deux à deux compatibles. On a alors :

Proposition 17. — *Soit (f_i, U_i, M_i) un $\mathcal{M}$-atlas. Si deux cartes sont compatibles avec chacune des f_i, elles sont compatibles entre elles.*

Ceci résultera évidemment du résultat suivant :

Lemme. — *Considérons une carte $f : U \longrightarrow M$ compatible avec les cartes f_i. Soit $g : P \longrightarrow U$ une application continue d'un modèle P dans U. Pour tout i, soit P_i la partie ouverte $g^{-1}(U_i)$ de P, et soit (h_{ij}) une famille de $\mathcal{M}$-isomorphismes h_{ij} de modèles P_{ij} dans P, tels que les $h_{ij}(P_{ij})$ forment un recouvrement ouvert de P_i. (Une telle famille existe d'après l'axiome M 2)). Alors les $f_i g h_{ij} : P_{ij} \longrightarrow M_i$ sont définis. Pour que fg soit un $\mathcal{M}$-morphisme, il faut et il suffit que les $f_i g h_{ij}$ le soient.*

En vertu de l'axiome *M 4)*, fg est un $\mathcal{M}$-morphisme si et seulement si les fgh_{ij} le sont. Or, puisque $\mathrm{Im}(gh_{ij}) \subset U \cap U_i$, et que les cartes f et f_i sont compatibles, $f(gh_{ij})$ est un $\mathcal{M}$-morphisme si et seulement si $f_i(gh_{ij})$ l'est. D'où la conclusion).

Corollaire à la Proposition 17. — *Supposons que $\mathcal{M}$ soit un* ensemble*. Alors tout atlas d'un espace X est contenu dans un atlas* maximal *unique.*

Il suffit de prendre l'ensemble de toutes les cartes de X compatibles avec toutes les

cartes de l'atlas donné.

Corollaire 2. — *Considérons la relation entre des atlas A et A' de X : "toute carte élément de A est compatible avec toute carte élément de A' C'est là une relation d'équivalence.*

En effet, si (A, A') et (A', A'') satisfont la relation, alors en vertu de proposition 8 appliquée à l'atlas A', une carte de A et une carte de A'', toute carte de A est équivalente à toute carte de A''.

On a envie de définir une $\mathcal{M}$-structure locale sur X comme étant un atlas maximal, mais cela suppose pratiquement que $\mathcal{M}$ est un ensemble, et il serait cucu de se borner à ce cas. Aussi choisira-t-on, au moyen du symbole de Hilbert, un représentant dans chaque "classe d'équivalence" d'atlas sur X, (ce n'est pas beau, mais on a l'habitude) ; c'est ça une $\mathcal{M}$-structure locale. La classe des espaces X munis d'une $\mathcal{M}$-structure locale (ou $\mathcal{M}$-espaces locaux) sera notée $\hat{\mathcal{M}}$. On va en faire une catégorie.

Tout d'abord, soit X un espace muni d'un atlas (f_i, U_i, M_i), considérons comme dans le lemme une application continue g d'un modèle P dans X, et définissons les P_{ij}, h_{ij} comme dans le lemme. Je dis que la condition : "les $f_i g h_{ij}$ sont des $\mathcal{M}$-morphismes" est indépendante du choix des h_{ij}, et ne change pas si on remplace l'atlas donné par un atlas équivalent. Montrons en effet d'abord qu'elle équivaut à la condition suivante, plus forte en apparence :

(M) *pour tout i et tout $\mathcal{M}$-morphisme $h : P' \longrightarrow P$, tel que $gh(P') \subset U_i$, l'application $f_i g h$ de P' dans M_i est un $\mathcal{M}$-morphisme.*

Il suffit de montrer qu'elle l'implique . Or en vertu de *M 2)*, P' est réunion d'ensembles ouverts de la forme $h'(P'')$, où h' est un $\mathcal{M}$-isomorphisme de P'' dans P' tel que $hh'(P'')$ soit contenu dans un des $h_{ij}(P_{ij})$, et en vertu de *M 4)* il suffit de montrer que chaque $(f_i g h)h'$ est un $\mathcal{M}$-morphisme. Or $f_i g h h' = (f_i g)(hh')$, et $hh' = h_{ij}h''$ où h'' est une application de P'' dans P_{ij}. Comme h_{ij} est un $\mathcal{M}$-isomorphisme et $h_{ij}h''$ un $\mathcal{M}$-morphisme, h'' est un $\mathcal{M}$-morphisme. Il vient alors $f_i g h h' = (f_i g h_{ij})h''$, qui est un $\mathcal{M}$-morphisme puisque $f_i g h_{ij}$ en est un par hypothèse, ainsi que h''. La condition (M) ci-dessus contient encore l'atlas donné, montrons qu'elle ne change pas cependant si on remplace celui-ci par un atlas équivalent (U'_j, f'_j, M'_j). En effet, comme les $U_i \cap U'_j$ forment un recouvrement ouvert de X, il résulte de la condition *M 2)* que P est réunion d'ouverts de la forme $h(P')$, où h est un $\mathcal{M}$-isomorphisme de P' dans P tel que

$gh(P')$ soit contenu dans un des $U_i \cap U'_j$. Comme f_i et f'_j sont compatibles, il revient au même de dire que $f_i(gh)$ soit un $\mathcal{M}$-morphisme, ou que $f'_j(gh)$ en soit un, d'où notre assertion. Nous dirons alors simplement que g est un morphisme, si la condition (M) énoncée plus haut est vérifiée pour un atlas définissant la structure de X.

Soient maintenant X et Y deux $\mathcal{M}$-espaces locaux, f une application de X dans Y. Nous dirons que f est un morphisme, si quel que soit le morphisme g d'un modèle P dans X, fg est un morphisme au sens de la définition qui précède. (Il n'y a pas lieu de comparer ici ces trois notions de morphismes, définis dans des situations disjointes). Il est trivial qu'avec cette notion de morphisme, $\hat{\mathcal{M}}$ devient une catégorie, de plus $\hat{\mathcal{M}}$ est muni d'un foncteur évident, noté i, à valeurs dans la catégorie $\mathcal{T}$ des espaces topologiques. Les axiomes CT 1) et CT 2) sont trivialement vérifiés. Vérifions *CT 3)*. Soit X un $\mathcal{M}$-espace local, U une partie ouverte de X, montrons qu'on peut trouver un atlas définissant la structure de X tel que U soit réunion d'ouverts de cartes de cet atlas. Cela signifie qu'on a le

Lemme 2. — *Les ouverts de X qui sont des ouverts de cartes de X (compatibles avec sa structure de $\mathcal{M}$-espace local) forment une base de la topologie de X.*

Pour ceci, il suffit de montrer que si U est l'ouvert d'une carte $f : U \longrightarrow M$ de X (par quoi on sous-entend toujours : compatible avec la structure donnée sur X), les ouverts de cartes contenus dans U forment une base de la topologie de U. Pour ceci on applique l'axiome *M 2)* à M, et on utilise, pour les $\mathcal{M}$-isomorphismes $g_i : N_i \longrightarrow M$ obtenus, l'axiome *M 3)* : les ouverts $f^{-1}(g_i(N_i))$ forment une base de la topologie de U, et sont les ouverts des cartes $g_i^{-1} f$.

Ainsi tout ouvert U de X est réunion des ouverts de cartes de X dedans contenus, on obtient ainsi des atlas de U, évidemment tous équivalents, d'où une $\mathcal{M}$-structure locale sur U, montrons que c'est là une structure induite : ceci signifie en effet que pour toute application continue g d'un *modèle* P dans U, il revient au même de dire qu'elle est un morphisme de M dans X ou de M dans U ; et cela résulte aussitôt de la définition. La condition *CT 4)* se vérifie aussi immédiatement. Ainsi $\hat{\mathcal{M}}$ est une catégorie prélocale, et on a fait ce qu'il fallait pour qu'elle soye saturée.

Si M est un modèle, il admet un atlas des plus naturels, réduit à l'application identique. Il définit donc etc.. Le rédacteur, qui en a marre de faire le travail des autres, refuse de faire trotter l'âne plus longtemps sur cet air de bombinage. D'ailleurs, le théorème

peut certainement se déduire d'un théorème plus général, où intervient un foncteur *non* fidèle, et qu'il faudra donner, qui permettra aussi de construire des catégories diverses comme des catégories de variétés arithmétiques (tels les schémas de Chevalley) des catégories de fibrés etc.. à partir de petits morceaux. Le théorème 2 du numéro suivant doit aussi se généraliser dans cette direction.

16. — Foncteurs topologiques.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories prétopologiques. Un foncteur covariant F de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est dit un *foncteur topologique* s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

FT 1) *Si $f : U \to X$ est un $\mathcal{C}$-isomorphisme de U sur un ouvert de X, alors $F(f) : F(U) \to F(X)$ est un $\mathcal{C}'$-isomorphisme de $F(U)$ sur un ouvert de $F(X)$.*

Si donc U est un ouvert de $X \in \mathcal{C}$, nous pourrons identifier $F(U)$ à un ouvert de $F(X)$ (avec la structure induite).

FT 2) *Si $X \in \mathcal{C}$ et si U, V, U_i sont des ouverts de X, on a $F(U \cap V) = F(U) \cap F(V)$, $F(\bigcup U_i) = \bigcup F(U_i)$.*

On dit que F est *multiplicatif*, si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des catégories topologiques, et si F satisfait à l'axiome supplémentaire :

FT 3) *Si $X, Y \in \mathcal{C}$, l'application naturelle $F(X \times Y) \to F(X) \times F(Y)$ est un $\mathcal{C}'$-isomorphisme de $F(X \times Y)$ sur $F(X) \times F(Y)$.*

On dit que F est un *foncteur local* s'il satisfait à *FT 1)* et à

FT) *On a $i_{\mathcal{C}'} F = i_{\mathcal{C}}$ (identité fonctorielle)*

Alors la condition *FT 2)* est trivialement satisfaite, donc un foncteur local est un foncteur topologique. Exemple de foncteur local : le foncteur d'injection d'une sous-catégorie prélocale de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}'$.

Soit $\mathcal{M}$ une classe contenue dans $\mathcal{C}$ et telle que tout $X \in \mathcal{C}$ admette une base d'ouverts isomorphes à des éléments de $\mathcal{M}$ (appelés *modèles*) : $\mathcal{M}$ est donc une catégorie de modèles (prop.16) et $\hat{\mathcal{C}}$ s'identifie à $\hat{\mathcal{M}}$ (résulte de l'assertion d'unicité dans le théorème 1, qui est d'ailleurs à peu près triviale). Nous dirons aussi que $\mathcal{M}$ est une catégorie de modèles engendrant $\mathcal{C}$. Si F est un foncteur topologique de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, sa restriction à $\mathcal{M}$ satisfait manifestement aux conditions suivantes :

FTM 1) *Si $f : M \longrightarrow N$ est un $\mathcal{M}$-isomorphisme d'un modèle sur une partie ouverte d'un autre, alors $F(f)$ est un isomorphisme de $F(M)$ sur une partie ouverte de $F(N)$.*

FTM 2) *Soient $f' : M' \longrightarrow M$, $f'' : M'' \longrightarrow M$, $f_i : M_i \longrightarrow M$ des $\mathcal{M}$-isomorphismes de modèles sur des parties ouvertes de M, tels que $\bigcup_i f_i(M_i) \supset f'(M') \cap f''(M'')$. Alors $\bigcup_i F(f_i)(F(M_i)) \supset F(f')(F(M')) \cap F(f'')(F(M''))$.*

De plus, si F est multiplicatif, on a :

FTM 3) *Si M et N sont deux modèles, l'application naturelle $F(M \times N) \longrightarrow F(M) \times F(N)$ est un $\mathcal{C}'$-isomorphisme.*

Si F est un foncteur local, on a :

FTM $i_{\mathcal{C}'}F = Fi_{\mathcal{M}}$, *(identité fonctorielle sur $\mathcal{M}$).*

Théorème 2. — *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prétopologique, $\mathcal{M}$ une catégorie de modèles engendrant $\mathcal{C}$, F un foncteur de $\mathcal{M}$ dans une catégorie prétopologique sursaturée $\mathcal{C}'$. Si F satisfait aux conditions FTM 1) et FTM 2), il existe un foncteur prétopologique $\hat{F}$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ dont la restriction à $\mathcal{M}$ soit F. Si F est multiplicatif (i.e. satisfait à FTM 3)) il en est de même de $\hat{F}$. Si $\hat{F}'$ satisfait à la même condition que $\hat{F}$, il existe un isomorphisme unique de $\hat{F}$ sur $\hat{F}'$ se réduisant à l'identité sur F.*

La démonstration ressemble comme un frère, en moins long, à celle du théorème 1, aussi ne la donnerons nous pas. Il faut encore regarder à quelle condition $\hat{F}$ transforme des $\mathcal{C}$-espaces séparés en $\mathcal{C}'$-espaces séparés. On montre facilement qu'il suffit de le vérifier pour les $\mathcal{C}$-espaces séparés qui sont réunions de *deux* ouverts isomorphes à des modèles. Voici un cas important où on peut se dispenser de faire la vérification.

