

Anneaux adiques



par
Alexander Grothendieck

Transcription by



Edited by Mateo Carmona
mateo.carmona@csg.igrothendieck.org
Centre for Grothendieckian Studies (CSG)
Grothendieck Institute
Corso Statuto 24, 12084 Mondovì, Italy

©2024 Grothendieck Institute
All rights reserved

This transcription is based on an unpublished scan from the Fonds Pierre Cartier (Archives Henri Poincaré) of Rédaction Bourbaki No. 327. This project was carried out by researchers and volunteers of the CSG under the supervision of Mateo Carmona.

More details are available at:

<https://csg.igrothendieck.org/transcriptions/>

How to cite:

Alexander Grothendieck. *Anneaux adiques*. Unpublished, 1959. Transcription by M. Carmona et al., CSG, Grothendieck Institute. Draft, April 2026.

EXTRAIT DU MULTIPLODOQUE GROTHENDIECK

§4. Anneaux adiques

1. Anneaux admissibles

Rappelons que si A est un anneau topologique, on dit que A est *linéairement topologisé* s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 dans A formé d'*idéaux*. Rappelons aussi que dans un anneau topologique A (non nécessairement séparé) un élément x est dit *topologiquement nilpotent* si 0 est une limite de la suite $(x^n)_{n \geq 0}$

Définition 1. — *Dans un anneau linéairement topologisé A , on dit qu'un idéal \mathcal{J} est un idéal de définition si \mathcal{J} est ouvert et si, pour tout voisinage V de 0, il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\mathcal{J}^n \subset V$ (ce qu'on exprime, par abus de langage, en disant que la suite (\mathcal{J}^n) tend vers 0). On dit qu'un anneau linéairement topologisé A est préadmissible s'il existe dans A un idéal de définition ; on dit que A est admissible s'il est préadmissible, et si en outre il est séparé et complet.*

Lemme 1. — *Soit A un anneau linéairement topologisé.*

- (i) *Pour que $x \in A$ soit topologiquement nilpotent, il faut et il suffit que pour tout idéal ouvert \mathcal{J} de A , l'image canonique de x dans A/\mathcal{J} soit nilpotente. L'ensemble T des éléments topologiquement nilpotents de A est un idéal.*
- (ii) *Supposons en outre A préadmissible, et soit \mathcal{J} un idéal de définition de A . Pour que $x \in A$ soit topologiquement nilpotent, il faut et il suffit que son image canonique*

dans A/\mathcal{J} soit nilpotente ; l'idéal \mathcal{T} est l'image réciproque de la racine de 0 (ou nilradical) dans A/\mathcal{J} .

(i) découle aussitôt des définitions. Pour prouver (ii), il suffit de remarquer que pour tout voisinage V de 0 dans A , il existe $n \geq 0$ tel que $\mathcal{J}^n \subset V$; si $x \in A$ est tel que $x^m \in \mathcal{J}$, on a $x^{mn} \in V$, donc x est topologiquement nilpotent.

Proposition 1. — Soient A un anneau préadmissible, \mathcal{J} un idéal de définition de A .

(i) Pour qu'un idéal ouvert \mathcal{J}' de A soit un idéal de définition, il faut et il suffit qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\mathcal{J}'^n \subset \mathcal{J}$.

(ii) Pour qu'un $x \in A$ soit contenu dans un idéal de définition, il faut et il suffit qu'il soit topologiquement nilpotent.

(i) Si $\mathcal{J}'^m \subset \mathcal{J}$, pour tout voisinage ouvert V de 0 dans A , il existe n tel que $\mathcal{J}'^n \subset V$, d'où $\mathcal{J}'^{mn} \subset \mathcal{J}$.

(ii) La condition est évidemment nécessaire ; elle est suffisante, car si elle est remplie, $\mathcal{J}' = \mathcal{J} + Ax$ est un idéal de définition, car il est ouvert et si $x^n \in \mathcal{J}$, on a $\mathcal{J}'^n \subset \mathcal{J}$.

Corollaire 1. — Les notations et hypothèses étant celles de la proposition 1 les propriétés suivantes d'un idéal \mathcal{J}' de A sont équivalentes :

a) \mathcal{J}' est le plus grand idéal de définition de A .

b) \mathcal{J}' est un idéal de définition maximal