Corollaire 1. — *Si F satisfait à FLM, alors on peut trouver un $\hat{F}$ qui soit un foncteur local. Plus généralement, supposons donné un homomorphisme fonctoriel $i_{\mathcal{M}} \longrightarrow i_{\mathcal{C}'}F$ tel que pour tout modèle M, l'application continue $M \longrightarrow F(M)$ soit bijective, Si F est multiplicatif, alors $\hat{F}$ transforme $\mathcal{C}$-espaces séparés en $\mathcal{C}'$-espaces séparés. Dans ce cas, la condition du th. 2 reste valable si on suppose $\mathcal{C}$ séparée et $\mathcal{C}'$ parfaite.*

En effet, l'homomorphisme fonctoriel donné définit un homomorphisme fonctoriel analogue relatif à $\hat{F}$, permettant d'identifier les ensembles X et $\hat{F}(X)$, la topologie de X

étant moins fine. Par suite, si la diagonale de $X \times X$ est fermée pour la topologie de $X \times X$, elle l'est à fortiori pour celle de $\hat{F}(X) \times \hat{F}(X) = \hat{F}(X \times X)$.

Corollaire 2. — *Pour un foncteur variable F de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{C}'$ satisfaisant aux conditions FTM 1) et FTM 2), $\hat{F}$ est un "foncteur" en F, et de façon précise : tout homomorphisme du foncteur F dans un foncteur analogue G se prolonge de façon* unique *en un homomorphisme de $\hat{F}$ en $\hat{G}$.*

La démonstration directe à partir du théorème 2 ne semble pas bien longue. Mais on aimerait bien avoir une fois pour toutes des énoncés qui permettent de voir que certains termes sont des "foncteurs" par rapport à certaines lettres, et qui se substitueraient avantageusement aux énoncés géométriqués de Ens, 1 éd., chap. 4, Appendice.

Corollaire 3 (transitivité). — *$\hat{GF} = \hat{G}\hat{F}$, si F prend ses valeurs dans une sous-catégorie de modèles $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{C}'$ engendrant $\mathcal{C}'$, et si G est un foncteur, analogue à F, défini sur $\mathcal{M}'$.*

Corollaire 4. — *Si $\mathcal{M}$ est une sous-catégorie de modèles de $\mathcal{C}'$ (cf. prop. 16), et si F est le foncteur d'injection de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{C}'$, alors F identifie $\mathcal{C}$ à une sous-catégorie prétopologique de $\mathcal{C}'$, et même à une sous-catégorie topologique si $\mathcal{M}$ est une sous-catégorie* multiplicative *de modèles dans $\mathcal{C}'$.*

La démonstration directe de ce corollaire est d'ailleurs à peu près triviale (voir remarque après le th. 1)

§ II. — CATÉGORIES DE VARIÉTÉS

1. — Espaces K-annelés.

Définition 1. — *Soit K un anneau avec unité. On appelle* espace K-annelé *un espace topologique X muni d'un sous-faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ du faisceau des germes d'applications de X dans K, contenant les germes unité.*

$\mathcal{O}_X$ est appelé le *faisceau fondamental* de X. En vertu des définitions relatives aux faisceaux, la donnée d'une structure K-annelée sur X équivaut à la donnée, pour tout ouvert $U \subset X$, d'un sous-anneau $\mathcal{O}_X(U)$ de l'anneau des applications de U dans K, contenant l'unité, de telle façon que les conditions suivantes soient satisfaites : (i) si V est un ouvert contenu dans U, la restriction à V de toute $f \in \mathcal{O}_X(U)$ est dans $\mathcal{O}_X(V)$; (ii) si inversement f est une application de U dans K, et si tout point de U admet un voisinage ouvert V tel que la restriction de f à V soit dans $\mathcal{O}_X(V)$, alors f est dans $\mathcal{O}_X(U)$. — Les fonctions dans $\mathcal{O}(U)$ sont appelées *fonctions régulières* sur l'ouvert U de l'espace K-annelé X.

Définition 2. — *Soient X, Y deux espaces K-annelés. On appelle morphisme d'espaces K-annelés de X dans Y, une application continue f de X dans Y telle que pour toute fonction régulière g sur une partie ouverte V de Y, la fonction gf sur $f^{-1}(V)$ soit régulière.*

Si X, Y, Z sont trois espaces K-annelés, $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ des morphismes d'espaces K-annelés, alors gf est un morphisme de X dans Z. Par suite, les espaces K-annelés forment une *catégorie*, et le foncteur i sur cette dernière,

qui attache à tout espace K-annelé l'espace topologique sous-jacent, et à un morphisme $X \longrightarrow Y$ d'espaces K-annelés ce même morphisme considéré comme application de l'espace topologique sous-jacent à X dans celui sous-jacent à Y, est un *foncteur fidèle*.

Proposition 1. — *Soit (f_i) une famille d'applications continues d'un ensemble X dans des espaces K-annelés X_i. Alors il existe sur X une structure d'espace K-annelé initiale pour la famille (f_i). La topologie sous-jacente de X est la moins fine qui rende continue les applications f_i, et le faisceau fondamental de X est le plus petit sous faisceau d'anneaux du faisceau des germes d'applications de X dans K pour lequel les fonctions de la forme $g_i f_i$ sur $f_i^{-1}(U_i)$, (où g_i est une fonction régulière sur l'ouvert U_i de X_i), sont des sections.*

En effet, on voit aussitôt en vertu des définitions que muni de la topologie et du faisceau ainsi explicités, X est un espace K-annelé, et que pour toute application f d'un espace K-annelé Y dans X, f est un morphisme si et seulement si les $f_i f$ le sont.

Corollaire 1. — *Soit X un espace K-annelé, Y une partie de X. Alors Y admet une structure K-annelée induite. La topologie sous-jacente est celle induite par X, et une fonction sur un ouvert U de Y est régulière si et seulement si tout $y \in U$ admet un voisinage ouvert V dans X tel que $V \cap Y \subset U$ et que $f|V \cap Y$ induite par une fonction régulière sur V. En particulier, si Y est ouvert, une fonction f sur U est régulière au sens de Y si et seulement si elle l'est au sens de X, i.e. le faisceau fondamental de Y est induit par le faisceau fondamental de X. .*

Corollaire 2. — *Les espaces K-annelés forment une catégorie topologique sursaturée.*

Nous avons déjà signalé que les axiomes CT 1) et CT 2) sont vérifiés, il en est de même de CT 3) et CT 5) en vertu de proposition 1 (existence de structures induites sur les ouverts, et de structures produits), et aussi CT 4) affirmant que la notion de morphisme est de nature locale. Enfin, si X est un espace topologique muni d'un recouvrement ouvert (U_i), et si sur tout U_i on se donne une structure K-annelée, les structures induites par U_i et U_j dans $U_i \cap U_j$ étant identiques, alors il résulte de la fin du corollaire 1 que les faisceaux fondamentaux de U_i et U_j ont même restriction à $U_i \cap U_j$, donc qu'il existe un faisceau unique sur X induisant sur chaque U_i le faisceau fondamental de U_i. Muni de ce faisceau, X est évidemment un espace K-annelé, et d'après la fin du corollaire 1, il induit sur chaque U_i la structure K-annelée donnée sur U_i. Donc la catégorie des espace

K-annelés est bien sursaturée.

Proposition 2. — *Soit (f_i) une famille d'applications d'espaces K-annelés X_i dans un ensemble X. Alors il existe sur X une structure K-annelée finale. La topologie sous-jacente est la plus fine des topologies rendant continues les f_i. Une fonction g sur un ouvert $U \subset X$ est régulière si et seulement si les fonctions $g f_i$ sur les ouverts $f_i^{-1}(U) \subset X_i$ sont régulières.*

En effet, si X est muni de la topologie la plus fine rendant les f_i continues, il est immédiat que les fonctions sur un ouvert $U \subset X$ qui satisfont à la condition énoncée sont exactement les sections d'un faisceau sur X définissant une structure d'espace annelé. Il résulte alors des définitions que la structure K-annelée ainsi définie sur X est bien structure finale pour la famille des f_i.

Corollaire. — *Soit X un espace K-annelé, R une relation d'équivalence dans X, g l'application canonique de X sur X/R. Alors X/R admet une structure K-annelée quotient. La topologie sous-jacente est la topologie quotient, et une fonction sur un ouvert $U \subset X/R$ est régulière si et seulement si la fonction fg est régulière sur l'ouvert $g^{-1}(U)$ de X.*

2. — Catégories de variétés sur K.

Définition 3. — *Soit K un anneau commutatif avec unité. Une* catégorie de variétés *sur K est une catégorie locale recollable $\mathcal{V}$ (par.1, n°4), munie d'un objet $\mathcal{K} \in \mathcal{V}$ dont l'ensemble sous-jacent est K, et satisfaisant aux axiomes CV 1), CV 2) et CV 3) énoncés plus bas.*

Les objets de $\mathcal{V}$ seront appelés $\mathcal{V}$-variétés ou $\mathcal{V}$-espaces (ce dernier terme semblant préférable, ne créant pas de risques de confusions), et on employera librement la terminologie introduite pour les catégories topologiques, parlant de $\mathcal{V}$-structures sur un ensemble donné etc... Nous noterons, suivant l'abus de notation courant, $\mathcal{K}$ par la lettre K ; sauf avis expresse du contraire, K désigne donc l'anneau K, muni en plus de la $\mathcal{V}$-structure $\mathcal{K}$. Nous dirons qu'une application f d'un $\mathcal{V}$-espace X dans un Y, est *$\mathcal{V}$-régulière*, ou simplement *régulière*, si c'est un $\mathcal{V}$-morphisme.

CV 1) *Il existe un $\mathcal{V}$-espace réduit à un point. Si e est un tel $\mathcal{V}$-espace toute application f d'un $\mathcal{V}$-espace X dans e est un morphisme, et une application g de e dans X est un*

morphisme si et seulement si $f(e)$ est fermé dans X.

Il résulte immédiatement de cet axiome que tout ensemble e' réduit à un point admet une structure de $\mathcal{V}$-espace et une seule.

CV 2) *Pour tout $\mathcal{V}$-espace X, les morphismes de X dans K forment un sou anneau, contenant l'unité, de l'anneau de toutes les applications de X dans K.*

Montrons que cet axiome équivaut au suivant :

CV 2') *La partie de K réduite à l'élément unité 1 est fermée. Les applications $(x, y) \longrightarrow x - y$ et $(x, y) \longrightarrow xy$ de $K \times K$ dans K sont des morphismes.*

CV 2) implique *CV 2')* : $\{1\}$ est l'image d'un $\mathcal{V}$-espace e réduit à un point par un morphisme i de e dans K (en vertu de *CV 2*) donc fermé en vertu de *CV 1*) ; les fonctions $(x, y) \longrightarrow x$ et $(x, y) \longrightarrow y$ sur $K \times K$ sont des morphismes, donc en vertu de *CV 2*) il en est de même des fonctions $x - y$ et xy. Réciproquement, supposons *CV 2'*) satisfaite, il en résulte tout d'abord que pour tout $\mathcal{V}$-espace X, l'application $x \longrightarrow 1$ de X dans K est un morphisme, puisque composé de $X \longrightarrow e$ et $i : e \longrightarrow K$ qui sont des morphismes en vertu de *CV 1*). Soient maintenant f, g deux morphismes de X dans K montrons que $f - g$ et fg sont encore des morphismes : or ce sont respectivement les applications composées $S \circ (f \times g) \circ \Delta$ et $P \circ (f \times g) \circ \Delta$, où Δ est l'application diagonale $X \longrightarrow X \times X$, et S et P sont les applications de $K \times K$ dans K envisagées dans l'énoncé de *CV 2'*) ; comme S, P, Δ sont des morphismes, la conclusion voulue s'ensuit.

Proposition 3. — *Soit X un $\mathcal{V}$-espace. A tout ouvert $U \subset X$, attachons l'ensemble des morphismes de U dans K. Alors X devient un espace K-annelé (définition 1). Si X, Y sont deux $\mathcal{V}$-espaces, tout morphisme de X dans Y est un morphisme pour les structures K-annelées sous-jacentes (définition 2).*

Cela résulte aussitôt des définitions.

CV 3) *Soient X, Y deux $\mathcal{V}$-espaces, f une application de X dans Y qui soit un morphisme pour les structures K-annelées sous-jacentes, alors f est un $\mathcal{V}$-morphisme.*

Cet axiome signifie aussi que le foncteur naturel de $\mathcal{V}$ dans la catégorie des espaces K-annelés, défini par la proposition 2, identifie à $\mathcal{V}$ une sous-catégorie prétopologique

(par.1, n°1) de cette dernière, en effet, il suffit de vérifier que si U est un ouvert d'un $\mathcal{V}$-espace X, alors la structure K-annelée associée à la $\mathcal{V}$-structure induite est induite par celle de X, ce qui résulte aussitôt des définitions et prop. 1, cor. 1. On fera attention cependant que dans tous les cas que nous aurons à envisager, on n'a pas là une sous-catégorie topologique, le foncteur d'inclusion n'étant pas multiplicatif.

Soit e un $\mathcal{V}$-espace réduit à un point. Identifiant les applications de e dans K aux éléments de K, l'ensemble des morphismes de e dans K est une partie de K, qui d'après *CV* 2) est un sous-anneau avec unité, noté k. Ce dernier ne dépend évidemment pas du choix de e, on *l'appelle l'anneau de définition* k de la catégorie $\mathcal{V}$, K s'appelant le *domaine des valeurs*. D'après *CV* 1), k est aussi l'ensemble des éléments x de K tels que $\{x\}$ soit fermé.

Proposition 4. — *Soit X un $\mathcal{V}$-espace. L'anneau des fonctions régulières sur X contient l'anneau des applications constantes de X dans k, et est donc une algèbre sur le corps de définition k de $\mathcal{V}$. Donc le faisceau fondamental $\mathcal{O}(X)$ de X est un faisceau de k-algèbres.*

En effet, une application constante de X dans k se factorise en une application de X dans e, et une application de e dans k. Par définition de k, cette dernière est un morphisme de e dans K, il en est de même de $X \longrightarrow e$ en vertu de *CV* 1), donc aussi du composé.

Corollaire 1. — *Soient m, n deux entiers > 0. Toute application de K^m dans K^n qui est polynomiale à coefficients dans k, est un morphisme, en particulier les applications $x \longrightarrow \lambda x$ ($\lambda \in k$) et $x \longrightarrow x + a$ ($a \in K^n$) de K^n dans lui-même sont des morphismes. Inversement, supposons K et k des corps, K infini, pour qu'une application polynomiale $f : K^m \longrightarrow K^n$ soit un morphisme, il faut que ses coefficients soient dans k.*

Pour la première assertion, il suffit de la vérifier quand $n = 1$ auquel cas c'est un cas particulier de prop. 4. De même pour la réciproque, on peut supposer $n = 1$, comme chaque élément de k est une partie fermée de K, chaque élément de k^n est une partie fermée de K^n, donc une fonction régulière f sur K^n prend sur k^n des valeurs qui sont dans k (en vertu de *CV* 1). Si donc f est polynômiale, ses coefficients sont nécessairement dans k.

Corollaire 2. — *Les conditions suivantes sur $\mathcal{V}$ sont équivalentes :*

a) $k = K$

b) Toute application constante d'un $\mathcal{V}$-espace dans un autre est un morphisme

c) pour tout $\mathcal{V}$-espace X, les points de X sont des parties fermées.

a) implique que toute application constante d'un $\mathcal{V}$-espace X dans K est un morphisme, donc aussi toute application constante de X dans un $\mathcal{V}$-espace Y, en vertu de CV 3). b) implique que toute application du $\mathcal{V}$-espace e réduit à un point, dans un $\mathcal{V}$-espace X, est un morphisme, donc a une image fermée en vertu de CV 1), d'où c). Enfin c) implique a), puisque k est l'ensemble des points de K qui sont fermés.

Nous allons donner une méthode universelle pour construire des catégories de variétés :

Proposition 5. — *Soit $\mathcal{M}$ une sous-catégorie de modèles (cf. par.1, prop. 16) de la catégorie des espaces K-annelés, donc définie par une sous-classe $\mathcal{M}$ de cette dernière, satisfaisant à la condition :*

(i) tout modèle admet une base d'ouverts isomorphes à des modèles.

On suppose de plus les conditions suivantes satisfaites :

(ii) Il existe des modèles réduits à un point, et si e est un tel modèle toute application d'un modèle M dans e est un morphisme, et une application de e dans M est un morphisme si et seulement si son image est fermée.

(iii) On se donne un modèle K, dont l'ensemble sous-jacent est K, tel que pour tout modèle M, les applications régulières de M dans K soient précisément les morphismes de M dans K.

Alors la catégorie topologique parfaite $\mathcal{V}$ associée à $\mathcal{M}$ (par.1, n° 15, th.1 cor.1) est une catégorie parfaite de variétés sur K, et s'identifie à la catégorie topologique séparée, associée à la sous-catégorie prétopologique de la catégorie topologique des espaces K-annelés formée des espaces K-annelés admettant un système fondamental d'ouverts isomorphes à des modèles. Pour tout $X \in \mathcal{V}$, les morphismes de X dans K sont les fonctions régulières sur l'espace K-annelé X. Si $\mathcal{M}$ satisfait l'axiome de finitude M 7') (par.1, n° 14) alors les objets de $\mathcal{V}$ qui

sont réunions finies d'ouverts isomorphes à des modèles forment une catégorie semi-parfaite de variétés sur K.

D'après le cor. 4 au th.2, la catégorie topologique sursaturée associée à $\mathcal{M}$ s'identifie à la sous-catégorie prétopologique de la catégorie topologique des espaces K-annelés, formée des espaces K-annelés admettant un système fondamental d'ouverts isomorphes à des modèles. Donc la catégorie parfaite $\hat{\mathcal{M}}$ associée à $\mathcal{M}$, qui est une sous-catégorie topologique de $\hat{\mathcal{M}}$ (par.1, prop.4) donc une sous-catégorie prétopologique de la catégorie topologique des espaces K-annelés, est bien celle indiquée dans l' énoncé de prop.5. Reste à, prouver que cette catégorie $\mathcal{V}$ satisfait aux axiomes *CV* 1), *CV* 2) et *CV* 3). Tout d'abord ce qui précède implique que les morphismes d'un $X \in \hat{\mathcal{M}}$ dans $\mathcal{K}$ sont précisément les fonctions régulières sur l'espace K-annelé X (car il en est ainsi si X est un modèle en vertu de la condition (iii), et les ouverts de X isomorphes à des modèles recouvrent X). Cela implique les *axiomes CV* 2) et *CV* 3). Quant à *CV* 1), c'est une conséquence immédiate de (ii). Les mêmes raisonnements s'appliquent à $\mathcal{V}_f$, si $\mathcal{M}$ satisfait à l'axiome de finitude M 7 bis) (par. 1, n° 14) : alors $\mathcal{V}_f$ est une sous-catégorie topologique semi-parfaite de $\mathcal{M}$ contenant $\mathcal{M}$ (par. 1 th. 1, cor. 2), donc une sous-catégorie prétopologique de la catégorie des espaces K-annelés, d'où aussitôt les axiomes *CV* 1), *CV* 2) et *CV* 3).

3. — Structures induites.

Nous supposons donnée dans ce numéro et le suivant une catégorie $\mathcal{V}$ de variétés sur un anneau K. Soit X un $\mathcal{V}$-espace, Y une partie de X. Nous savons (Ensembles, Chap. IV, 2ème éd.) ce que signifie l'assertion que Y admet une structure de $\mathcal{V}$-espace induite, i.e. une structure initiale pour l'application identique de l'ensemble Y dans le $\mathcal{V}$-espace. Cependant, dans certains cas importants, il convient de restreindre cette notion (pour éviter des structures induites de nature pathologique, comme il s'en présente par exemple pour une partie "très irrégulière" d'une variété différentiable ou analytique - ayant alors une structure induite de variété discrète - ou une courbe avec point de rebroussement $x = t^2, y = t^3$, dans une variété analytique complexe, (cf exercices ultérieurs).

Définition 4. — *Soit X un $\mathcal{V}$-espace, Y une partie de X, i l'injection canonique de Y dans X. Y est dite un* $\mathcal{V}$-espace plongé, *s'il admet une structure S de $\mathcal{V}$-espace in-*

duite satisfaisant à la condition suivante : Y étant muni de la topologie T sous-jacente à S, pour qu'un germe d'application de Y dans K en un point $y \in Y$ soit un germe de fonction régulière, il faut et il suffit qu'il soit l'image réciproque par i d'un germe de fonction régulière sur X en y. On dit que Y est un sous-$\mathcal{V}$-espace de X si c'est un sous-$\mathcal{V}$-espace plongé, et si de plus la topologie T sous-jacente à la structure de $\mathcal{V}$-espace induite est aussi la topologie induite par X.

On peut aussi dire que Y est un sous-$\mathcal{V}$-espace plongé s'il existe une structure S de $\mathcal{V}$-espace induite, et si la structure K-annelée sous-jacente est identique à la structure K-annelée initiale pour *l'application continue i de l'espace topologique Y* (muni de T) dans le $\mathcal{V}$-espace X ; et que Y est un sous-$\mathcal{V}$-espace, si la structure K-annelée sous-jacente à S est identique à la structure K-annelée induite par X (prop.1) i.e. à la structure K-annelée initiale pour *l'application i de l'ensemble Y* dans le $\mathcal{V}$-espace X. [En exercice, on montrera qu'il peut exister des variétés plongées qui ne sont pas des sous-variétés (géodésiques du tore). On soumet aussi à Bourbaki la question s'il ne faut pas imposer à un sous-$\mathcal{V}$-espace plongé d'être connexe pour la topologie T sous-jacente à la structure de $\mathcal{V}$-espace induite (sinon le cas pathologique de parties totalement discontinues et analogues d'une bonne variété ne serait pas exorcisée) ; mais bien entendu, il serait absurde d'exiger la même chose pour un sous-$\mathcal{V}$-espace.] Une partie ouverte de X est toujours un sous-$\mathcal{V}$-espace, comme il résulte de l'axiome *CT* 3)des catégories topologiques (par.1, n° 1).

Proposition 5. — *Supposons que $\mathcal{V}$ satisfasse à l'axiome suivant :*

CV 4) Soit f un morphisme d'un $\mathcal{V}$-espace Y dans un autre X, y un point de Y tel que tout germe de fonction régulière g en y provienne d'un germe de fonction régulière h en $x = f(y)$ par $g = h \circ f$. Alors il existe un voisinage ouvert V de y, et un voisinage ouvert U de x, tel que la restriction de f à U soit un isomorphisme de U sur un sous-$\mathcal{V}$-espace fermé de V.

Alors i est l'application d'injection d'un $\mathcal{V}$-espace plongé Y dans un $\mathcal{V}$-espace X, i est localement un homéomorphisme dans, et si Y est un sous-$\mathcal{V}$-espace de X, Y est une partie localement fermée de X, donc un sous-$\mathcal{V}$-espace fermé d'une partie ouverte U de X.

La démonstration de cette proposition est triviale. (Bien entendu, l'axiome *CV* 4) est bien plus fort que la conclusion de cette proposition, puisque d'un hypothèse de nature

"ponctuelle" il permet de tirer une conclusion valable dans tout un voisinage du point envisagé ; c'est là une forme affaiblie du théorème des fonctions implicites, qui est valable aussi pour les variétés algébriques.

Proposition 6. — *Soit X un $\mathcal{V}$-espace, Y un $\mathcal{V}$-espace plongé (resp. un sous-$\mathcal{V}$-espace) dans X. munissons Y de la structure de $\mathcal{V}$-espace induite et soit Z un $\mathcal{V}$-espace plongé (resp. un sous-$\mathcal{V}$-espace) dans Y. Alors Z est un sous-$\mathcal{V}$-espace plongé (resp. un sous-$\mathcal{V}$-espace) de X et sur Z les structures de $\mathcal{V}$-espaces induites par X et Y sont les mêmes.*

En effet, d'après la transitiviré des structures induites (Ens. chap. IV, 2ème éd.) Z admet dans X une structure de $\mathcal{V}$-espace induite, identique à celle induite par Y. Par hypothèse, la structure K-annelée sous-jacente à cette dernière est l'image réciproque, par morphisme d'injection $i : Z \longrightarrow Y$ de l'espace (resp. l'ensemble) Z dans Y, de la structure K-annelée de Y, et cette dernière est de même l'image réciproque par le morphisme d'injection $j : Y \longrightarrow X$, de la structure K-annelée de X. D'après loc. cité, la structure K-annelée de Z est donc l'image réciproque, par le morphisme $ji : Z \longrightarrow X$ de l'espace (resp. l'ensemble) Z dans X, de la structure K-annelée de X, i.e. Z est bien une sous-variété plongée (resp. une sous-variété) dans X.

Proposition 7. — *Supposons que $\mathcal{V}$ satisfasse l'axiome CV 4), et de plus l'axiome suivant :*

CV 5) Soient X_i ($i = 1, 2$) deux $\mathcal{V}$-espaces, Y_i ($i = 1, 2$) un sous-$\mathcal{V}$-espace fermé de X_i. Alors $Y_1 \times Y_2$ est un sous-$\mathcal{V}$-espace de $X_1 \times X_2$.

Soient alors X_i ($i = 1, 2$) deux $\mathcal{V}$-espaces, Y_i ($i = 1, 2$) un $\mathcal{V}$-espace plongé (resp. un sous-$\mathcal{V}$-espace) de X_i. Alors $Y_1 \times Y_2$ est un sous-$\mathcal{V}$-espace plongé (resp. un sous-$\mathcal{V}$-espace) de $X_1 \times X_2$, et la structure induite sur $Y_1 \times Y_2$ est identique à la structure produit des structures de $\mathcal{V}$-espaces induites sur Y_1 par X_1 et sur Y_2 par X_2.

Le fait que $Y_1 \times Y_2$ admette une structure de $\mathcal{V}$-espace induite par $X_1 \times X_2$, identique à la structure produit des structures induites envisagées sur Y_1 et Y_2, résulte de la transitivité générale des structures initiales (Ens., loc. cité). Par hypothèse, l'assertion de la proposition est vraie si Y_1 et Y_2 sont des sous-$\mathcal{V}$-espaces fermés. Si Y_i est un sous-$\mathcal{V}$-espace quelconque, alors d'après prop. 5 c'est un sous-$\mathcal{V}$-espace fermé d'une partie ouverte U_i de X_i. Donc $Y_1 \times Y_2$ est un sous-$\mathcal{V}$-espace de $U_1 \times U_2$, qui lui-même est un

sous-$\mathcal{V}$-espace de $X_1 \times X_2$ (puisque une partie ouverte de $X_1 \times X_2$), donc d'après prop. 6, $Y_1 \times Y_2$ est aussi un sous-$\mathcal{V}$-espace de $X_1 \times X_2$. Supposons maintenant que Y_i soit seulement un sous-$\mathcal{V}$-espace plongé dans X_i ($i = 1, 2$), montrons que $Y_1 \times Y_2$ est un sous-$\mathcal{V}$-espace plongé dans $X_1 \times X_2$. Soit donc $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$, il faut prouver que tout germe de fonction régulière sur $Y_1 \times Y_2$ en (y_1, y_2) provient d'un germe de fonction régulière sur $X_1 \times X_2$. Il suffit de prouver ceci quand on remplace chaque Y_i par une partie ouverte U_i de Y_i contenant y_i ; or, en vertu de l'axiome CV 4), on peut trouver un tel U_i qui soit un sous-$\mathcal{V}$-espace de X_i. D'après ce qui précède, $U_1 \times U_2$ est alors un sous-$\mathcal{V}$-espace de $X_1 \times X_2$, d'où aussitôt la conclusion voulue.

Proposition 8. — *Soit X un $\mathcal{V}$-espace, Y une partie de X. Si X est une sous-variété plongée (resp. une sous-variété) de X, alors pour toute partie ouverte U de X, $U \cap Y$ est une sous-variété plongée (resp. une sous-variété) dans U, et sa $\mathcal{V}$-structure induite par U est identique à celle induite par Y (dont $U \cap Y$ est une partie ouverte, pour la topologie de Y associée à sa $\mathcal{V}$-structure induite par X). Réciproquement, si X admet un recouvrement ouvert (U_i) tel que pour tout i, $Y \cap U_i$ soit un $\mathcal{V}$-espace plongé (resp. un sous-$\mathcal{V}$-espace de U_i, alors Y est un sous-$\mathcal{V}$-espace plongé (resp. un sous-$\mathcal{V}$-espace de X).*

$Y' = U \cap Y$ étant une partie ouverte de Y, est un sous-$\mathcal{V}$-espace de Y, donc d'après prop.6 c'est un $\mathcal{V}$-espace plongé (resp. un sous-$\mathcal{V}$-espace de X et sa structure induite par Y est la même que celle induite par X . Il reste à montrer que si un sous-$\mathcal{V}$-espace plongé (resp. un sous-$\mathcal{V}$-espace) Y' de X est contenu dans un ouvert, c'est un sous-$\mathcal{V}$-espace plongé (resp. un sous-$\mathcal{V}$-espace) de ce dernier : alors les structures induites sur Y' par X et U sont les mêmes d'après prop.6 et la première partie de prop.7 sera prouvée. Or il est trivial à partir des définitions que, Y' étant une partie quelconque de l'ouvert U, Y' admet une structure induite dans X si et seulement si elle admet une structure induite dans U, et qu'alors Y' est un sous-$\mathcal{V}$-espace plongé (resp. un sous-$\mathcal{V}$-espace) dans U, si et seulement si il l'est dans X. dans X. Supposons maintenant donné un recouvrement ouvert (U_i) de X, et soit Y une partie de X telle que tout $Y \cap U_i$ ait une structure induite dans U_i. D'après le par.1, n°5, prop. 7, Y admet une $\mathcal{V}$-structure *locale* induite, et cette dernière est séparée puisque X est séparé (par. 1, n° 4, prop.6, corollaire) donc Y est un $\mathcal{V}$-espace puisque $\mathcal{V}$ est parfait ou semi-parfaite, et que dans ce dernier cas on pourrait supposer (U_i) fini. Soit $Y_i = Y \cap U_i$, alors la structure induite par Y sur sa partie ouverte Y_i est identique à la structure induite sur Y_i par U_i. Il résulte alors immédiatement des

définitions que si chaque Y_i est un sous-$\mathcal{V}$-espace plongé dans U_i, Y est un sous-$\mathcal{V}$-espace plongé dans X. Si de plus, Y_i est un sous-$\mathcal{V}$-espace de U_i, la topologie de Y_i est celle induite par U_i, donc celle induite par X, d'où résulte aussitôt que la topologie de Y est aussi celle induite par X, donc que Y est un sous-$\mathcal{V}$-espace de X.

Proposition 9. — *Soit f un morphisme d'un $\mathcal{V}$-espace Y dans un autre X. Pour que f soit un isomorphisme de Y sur un $\mathcal{V}$-espace plongé (resp. un sous-$\mathcal{V}$-espace) dans X, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux conditions suivantes :*

(i) *f est injectif, (resp. f est un homéomorphisme de Y dans X).*

(ii) *Pour tout $y \in Y$, tout germe de fonction régulière en y est l'image inverse, par f, d'un germe de fonction régulière en $x = f(y)$.*

(iii) *(S'il s'agit de $\mathcal{V}$-espaces plongés) : toute application g d'un $\mathcal{V}$-espace Z dans Y, telle que fg soit un morphisme est* continue.

La nécessité de ces conditions est triviale. Pour la suffisance, il faut seulement montrer que si g est une application d'un $\mathcal{V}$-espace Z dans Y, telle que fg soit un morphisme, alors il en est de même de g. Or g est continu en vertu de (iii) (resp. en vertu de (ii)), de plus, il résulte de (ii) que g est un morphisme pour les structures $\mathcal{K}$-annelées sous-jacentes à Z et Y, donc c'est un morphisme en vertu de *CV 3)*.

(N.B) La condition (iii) n'est pas surabondante, même si Y est connexe comme on voit par exemple dans le cas où $\mathcal{V}$ est la catégorie des variétés différentiables : dans la définition "classique" des variétés plongées par la condition que l'ensemble sous-jacent soit une partie de X, et l'application d'injection $f : Y \longrightarrow X$ satisfasse à (ii), i.e. soit de rang égal à dim.Y en tout point, *l'ensemble des points de Y ne suffit plus à déterminer sa structure de variété plongée*. Cependant, la condition (iii) est vérifiée dans les cas importants en pratique, par exemple, si Y est une feuille maximale dans un feuilletage d'une variété différentiable, définie par un champ complétement intégrable d'éléments de contact — du moins si X est paracompacte. On laisse à Bourbaki de trancher la question terminologique ainsi soulevée.

4. — Structures quotient.

Soit X un $\mathcal{V}$-espace muni d'une relation d'équivalence R, soit $Y = X/R$, rappelons (par.1, n°7, déf. 2) que Y est appelé un $\mathcal{V}$-espace quotient s'il existe sur Y une structure de $\mathcal{V}$-espace dont la topologie sous-jacente soit la topologie quotient de celle de X, et telle que pour tout ouvert $U \subset Y$, la $\mathcal{V}$-structure induite sur U soit une $\mathcal{V}$-structure quotient (au sens morphisque) de la $\mathcal{V}$-structure sur $f^{-1}(U)$ induite par X (f désignant l'application canonique de X sur Y). En particulier, les morphismes de U dans $\mathbf{K}$ sont les applications $g : U \longrightarrow \mathbf{K}$ telles que $gf : f^{-1}(U) \longrightarrow \mathbf{K}$ soient des morphismes. D'où aussitôt, compte tenu de CV 3) :

Proposition 10. — *Soient X un $\mathcal{V}$-espace muni d'une relation d'équivalence R, Y l'espace quotient X/R, $f : X \longrightarrow Y$. L'application canonique, mettons sur Y la structure K-annelée quotient de celle de X, (n° 1, prop.2, cor.1), pour laquelle les fonctions régulières sur un ouvert $U \subset Y$ sont les fonctions $g : U \longrightarrow K$ telles que $gf : f^{-1}(U) \longrightarrow K$ soit régulière. Pour que Y soit un $\mathcal{V}$-espace quotient de X, (par.1, n° 7, déf.2) il faut et il suffit que la structure précédente fasse de Y un $\mathcal{V}$-espace, et dans ce cas cette structure est aussi une $\mathcal{V}$-structure quotient.*

À part ça, le rédacteur n'a rien à ajouter aux sorites de par.1, n° 7.

5. — Un axiome supplémentaire.

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposerons que la catégorie de variétés $\mathcal{V}$ satisfait à l'axiome suivant :

CV 6) *Pour tout $\mathcal{V}$-espace X et toute fonction f régulière sur X telle que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$, il existe une fonction régulière g sur X telle que $fg = 1$.*

Cet axiome est équivalent au suivant :

CV 6') *K est un corps, et l'application $x \longrightarrow 1/x$ de l'ouvert $K - (0)$ dans K est une fonction régulière.*

CV 6) implique CV 6'), comme on voit en prenant pour f l'application identique de $K - (0)$ dans K, et la réciproque est vraie, si on note qu'avec les notations de CV 6), la fonction $1/f$ est composée du morphisme $f : X \longrightarrow K - (0)$ et du morphisme

$x \longrightarrow 1/x$ de $K - (0)$ dans K, donc un morphisme. Si X est un $\mathcal{V}$-espace, nous désignerons par $\mathcal{O}_X$ le faisceau des germes de fonctions régulières sur X.

Prposition 11. — *Supposons que $\mathcal{V}$ satisfasse à l'axiome CV 6). Alors l'anneau de base k de $\mathcal{V}$ est un corps. Si X est un $\mathcal{V}$-espace, les anneaux $\mathcal{O}_{X,x} \quad (x \in X)$ sont des anneaux locaux, dont l'idéal maximal est le noyau de l'augmentation $\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow K$.*

Beweis klaar.

6. — $\mathcal{V}$-structures sur les espaces vectoriels.

Rappelons que dans toute la suite, nous supposerons *CV 6)* satisfait :

Proposition 12. — *Soient V_0 un espace vectoriel de dimension finie n sur k, V l'espace vectoriel sur K déduit de V_0 par extension des scalaires, $e = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de V_0, et $u_e : K^n \longrightarrow V$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels sur K défini par $u_e((\lambda_i)) = \sum \lambda_i e_i$. Alors la $\mathcal{V}$-structure sur V déduite de celle de K^n par transport de structure à l'aide de u_e ne dépend pas du choix de e, et V_0 s'identifie à l'ensemble des points fermés de V.*

En effet, si e' est une autre base de V_0, on a $u_{e'} = u_e v$, où v est un automorphisme de K^n défini par une matrice à coefficients dans k, et dont l'inverse a ses coefficients dans k. Il s'ensuit que v et v^{-1} sont des $\mathcal{V}$-morphismes de K^n dans K^n (prop. 4, cor. 1) donc v est un $\mathcal{V}$-automorphisme, ce qui prouve que u_e et $u_{e'}$ définissent la même $\mathcal{V}$-structure sur V. Pour la dernière assertion, on peut supposer $V_0 = k^n$, d'où $V = K^n$. En vertu de *CV 1)*, les points fermés dans un produit de $\mathcal{V}$-espaces sont les points dont les projections sont fermées, d'où s'ensuit que k^n est l'ensemble des points fermés de K^n.

Par la suite, si X est un $\mathcal{V}$-espace, nous désignerons par $X_{(k)}$ l'ensemble des points de X qui sont fermés. Avec les notations précédentes on a donc $V_0 = V_{(k)}$. De façon générale, nous appelerons *$\mathcal{V}$-espace vectoriel* un espace vectoriel V de dimension finie sur K, muni d'une $\mathcal{V}$-structure telle que $V_{(k)}$ soit un sous-espace vectoriel sur k de V, et V s'identifie (avec sa structure vectorielle et sa $\mathcal{V}$-structure) à l'espace déduit de $V_{(k)}$ par extension des scalaires.

Corollaire 1. — *Soient V et W deux $\mathcal{V}$-espaces vectoriels, pour toute $u \in L_k(V_{(k)}, W_{(k)})$ soit u^K l'application K-linéaire de V dans W qui prolonge u. Alors l'application $u \mapsto u^K$ est une bijection de $L_k(V_{(k)}, W_{(k)})$ sur l'ensemble des applications*

K-linéaires de V dans W qui sont des $\mathcal{V}$-morphismes.

On peut supposer $V = K^n$, $W = K^m$, alors u^K est un $\mathcal{V}$-morphisme en vertu de prop. 4, cor. 1, et réciproquement, si v est une application K-linéaire de V dans W qui est un $\mathcal{V}$-morphisme, elle transforme points fermés en points fermés en vertu de *CV 1)*, donc applique k^n dans k^m, donc est de la forme u^K. En particulier :

Corollaire 2. — *Si V est un $\mathcal{V}$-espace vectoriel, le groupe des automorphismes de V s'identifie au groupe $GL_k(V_{(k)})$.*

Le corollaire 1 montre qu'il n'y a pas d'inconvénient à identifier la structure $\mathcal{V}$-espace vectoriel avec la structure de *K-espace vectoriel de dimension finie défini sur k* (i.e. muni d'un sous-espace vectoriel sur k dont il se déduise par extension des scalaires), les notions de morphisme pour ces deux structures étant en effet, les mêmes. Notons alors que si V et W sont des espaces vectoriels de dimension finie définis sur k, il en est de même de V', de $V \otimes W$, de $L(V, W)$, etc...et on a

$$(V')_{(k)} = (V_{(k)})', \qquad (V \otimes_K W)_{(k)} = V_{(k)} \otimes_k W_{(k)},$$
$$L_K(V, W)_{(k)} = L_k(V_{(k)}, W_{(k)}).$$

etc...à cause des propriétés de compatibilité bien connues entre les opérations $V \longrightarrow V'$, $(V, W) \longrightarrow V \otimes W$, $(V, W) \longrightarrow L(V, W)$ etc...avec l'opération d'extension des scalaires. Aussi nous sous-entendrons toujours implicitement que des espaces vectoriels comme les précédents, construits à partir d'espaces vectoriels définis sur k, sont aussi considérés comme des espaces vectoriels définis sur k.

Proposition 13. — *Soit V un $\mathcal{V}$-espace vectoriel. Alors le groupe $Gl(V)$ est une partie ouverte du $\mathcal{V}$-espace vectoriel $L(V, V)$, et c'est un $\mathcal{V}$-groupe pour la $\mathcal{V}$-structure induite.*

On peut supposer $V = k^n$. Comme Gl(V) est la partie de $L(V, V)$ formée des u tels que dét $u \neq 0$, que la fonction dét u est une application polynômiale à coefficient dans k de $L(V, V) = \mathcal{K}^{n^2}$ dans $\mathcal{K}$, donc un morphisme (prop. 4, cor. 1), enfin que $\mathcal{K} - (0)$ est une partie ouverte de $\mathcal{K}$, il s'ensuit que $Gl(V)$ est bien une partie ouverte. La multiplication $G \times G \longrightarrow G$ est induite par la multiplication dans $L(V, V)$, qui est une application polynômiale à coefficients dans k de $\mathcal{K}^{n^2} \times \mathcal{K}^{n^2}$ dans $\mathcal{K}^{n^2}$ donc un morphisme (prop. 4, cor. 1), il en est donc de même de $G \times G \longrightarrow G$. Il est immédiat que l'élément unité de G

est un point fermé de G, puisque c'est un point fermé de $L(V,V)$ (ses coordonnées étant toutes 0 ou 1, donc dans k). Enfin montrons que l'application $x \longrightarrow x^{-1}$ de G dans G est un morphisme, cette application est de la forme $f(x)(\text{dét}\, x)^{-1}$, où $x \longrightarrow f(x)$ est une application induite d'une application polynômiale, à coefficients dans le corps premier, de $L(V,V)$ dans lui-même (à une matrice u correspondant la matrice dont les éléments sont les déterminants des mineurs correspondants de u). En vertu de prop. 4, cor. 1) f est un morphisme, il en est de même de $x \longrightarrow (\text{dét}\, x)^{-1}$ en vertu de la même proposition et de CV 6), donc aussi de $x \longrightarrow f(x)(\text{dét}\, x)^{-1}$, composée de morphismes $G \longrightarrow L(V,V) \times \mathcal{K} \longrightarrow L(V,V)$ (le deuxième morphisme étant donné par $(u,\lambda) \longrightarrow \lambda u$). C'est donc bien un morphisme de G dans $L(V,V)$, donc aussi de G dans G. — Par suite, nous supposerons toujours implicitement $Gl(V)$ muni de la structure de $\mathcal{V}$-groupe qu'on vient d'expliciter.

Corollaire. — *Muni du $\mathcal{V}$-groupe* $\mathrm{Gl}(V)$ *d'opérateurs à gauche, V devient un $\mathcal{V}$-espace à opérateurs (cf. par. 1, n° 10).*

En effet, l'application $G \times V \longrightarrow V$ est un morphisme, car elle est induite par l'application $L(V,V) \times V \longrightarrow V$ qui est un morphisme en vertu de prop. 4, cor. 1.

Soit G un $\mathcal{V}$-groupe, V un $\mathcal{V}$-espace vectoriel, on appelle *$\mathcal{V}$-représentation linéaire de G dans V* un morphisme de $\mathcal{V}$-groupes de G dans $Gl(V)$. Pour qu'une représentation linéaire u de G dans V soit une $\mathcal{V}$-représentation, il faut et il suffit que ce soit un $\mathcal{V}$-morphisme de G dans $L(V,V)$, i.e. que les fonctions coefficients $x \longrightarrow \langle u(x).a, a'\rangle$ soient régulières sur G pour $a \in V_{(k)}$, $a' \in V'_{(k)}$. L'application de prop. 4, cor. 1 prouve immédiatement :

Proposition 14. — *Une représentation linéaire d'un $\mathcal{V}$-groupe G, qui est la somme ou le produit tensoriel d'un nombre fini de $\mathcal{V}$-représentations, ou la contragrédiente d'une $\mathcal{V}$-représentation, est elle-même une $\mathcal{V}$-représentation. En particulier, si on a des $\mathcal{V}$-représentations de G dans des $\mathcal{V}$-espaces vectoriels V et W, on en déduit une $\mathcal{V}$-représentation dans le $\mathcal{V}$-espace vectoriel $L(V,W) = V' \otimes W$.*

7. — $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels. Relations avec les faisceaux de modules.

Définition 5. — *Soit Φ_0 la catégorie des $\mathcal{V}$-espaces vectoriels, Φ la catégorie des espaces vectoriels de dimension finie sur K, et considérons les foncteurs identiques $\Phi_0 \longrightarrow \mathcal{C}$, $\Phi_0 \longrightarrow \Phi$*

et $\Phi \longrightarrow \mathcal{E}$ *(où* $\mathcal{E}$ *désigne la catégorie des ensembles). Un fibré de type (*$\mathcal{C}$, Φ, Φ_0*) (cf. par. 1, n° 9, déf. 4) est appelé un* $\mathcal{V}$-fibré vectoriel*. Un morphisme au sens de la catégorie des fibrés de type (*$\mathcal{V}$, Φ, Φ_0*) (loc. cité, déf. 5) est appelé un* morphisme de $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels*.*

Ainsi, un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel est défini par la donnée de deux $\mathcal{V}$-espaces X (la base) et E (le fibré vectoriel), d'un morphisme surjectif $p : E \longrightarrow X$, et, pour tout $x \in X$, d'une structure d'espace vectoriel de dimension finie sur K dans la fibre $p^{-1}(x)$, ces données étant assujetties à la condition suivante : pour toute partie ouverte assez petite U de X, $p^{-1}(U)$ est isomorphe (au sens des structures précédentes, l'espace de base étant U) à un produit $U \times V$, où V est un $\mathcal{V}$-espace vectoriel.

Proposition 15. — *La donnée d'un* $\mathcal{V}$*-fibré vectoriel dont toutes les fibres aient même dimension* n*, est équivalente à la donnée d'un* $\mathcal{C}$*-espace fibré à groupe structural* $\mathrm{Gl}(n, K)$*, à fibre* K^n *(considérée comme un* $\mathcal{V}$*-espace à* $\mathcal{V}$*-groupe d'opérateurs* $\mathrm{Gl}(V)$*, cf. cor. à prop. 13).*

En effet, on est sous les conditions d'application du par.1, n° 10 prop. 11. Il en résulte qu'on peut parler du *fibré principal* associé à un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel, pourvu que toutes les fibres soient des vectoriels de même dimension. (On se demande s'il ne faut pas limiter le nom de fibré vectoriel à ce cas). On peut aussi, dans ce cas, considérer le $\mathcal{C}$-fibré *adjoint*, qui est un $\mathcal{C}$-fibré en groupes tous isomorphes à $\mathrm{Gl}(n, K)$, et dont les sections s'identifient aux automorphismes du fibré vectoriel envisagé.

Rappelons qu'une structure de $\mathcal{V}$-fibré principal à $\mathcal{C}$-groupe structural $G = \mathrm{Gl}(n, K)$, à fibre K^n, est par définition une structure de fibré ensembliste à faisceau structural $\mathcal{O}_X(G)$ (faisceau des germes d'applications régulières de X dans G), de type $(\mathcal{O}_X(G), G)$. Or on vérifie aussitôt, à l'aide de *CV 6)*, qu'on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{O}_X(\mathrm{Gl}(n, K)) \simeq \mathrm{Gl}(n, \mathcal{O}_X)$$

le deuxième membre désignant le faisceau de germes de matrices inversible dans le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$; et d'autre part $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{O}_X)$ s'identifie aussi au faisceau des germes d'automorphismes du faisceau $\mathcal{O}_X^n$ de $\mathcal{O}_X$-modules. Donc une structure de $\mathcal{O}_X$-Module localement isomorphe à $\mathcal{O}_X^n$ peut aussi s'exprimer comme une structure de fibré ensembliste à faisceau structural $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{O}_X)$, de type $(\mathrm{Gl}(n, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X^n)$. On en conclut, en vertu de Top. Elém. chap.1 que, à condition de restreindre les morphismes à être des isomor-

phismes, la catégorie des $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels de base fixée, X, à fibre isomorphe à K^n, est naturellement équivalente à la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres, de rang n en chaque point. Cette correspondance se précise de la façon suivante :

Proposition 16. — *Les $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels de fibre K^n sur X correspondent canoniquement aux faisceaux de $\mathcal{O}_X$-Modules localement isomorphes à $\mathcal{O}_X^n$. Au $\mathcal{V}$-fibré vectoriel E correspond le faisceau $\mathcal{O}_X(E)$ des germes de sections régulières de E, et au faisceau M de $\mathcal{O}_X$-modules correspond le $\mathcal{V}$-fibré vectoriel unique $E(M)$ dont la fibre en $x \in X$ est*

$$E(M)_x = M_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K = (M_x/m_x M_x) \otimes_{\underline{k}_x} K$$

(m_x désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, $\underline{k}_x$ son corps résiduel), et dont les sections régulières sur un ouvert U sont celles définies par les sections de M sur U.

Dans le cas le plus important, on aura $k_x = K$, d'où $E(M)_x = M_x/m_x M_x$. — On a oublié de dire que les $\mathcal{V}$-morphismes sont aussi appelés *applications régulières*, d'où la notion de section $\mathcal{V}$-régulière d'un $\mathcal{V}$-fibré. La structure de $\mathcal{O}_X$-Module sur un faisceau $\mathcal{O}_X(E)$ se définit de façon évidente le produit d'une fonction régulière $U \longrightarrow K$ et d'une section régulière de E sur U étant encore une section régulière de E sur U, (il suffit de vérifier cette assertion si E est un produit $U \times K^n$, auquel cas elle est conséquence triviale de prop. 4, cor. 1). On vérifie de même que si on part d'un $\mathcal{O}_X$-module localement isomorphe à $\mathcal{O}_X^n$, il existe sur l'ensemble $E(M)$ réunion des $M_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} K$ une structure unique de $\mathcal{V}$-fibré vectoriel dont les sections régulières sur un ouvert arbitraire sont celles qui proviennent de sections de M : utilisant par. 1, n° 9, prop. 13 (qui s'applique, $\mathcal{V}$ étant recollable), on est ramené à prouver cette assertion dans le cas où $M = \mathcal{O}_X^n$, où la démonstration est laissée au lecteur. Les deux correspondances envisagées dans prop. 16 sont des foncteurs de catégories locales sur X et pour achever la démonstration il n'y a plus qu'à montrer que les deux foncteurs composés sont isomorphes naturellement aux foncteurs identiques. Le rédacteur n'a pas cru utile de copier ici la démonstration qu'il en a faite pour lui-même par acquit de conscience. Il avoue d'ailleurs volontiers que d'une part, l'énoncé de la proposition 16 est un peu vague (de sorte que d'aucuns ne sauront pas très bien ce qu'il s'agit de démontrer), et que d'autre part, si on voulait le rendre parfaitement précis, en explicitant les deux catégories, les deux foncteurs, et les deux équivalences de foncteurs, et faisant toutes les vérifications requises pour satisfaire la définition (rédaction ultérieure ?) d'une équivalence de catégories locales, il y aurait

de quoi désespérer les plus masochistes. Il se posera de plus en plus une question de rédaction, et il semble que le parti raisonnable soit le suivant : donner au stade fonctoriel général (Ensemble, et Top. élém. Chap.I) des définitions parfaitement en forme, et aussi suffisamment de démonstrations parfaitement correctes, mais expliquer quelque part en laïus qu'on est obligé en pratique, par la suite, de se dispenser d'un certain nombre de vérifications fastidieuses — tout comme on est obligé, en pratique, de ne pas s'en tenir au langage formalisé de Ens. Chap.I, et d'utiliser des notations ambiguës.

Corollaire 1. — *Les correspondances établies dans prop. 16 sont des foncteurs locaux pour la notion de morphisme de $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels de déf. 5, et les homomorphismes de $\mathcal{O}_X$-Modules.*

On notera d'ailleurs que la proposition et son corollaire s'étendent pour donner une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels (à fibre de dimension non précisée) et la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules localement libres (i.e. tels que pour tout ouvert U assez petit, existe un entier n tel que $M|U$ soit isomorphe à $\mathcal{O}_X^n|U$). Ces catégories sont d'ailleurs des catégories additives (Alg. Hom; ChapI), et les foncteurs envisagés sont des foncteurs additifs.

Soit E un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel à fibre K^n. On appelle *$\mathcal{V}$-repère linéaire* ou *repère linéaire régulier*, de E, un système $(f_i)_{i\in I}$ de n sections régulières de E, telles que pour tout $x \in X$, les $f_i(x)$ soient des éléments linéairement indépendants de la fibre E_x, et en forment donc une base. Comme $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local et que $\mathcal{O}_X(E)_x$ est un module libre de rang n sur celui-ci, il revient au même de dire que pour tout $x \in X$, les germes $f_{i,x} \in \mathcal{O}_X(E)_x$ forment une base du $\mathcal{O}_{X,x}$-module $\mathcal{O}_X(E)_x$, ou encore que les f_i, considérées comme sections du faisceau $\mathcal{O}_X(E)$, définissent un isomorphisme de $\mathcal{O}_X^I$ sur $\mathcal{O}_X(E)$, ou enfin que l'application $(x, (\lambda_i)_{i\in I}) \longrightarrow \sum \lambda_i f_i(x)$ est un isomorphisme du $\mathcal{V}$-fibré trivial $X \times K^I$ sur E. Ainsi, pour un ensemble I fixé à n éléments, les $\mathcal{V}$-repères linéaires $(f_i)_{i\in I}$ de E sont en correspondance biunivoque avec les isomorphismes de $X \times K^I$ sur E (ou encore, si on veut, avec les sections régulières du fibré principal associé à E quand $I = [1, n]$). En particulier, E admet des repères linéaires sur tout ouvert assez petit.

8. — Opérations sur les fibrés vectoriels.

Fibrés associés à des fibrés vectoriels. — Les notations sont comme au n° 7. Considérons les foncteurs contavariants $\Phi_0 \longrightarrow \Phi_0$ et $\Phi \longrightarrow \Phi$ associant à un $\mathcal{V}$-espace vectoriel V (resp. à un espace vectoriel de dimension finie sur K) l'espace dual V'. On est dans les conditions du par. 1, n° 11 ce qui permet, à tout $\mathcal{V}$-fibré vectoriel E, d'associer le *$\mathcal{V}$-fibré vectoriel dual*, noté le plus souvent E'. Le fibré E' est un foncteur par rapport à E, comme on a vu dans loc. cité. On a de plus un isomorphisme de foncteurs locaux.

$$\mathcal{O}_X(E') = (\mathcal{O}_X(E))'$$

où E est un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel de base X, et où pour tout $\mathcal{O}_X$-module A, A' désigne le $\mathcal{O}_X$-module des germes d'homomorphismes de A dans $\mathcal{O}_X$. La vérification de compatibilités comme la précédente est le type de celles que Bourbaki doit se permettre de "laisser au lecteur".

On définit de façon toute analogue le produit tensoriel de deux ou plusieurs $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels, à cela près qu'il s'agit maintenant de la construction de fibrés associés, non à un fibré, mais à un système fini de fibrés ; il semble donc qu'il faille écrire le par. 1, n° 11 dans ce cas plus général, ou du moins indiquer qu'on pourrait le faire, et se borner "pour fixer les idées" au cas d'un seul fibré. On ne peut se dispenser d'indiquer les propriétés d'associativité et de commutativité du produit tensoriel de $\mathcal{V}$-fibrés, qui résultent des propriétés analogues pour les produits tensoriels d'espaces vectoriels, en vertu de ce qui a été dit dans loc. cité à propos des homomorphismes fonctoriels entre fibrés associés. On a encore des isomorphismes de bifoncteurs locaux :

$$\mathcal{O}_X(E \otimes F) = \mathcal{O}_X(E) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(F)$$

qui se généralisent au produit tensoriel d'un nombre fini quelconque de $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels sur l'espace X.

On définit de même, pour deux $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels E, F sur X, le $\mathcal{V}$-fibré vectoriel $L(E, F)$, qu'il vaut mieux noter $E' \otimes F$. On a

$$\mathcal{O}_X(E' \otimes F) = \underset{\mathcal{O}_X}{\mathbf{Hom}}(\mathcal{O}_X(E), \mathcal{O}_X(F))$$

(homomorphismes de bifoncteurs locaux), où pour deux $\mathcal{O}_X$-modules A et B, on désigne par $\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(A, B)$ le faisceau des germes des homomorphismes de A dans B.

On définit de même les puissances extérieures d'un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel, ses puissances symétriques etc, toutes les formules tensorielles usuelles s'étendent en des formules analogues pour les $\mathcal{V}$-fibrés. Proximus Redactordemerdatur.

Ce serait aussi ici le moment de poser la définition de $L^{\otimes n}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, L étant un $\mathcal{V}$-fibré à fibre de dimension 1 : On pose pour $n \geqslant 0$, $L^{\otimes n} = L \otimes L \cdots \otimes L$ (n facteurs), et pour $n \leqslant 0$, $L^{\otimes n} = (L')^{\otimes(-n)}$. Avec cette définition on a $L^{\otimes(0)} = \underline{1}$, $L^{\otimes n} \otimes L^{\otimes m} = L^{\otimes(n+m)}$.

Les opérations précédentes passent aux classes de fibrés vectoriels sur une base fixée $X \in \mathcal{V}$. Soit $E_X(n)$ ou simplement $E(n)$ l'ensemble $\mathrm{H}^1(X, \mathrm{GL}(n, \mathcal{O}_X))$ des classes de $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels à fibre K^n sur X, et soit E_X, ou simplement E l'ensemble somme des $E(n)$. Alors E est muni de deux lois de composition $\oplus$ et $\otimes$ commutatives et associatives, la deuxième étant distributive par rapport à la première. Il est alors commode d'introduire un anneau commutatif $\underline{A}_X$, engendré par le système de générateurs $\underline{E}$, ses générateurs étant soumis aux relations :

$$(\xi \oplus \eta) = (\xi) + (\eta)\,,\ (\xi \otimes \eta) = (\xi).(\eta).$$

Proposition 17 (Atiyah). — *Soit $X \in \mathcal{V}$, supposons que pour tout $\mathcal{V}$-fibré vectoriel E sur X, l'espace des sections régulières de E sur X soit de dimension finie sur k. Alors tout $\mathcal{V}$-fibré vectoriel E sur X est isomorphe à la somme directe d'une suite de fibrés indécomposables, bien déterminés à isomorphisme et l'ordre des facteurs près.*

Cette proposition est un cas particulier d'une variante du théorème de Krull-Remak-Schmidt, valable dans les catégories additives (Alg.Hom...) (et qui résulte d'ailleurs immédiatement du th. de KRS lui-même). Il suffit de noter que l'hypothèse implique que pour tout $\mathcal{V}$-fibré vectoriel E, le k-espace vectoriel des endomorphismes de E est de dimension finie (puisque c'est l'espace des sections régulières de $E' \otimes E$), donc un anneau d'Artin.

Corollaire. — *Sous les conditions précédentes, l'anneau A_X engendré par les classes de $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels homogènes sur X (cf. ci-dessus), a pour groupe additif sous-jacent le groupe libre engendré par les classes des fibrés vectoriels indécomposables homogènes.*

La démonstration est immédiate.

L'anneau A_X sera appelé par abus de langage *l'anneau des fibrés vectoriels sur* X. Sauf dans un petit nombre de cas extrêmement spéciaux, on ne sait à peu près rien sur cet anneau. Notons cependant que les classes de $\mathcal{V}$-fibrés sur X à fibre de dimension 1 formant un groupe commutatif $\mathcal{P}_X$ sous l'opération $\otimes$, qui s'identifie à un sous-groupe du groupe des éléments inversibles de A_X. Donc il y a un homomorphisme canonique de l'algèbre $Z(\mathcal{P}_X)$ du groupe $\mathcal{P}_X$ dans A_X, qui est d'ailleurs injectif quand les conditions de la prop. 17 (donc de son corollaire) sont remplies.

Images réciproques de fibrés vectoriels. — La notion d'image réciproque de $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels est claire, étant un cas particulier de par. 1, n° 13.

En vertu de la compatibilité de l'opération "image réciproque" et de l'opération "fibré associé", les opérations tensorielles envisagées plus haut sur les fibrés vectoriels, sont compatibles avec l'opération image réciproque. Il faut relier enfin la notion d'image réciproque de fibré vectoriel à une notion d'image réciproque de faisceau de modules, comme suit.

Soit f un morphisme d'un $\mathcal{V}$-espace X dans un autre Y, soit B un $\mathcal{O}_Y$-Module. Alors l'image réciproque $f^{-1}(B)$ (Top.Elém. Chap.I) est un $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-Module. D'autre part, on a un homomorphisme canonique de faisceaux d'anneaux

$$f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

(qui est d'ailleurs un monomorphisme), permettant de considérer $\mathcal{O}_X$ comme une $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-Algèbre, ce qui permet de former le $\mathcal{O}_X$-Module

$$B^f = f^{-1}(B) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X$$

Définition 6. — *Sous les conditions précédentes, le faisceau* B^f *est appelé le* $\mathcal{O}_X$*-Module image réciproque du* $\mathcal{O}_Y$*-Module* B *par* f.

Bien entendu, B^f est un foncteur additif local en B. On a

$$(\mathcal{O}_Y)^f = \mathcal{O}_X$$

ce qui montre que si B est localement isomorphe à $\mathcal{O}_Y$, alors B^f est localement isomorphe à $\mathcal{O}_X$. Si maintenant E est un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel sur Y, on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{O}_X(f^{-1}(E)) = \mathcal{O}_Y(E)^f$$

En effet, la notion d'image réciproque d'une section régulière permet de définir de façon évidente un homomorphisme de faisceaux $f^{-1}(\mathcal{O}_Y(E)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(E))$, qui est un homomorphisme de $f^{-1}(\mathcal{O}_Y)$-Modules, et définit donc (le deuxième terme étant un $\mathcal{O}_X$-Module) un homomorphisme $f^{-1}(\mathcal{O}_Y(E)) \otimes_{f^{-1}(\mathcal{O}_Y)} \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y(E)^f \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(E))$. Pour montrer que c'est un isomorphisme, on est ramené aussitôt au cas où E est un produit $X \times K^n$, puis au cas où E est le produit $X \times K$, auquel cas c'est trivial.

Exercice. — Soit $X \in \mathcal{V}$, soit A_X l'anneau des $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels sur X. Montrer qu'il existe un homomorphisme unique r de A_X sur Z, tel que r prenne la valeur n sur l'image canonique de l'ensemble $H^1(X, \mathrm{Gl}(n, \mathcal{O}_X))$, dans A_X. Soit $P_X = \mathrm{H}^1(X, \mathrm{Gl}(1, \mathcal{O}_X))$ l'ensemble des classes de $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels sur X, à fibre de dimension 1, muni de sa structure de groupe abélien, écrite additivement. Sur le groupe abélien $Z \times P_X$, mettons la structure d'anneau pour laquelle P_X est un idéal de carré nul, le quotient par cet idéal étant Z, muni de sa structure d'anneau usuelle. Pour $\xi \in \mathrm{H}^1(X, \mathrm{Gl}(n, \mathcal{O}_X))$, soit $c^1(\xi)$ son image dans $\mathrm{H}^1(X, \mathrm{Gl}(1, \mathcal{O}_X))$ par l'application qui correspond à l'homomorphisme de faisceaux de groupes $\mathrm{Gl}(n, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathrm{Gl}(1, \mathcal{O}_X)$ donné par $u \longrightarrow$ dét. u. (Si ξ est la classe d'un fibré vectoriel E à fibre K^n, $c^1(\xi)$ est la classe du fibré vectoriel $\bigwedge^n E$ à fibre K). Montrer qu'il existe un homomorphisme d'anneaux et un seul de A_X dans $Z + P_X$ qui transforme l'image d'un $\xi \in H^1(X, \mathrm{Gl}(n, \mathcal{O}_X))$ en $(n, c^1(\xi))$. Montrer que la définition de l'homomorphisme précédent se généralise quand on se donne seulement un espace topologique X muni d'un faisceau $\mathcal{O}$ d'anneaux commutatifs avec unité.

9. — Sous-$\mathcal{V}$-fibrés vectoriels, $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels quotients, $\mathcal{V}$-fibrés en drapeaux.

Soit E un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel de base X. On appelle *sous-$\mathcal{V}$-fibré vectoriel* de E un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel F de base X, qui est en tant que $\mathcal{V}$-espace un sous-$\mathcal{V}$-espace de E, dont l'application de projection est induite par celle de E, dont les fibres sont des sous-espaces vectoriels des fibres de E, munis de la structure $\mathcal{K}$-vectorielle induite, et qui est tel que pour tout ouvert $U \subset X$ assez petit, il existe un isomorphisme de $E|U$ sur $U \times K^n$ appliquant $F \cap (E|U)$ sur $U \times K^m$ (où, pour $m \leq n$, on identifie K^m à un sous-espace

vectoriel de K^n de la façon bien connue). Notons d'abord qu'il résulte de cette définition qu'un *sous-$\mathcal{V}$-fibré vectoriel F de E est déterminé quand on connait la partie de E qu'elle définit, et qu'une partie F de E provient d'un sous-$\mathcal{V}$-fibré vectoriel si et seulement si elle satisfait à la condition de la fin de la définition précédente.* Ces assertions sont triviales, sauf celle-ci : si F est une partie de E telle que pour tout ouvert U assez petit dans X, existe un isomorphisme φ_U de $E|U$ sur $U \times K^n$ appliquant $F \cap (E|U)$ sur $U \times K^m$, alors F est un sous-$\mathcal{V}$-fibré vectoriel. On voit aussitôt qu'il suffit de montrer qu'alors F est un sous-$\mathcal{V}$-espace de E, et que la $\mathcal{V}$-structure induite sur $F \cap (E|U)$ s'identifie, par φ_U, à celle de $U \times K^m$.

Grâce au n°8, prop. 8, on est ramené à prouver que $U \times K^m$ est un sous-$\mathcal{V}$-espace de $U \times K^n$. Or l'application d'injection $U \times K^m \longrightarrow U \times K^n$ est évidemment un morphisme, et il existe un morphisme inverse à droite, déduit de la projection canonique de K^n sur son sous-espace K^m, d'où notre assertion.

On appelle *$\mathcal{V}$-fibré vectoriel quotient* de E un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel G tel que G soit un $\mathcal{V}$-espace quotient de E, l'application canonique $E \longrightarrow G$ étant compatible avec les projections sur la base X, linéaire sur les fibres, et la condition suivante étant satisfaite : pour tout ouvert $U \subset X$ assez petit, il existe un diagramme commutatif de $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels

$$\begin{array}{ccc} E|U & \longrightarrow & G|U \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \times k^n & \longrightarrow & U \times k^{n-m} \end{array}$$

les flèches verticales étant des isomorphismes, et la deuxième flèche horizontale étant l'application déduite de la projection naturelle $(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow (x_{m+1}, \ldots, x_n)$ de $\mathcal{K}^n$ sur $\mathcal{K}^{n-m}$. En tout $x \in X$, la fibre G_x de G est alors un espace vectoriel quotient de la fibre E_x de E en x, donc de la forme E_x/F_x, où F_x est un sous-espace vectoriel bien déterminé de E_x. En vertu de ce qui précède, la réunion F des F_x est un sous-$\mathcal{V}$-fibré vectoriel de E. On a alors le résultat : *le $\mathcal{V}$-fibré vectoriel quotient G de E est bien déterminé par la donnée du sous- $\mathcal{V}$-fibré F de E qui lui correspond, et tout sous- $\mathcal{V}$-fibré vectoriel F de E provient d'un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel quotient de E (noté E/F).* Seul, le fait que tout sous- $\mathcal{V}$-fibré vectoriel F de E correspond à un $\mathcal{V}$-fibré quotient demande une démonstration. Soit donc G l'ensemble quotient de E défini par F, il faut montrer que G est un $\mathcal{V}$-espace quotient de E, et que muni de la projection naturelle $G \longrightarrow X$ et des

structures vectorielles quotient sur les fibres, c'est un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel sur X (il résultera alors de la définition que G est un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel quotient de E). Or cette assertion est vraie à condition de se restreindre au dessus d'un ouvert assez petit U de X, comme on voit en procédant comme plus haut, en utilisant l'injection naturelle de $\mathcal{K}^{n-m}$ dans $\mathcal{K}^n$, inverse à droite de la projection $\mathcal{K}^n \longrightarrow \mathcal{K}^{n-m}$. En vertu de par.1, n°7 prop.9, on en conclut que G est un $\mathcal{V}$-espace quotient de E, induisant sur les ouverts $G|U$ les $\mathcal{V}$-structures qu'on vient d'envisager. Comme ces dernières, quand on considère les $G|U$ comme des fibrés vectoriels sur U, se recollent, il s'ensuit en vertu de par.1, n°9, prop.13 (qui s'applique, puisque $\mathcal{V}$ est recollable) que G est même un $\mathcal{V}$-espace, et un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel sur X.

Ainsi les sous-$\mathcal{V}$-fibrés et les $\mathcal{V}$-fibrés quotients de E se correspondent biunivoquement. On voit de même, si E' désigne le $\mathcal{V}$-fibré vectoriel dual de E, que les sous-$\mathcal{V}$-fibrés vectoriels F de E et de E' se correspondent biunivoquement par polarité, et qu'on a encore les isomorphismes habituels

$$F' = E'/F^\circ\,, \quad (E/F)' = F^\circ$$

Ce serait le moment ici de définir les *$\mathcal{V}$-fibrés de drapeaux*. (De façon générale, le présent paragraphe semble le contexte naturel pour dérouler les sorites géométriques sur des fibrés spéciaux divers dans le genre de ceux du présent numéro, par exemple sur les fibrés orthogonaux sympléctiques etc..). Soit $\nu = (n_1, \ldots, n_k)$ une suite strictement croissante d'entiers > 0, avec $n_k = n$. Un *drapeau de type ν* (sur l'espace vectoriel K) est un K-espace vectoriel V de dimension n, muni d'une suite croissante $(V_i)_{1\leq i\leq k}$ des sous-espaces vectoriels de dimension n_i. On définit de même la notion de drapeau de type ν sur K <u>défini sur k</u>, encore appelé *$\mathcal{V}$-drapeau de type ν*. Un *morphisme* d'un drapeau (V_i) de type ν dans un autre (W_i) est une application K-linéaire $V_k \xrightarrow{u} W_k$ appliquant chaque V_i dans W_i ; on définit de même la notion de morphismes de $\mathcal{V}$-drapeaux. D'où les catégories $\underline{\mathcal{D}}$ et $\underline{\mathcal{D}}_0$ permettant de construire la catégorie des fibrés de type $(\mathcal{C}, \underline{\mathcal{D}}, \Phi, \underline{\mathcal{D}}_0)$ (par. 1, n° 9). Ces fibrés sont appelés *$\mathcal{V}$-fibrés en drapeaux de type ν*. Considérons alors le $\mathcal{V}$-drapeau de type ν

$$D(\nu) = (K^{n_1}, K^{n_2}, \ldots, K^{n_k})$$

et le sous-groupe $T\ell(\nu)$ de $\mathrm{Gl}(n, K)$ formé des K-automorphismes de K^n qui invarient $D(\nu)$. Ce sous-groupe est l'intersection de $\mathrm{Gl}(n, K)$ avec un sous-espace vectoriel défini

sur k de $L(K^n, K^n)$. C'est donc un sous-$\mathcal{V}$-groupe de Gl(n, K), et en particulier un $\mathcal{V}$-groupe, et K^n peut être regardé comme un $\mathcal{V}$-espace à $\mathcal{V}$-groupe d'opérateurs $T\ell(\nu)$. Je dis que *la structure de $\mathcal{V}$-fibré en drapeaux de type ν est équivalente à la structure de $\mathcal{V}$-fibré à $\mathcal{V}$-groupe structural $T\ell(\nu)$ et fibre $\mathcal{K}^n$* (par .1 n° 10). En effet, $T\ell(\nu)$ est le groupe des Φ-automorphismes de $D(\nu)$, et on peut appliquer par.1, n° 10 prop.14. On peut encore dire que, si E est un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel à fibre-type $\mathcal{K}^n$, *la donnée sur E d'une structure de $\mathcal{V}$-fibré en drapeaux de type ν, compatible avec sa structure de $\mathcal{V}$-fibré vectoriel, équivaut à la donnée d'une restriction de son $\mathcal{V}$-groupe structural* Gl$(n, \mathcal{K})$ *à* $T\ell(\nu)$ (voir fin de par.1 n°11 bis). Pour pouvoir appliquer le critère usuel de restrictabilité du groupe structural, il nous faut des précisions sur la fibration de Gl$(n, \mathcal{K})$ par $T\ell(\ )$ De façon générale, soit V un $\mathcal{K}$-espace vectoriel de dimension n, on dénote par Dr(ν, V) l'ensemble des drapeaux de type ν dans V, par Gr(m, V) l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension m de V, (qui s'identifie aussi à l'ensemble des drapeaux de type (m, n)) par $P(V)$ l'ensemble Gr$(1, V)$ des droites de V. On a des applications naturelles

$$\mathrm{Dr}(\nu, V) \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} \mathrm{Gr}(n_i, V) \longrightarrow \prod_{i=1}^{k} P(\bigwedge^{n_i} V)$$

où la deuxième flèche est déduite des applications naturelles $\mathrm{Gr}(m, V) \longrightarrow P(\bigwedge^{m} V)$, faisant correspondre à un sous-espace vectoriel W de dimension m de V l'ensemble des multivecteurs $x_1 \wedge \cdots \wedge x_m$ ($x_1, \ldots, x_m \in W$). D'autre part, le groupe Gl(V) opère dans tous les ensembles précédents, et les applications (1) sont compatibles avec ces opérations. D'ailleurs Dr(ν, V) (et en particulier les Gr(m, V)) sont des espaces homogènes sous Gl(V).

Théorème 1. — *Supposons que V soit un $\mathcal{V}$-espace vectoriel de dimension n.*

a) Soit D un $\mathcal{V}$-drapeau de type ν dans V, T son stabilisateur dans $G =$ Gl(V). Alors T est un sous-$\mathcal{V}$-groupe fermé dans G, et G fibré par T à droite est localement trivial (par. 1, n° 11 bis, déf. 7), par suite G/T est un $\mathcal{V}$-espace quotient de G. Ainsi, par transport de structure à partir de la bijection $s \mapsto s.D$ de G/T sur Dr(ν, V)*, ce dernier ensemble se trouve muni d'une structure de $\mathcal{V}$-espace, d'ailleurs indépendante du choix de D, qui en fait un $\mathcal{V}$-espace à $\mathcal{V}$-groupe d'opérateurs à gauche G. Ceci s'applique en particulier aux variétés grassmaniennes* Gr(m, V)*, et en particulier à* Gr$(1, V) = P(V)$.

b) La $\mathcal{V}$-structure ainsi mise sur $P(V)$ induit sur les sous-espaces affines de $P(V)$ définis par les hyperplans de V définis sur k, une $\mathcal{V}$-structure isomorphe à celle de K^{n-1} par les applications linéaires affines définies sur k de U sur K^{n-1} (ce qui suffit à caractériser cette $\mathcal{V}$-structure).

c) Les applications (1) sont des $\mathcal{V}$-isomorphismes sur des sous-$\mathcal{V}$-espaces fermés.

La démonstration de ce théorème ne sera pas donnée ici, elle est bien entendu tout à fait élémentaire, le th. 1 est en réalité un énoncé de Géométrie Algébrique : il faut construire trois $\mathcal{V}$-morphismes, on construit pour cela des applications polynomiales définies sur k. L'explication a priori du th. 1 (valable pour toute $\mathcal{V}$) est dans le fait que toutes les variétés algébriques qui y interviennent sont des variétés rationnelles, et même dont tout point admet un voisinage isomorphe à un ouvert d'un K^m, et pour cette raison sont munies de $\mathcal{V}$-structures de façon naturelle, quel que soit $\mathcal{V}$. (Ce qui n'aurait pas été possible si elles n'avaient pas été rationnelles, puisque les (k, K)-ensembles algébriques non singuliers dont les composantes connexes sont des variétés rationnelles sur k forment une "catégorie de variétés sur K", dont le "corps de définition" est k).

Nous pouvons maintenant appliquer par. 1, n° 11 bis, prop. 15 bis, cor. 2, et nous obtenons, compte tenu du th. 1, a) :

Corollaire 1. — *Soit E un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel sur X, à fibre-type K^n, soit P le fibré principal associé, à groupe structural $Gl(n, K)$. Alors $P/\mathrm{Tl}(\nu)$ est un $\mathcal{V}$-espace quotient de P et est le fibré associé à E et la représentation naturelle de* $\mathrm{Gl}(n, K)$ *dans la variété de drapeaux* $\mathrm{Dr}(\nu, K^n)$. *Ses $\mathcal{V}$-sections s'identifient aux restrictions du groupe structural de E à* $\mathrm{Tl}(\nu)$, *i.e. aux structures de $\mathcal{V}$-fibré en drapeaux de type ν sur E, compatibles avec la structure de $\mathcal{V}$-fibré vectoriel.*

En particulier, supposons $\nu = (m, n)$, alors il résulte aussitôt des définitions que la donnée d'une structure de $\mathcal{V}$-fibré en drapeaux de type ν sur E, compatible avec sa structure de $\mathcal{V}$-fibré vectoriel, est équivalente à la donnée d'un sous-$\mathcal{V}$-fibré vectoriel F à fibre type K^m. Par suite :

Corollaire 2. — *La donnée d'un sous-$\mathcal{V}$-fibré vectoriel F de E, à fibre-type K^m, est équivalente à la donnée d'une $\mathcal{V}$-section du $\mathcal{V}$-fibré associé à E, de fibre la variété grassmanienne* $\mathrm{Gr}(m, K^n)$.

Notons maintenant (ν étant de nouveau quelconque) qu'en vertu du th.1, c), une application u de X dans $\mathrm{Dr}(\nu, V)$ est un $\mathcal{V}$-morphisme si et seulement si il en est de même des applications correspondantes de X dans les $\mathrm{Gr}(n_i, V)$. On en conclut, en conjuguant cor.1 et cor.2 :

Corollaire 3. — *Une structure de $\mathcal{V}$-fibré en drapeaux de type ν est équivalente à une structure de $\mathcal{V}$-fibré vectoriel E à fibre type K^n, muni d'une suite croissante $(E_1, \ldots, E_k)$ de sous-$\mathcal{V}$-fibrés vectoriels à fibres types $n_1, \ldots, n_k$.*

10. — Extensions de fibrés vectoriels.

Proposition 18. — *Soit $u : E \longrightarrow F$ un homomorphisme de $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels de base X, et pour tout $x \in X$, soit u_x l'application K-linéaire $E_x \longrightarrow F_x$ définie par u. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathrm{Rang}(u_x)$ *est une fonction localement constante de x.*

b) La réunion des $\mathrm{Ker}(u_x)$ *est un sous-$\mathcal{V}$-fibré vectoriel de E.*

b') La réunion des $\mathrm{Im}(u_x)$ *est un sous-$\mathcal{V}$-fibré vectoriel de F.*

c) On peut factoriser u en le composé d'homomorphismes

$$E \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{u'} F_1 \xrightarrow{\beta} F$$

où α est l'homomorphisme canonique de E sur un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel quotient, β l'homomorphisme canonique d'un sous-$\mathcal{V}$-fibré vectoriel de F dans F, et u_1 un isomorphisme de $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels.

Démonstration. — Évidemment c) implique b) et b'), qui chacun impliquent a), reste à prouver que a) implique c). On vérifie aussitôt que la question est locale, et qu'on peut donc supposer $E = X \times K^n$, $F = X \times K^m$. Alors u est définie par une application régulière $x \longrightarrow u(x)$ de X dans $L(K^n, K^m)$.

Prouvons d'abord le

Corollaire 1. — *Soient V et W deux $\mathcal{V}$-espaces vectoriels, u une application régulière de X dans $L(V; W)$, telle que $u(x)$ soit de rang r pour tout $x \in X$, u_r une application linéaire de rang r de V dans W. Il existe alors pour tout ouvert $U \subset X$ assez petit*

des applications régulières v *de* X *dans* Gl(V) *et* w *de* X *dans* Gl(W) *telles que l'on ait* $u(x) = w(x)u_r v(x)^{-1}$

Démontrons le corollaire. Il est à peu près trivial si pour tout $x \in X$, $u(x)$ a même noyau et même image que u_r : prenant un supplémentaire W_1 de Im u_r dans W, on peut alors écrire de façon unique $u(x) = w(x)u_r$, où $w(x)$ est un automorphisme de W induisant l'identité sur W_1, et $x \longrightarrow w(x)$ sera manifestement une application régulière de X dans Gl(W).

Par suite, il suffit de trouver $v(x)$ et $w(x)$ de telle façon que $w(x)u_r v(x)^{-1}$ ait même noyau et même image que u_r, ou encore de trouver des applications régulières v et w telles que pour tout x, Ker $u(x)$ soit transformé de Ker u_r par $v(x)$, et Im $u(x)$ soit transformé de Im u_r par $w(x)$. Le problème de trouver v ou w étant des problèmes duaux, on se bornera à établir l'existence de w. Utilisant th.1, a), on est ramené à prouver que l'application $x \longrightarrow$ Im $u(x)$ de X dans la grassmanienne Gr(r, W) est régulière (puisque Gl(W) est fibré localement trivial sur Gr(r, W)). En vertu du th.1, c), la $\mathcal{V}$-structure de $Gr(r, W)$ est induite par celle de $P(\overset{r}{\wedge} W)$, pour l'immersion naturelle de Gr(r, W) dans $P(\overset{r}{\wedge} W)$

Soit $x_0 \in X$, soient a_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ des vecteurs tels que les $u(x_0).a_i$ sont linéairement indépendants, on en conclut facilement qu'il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que $x \in U$ implique que les $u(x).a_i$ soient linéairement indépendants. L'application $U \longrightarrow P(\overset{r}{\wedge} W)$ déduite de u est alors celle déduite de l'application $x \longrightarrow u(x).a_1 \wedge \cdots \wedge u(x).a_r$, et est donc bien régulière en vertu de th.1) b).

Démontrons alors que $a) \Rightarrow c)$, en supposant (ce qui est loisible grâce au corollaire 1) que u est donné par une application de la forme $x \longrightarrow v(x)u_r w(x)^{-1}$ de X dans $L(V, W)$. Faisant dans $X \times V$ le changement de coordonnées défini par l'application, et le changement analogue dans $X \times W$, on trouve que u est défini par une application linéaire constante de V dans W, ce qui implique évidemment c).

Soient E_1 et E_2 deux $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels sur X. On appelle *$\mathcal{V}$-fibré vectoriel extension de E_2 par E_1* un $\mathcal{V}$-fibré vectoriel E, muni de la structure supplémentaire définie par une suite exacte d'homomorphismes de $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels :

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} E_2 \longrightarrow 0$$

("exacte" signifiant : exacte sur chaque fibre). Utilisant la proposition 18, on voit que ceci

implique que E_1 est isomorphe à un sous-$\mathcal{V}$-fibré vectoriel de E et E_2 est isomorphe au $\mathcal{V}$-fibré vectoriel quotient E/E_1. Il en résulte aussitôt, en vertu des définitions, que sur tout ouvert U assez petit de X, E est isomorphe au produit $E_1 \times E_2$, i et j étant transformées par cet isomorphisme en les applications d'injections et projections naturelles $E_1 \longrightarrow E_1 \times E_2 \longrightarrow E_2$. Considérons alors les extensions de E_2 par E_1 sur des ouverts non précisés de X comme une catégorie topologique sur X, en prenant comme morphismes les isomorphismes (le fait qu'on obtient bien une catégorie topologique et non seulement prétopologique résulte de par.1, prop.13). Comme les objets de cette catégorie sont tous localement isomorphes à $E_1 \times E_2$, il s'ensuit (Top. Elem. chap I) que l'ensemble des classes d'extensions de E_2 par E_1 sur X s'identifie à $H^1(X, \mathcal{G})$ où $\mathcal{G}$ désigne le faisceau des germes d'automorphismes de $E_1 \times E_2$. Or un automorphisme de $E_1 \times E_2$ sur un ouvert U est un automorphisme de sa structure de $\mathcal{V}$-fibré vectoriel, invariant le sous-fibré E_1 et induisant l'identité sur le sous-fibré E_1 et dans le fibré quotient $E/E_1 = E_2$, et est donc donné par une matrice de morphismes

$$\begin{pmatrix} 1_{E_1} & u \\ 0 & 1_{E_2} \end{pmatrix}$$

où u est un homomorphisme arbitraire de $E_2|U$ dans $E_1|U$. D'ailleurs, comme bien connu, la multiplication des matrices de cette forme correspond à l'addition des termes u correspondants. Ainsi, $\mathcal{G}$ s'identifie donc au faisceau de groupes abéliens des germes d'homomorphismes de E_2 dans E_1 i.e. au faisceau $\mathcal{O}_X(E_2' \otimes E_1)$ des germes de sections régulières du fibré vectoriel $E_2' \otimes E_1$ (où E_2' désigne le fibré dual de E_2). On a ainsi prouvé

Théorème 2. — *Soient E_1 et E_2 deux $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels sur X. L'ensemble des classes de $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels extension de E_2 par E_1 s'identifie à* $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(E_2' \otimes E_1))$ *(où E_2' désigne le $\mathcal{V}$-fibré vectoriel dual de E_2).*

Cela montre donc que l'ensemble des classes d'extensions considérées est muni de façon naturelle d'une structure d'espace vectoriel sur K, dont le lecteur trouvera l'interprétation géométrique, en s'inspirant de constructions faites en Algèbre Homologique. — L'élément de $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(E_2' \otimes E_1))$ qui correspond à une extension E de E_2 par E_1 est appelé *classe fondamentale de l'extension E*. Son annulation est nécessaire et suffisante pour que E soit isomorphe à l'extension (dite "triviale") $E_1 \times E_2$.

Il importe aussi de donner la définition de la classe fondamentale de l'extension E par un cobord : transformant la suite exacte $0 \to E_1 \to E \to E_2 \to 0$ par $E_2' \otimes$, on trouve la suite exacte

$$0 \to E_2' \otimes E_1 \to E_2' \otimes E \to E_2' \otimes E_2 \to 0$$

d'où une suite exacte correspondante sur les faisceaux de germes de sections régulières, d'où un homomorphisme cobord

$$\partial : \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(E_2' \otimes E_2)) \to \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(E_2' \otimes E_1))$$

Le premier terme s'identifie au groupe des endomorphismes de E_2, et on montre facilement, en montant aux définitions, que $\partial(1_{E_2})$ n'est autre que la classe fondamentale de l'extension E, (à moins qu'il n'y ait le signe -1).

Si E est une extension de E_2 par E_1, alors E' est une extension de E_1' par E_2', sa classe fondamentale est alors un élément de $H^1(X, \mathcal{O}_X(E_1 \otimes E_2'))$. Identifiant abusivement $E_1 \otimes E_2'$ et $E_2' \otimes E_1$, on constate alors que $c(E') = -c(E)$ (c désignant la classe fondamentale). Le signe $-$ provient du fait que la contragrédiente de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

s'obtient en remplaçant u par $-u$ et interchangeant 1 et 1.

Si E est une extension de E_2 par E_1, et si E_1 et E_2 ont les fibres-types K^n resp. K^m, alors E est aussi muni d'une structure sous-jacente de $\mathcal{V}$-fibrés en drapeaux de type $(n, n+m)$ (th. 1, cor. 3). Mais on fera attention que (même si E_1 et E_2 sont constants et à fibre-type K) *deux extensions E et F non isomorphes de E_2 par E_1 peuvent avoir des structures sous-jacentes de fibrés en drapeaux isomorphes.* De façon précise, le groupe $\mathrm{Aut}(E_1) \times \mathrm{Aut}(E_2)$ opère dans $\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X(E_2' \otimes E_1))$, et les éléments d'une orbite sont exactement les classes d'extensions donnant une même classe de fibrés en drapeaux. (N.B. — Cette remarque permet en même temps de classifier les fibrés en drapeaux de type $(n, n+m)$ dont les "facteurs" E_1 et E_2 sont chacun dans une classe donnée de fibrés vectoriels).

Prime au lecteur. — Si X est paracompact et $\mathcal{O}_X$ fin, alors toute extension de $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels est triviale. (En effet, pour tout $\mathcal{V}$-fibré vectoriel L, $\mathcal{O}_X(L)$ est fin, donc $\mathcal{H}^i(X, \mathcal{O}_X(L)) = 0$ pour $i > 0$).

Exercices. — a) Soient E_1 et E_2 deux $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels sur X. Montrer que la catégorie locale sur X des $\mathcal{V}$-fibrés vectoriels extension de E_2 par E_1 est équivalente à la catégorie locale des $\mathcal{O}_X$-Modules extension de $\mathcal{O}_X(E_2)$ par $\mathcal{O}_X(E_1)$. b) Soit X un espace topologique muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}$, soient M_1 et M_2 deux $\mathcal{O}$-Modules. Montrer que l'ensemble des classes de $\mathcal{O}$-Modules extensions localement triviales de M_2 par M_1 s'identifie à $\mathrm{H}^1(X, \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}}(M_2, M_1))$. c) déduire de a) et b) une nouvelle démonstration du th. 2.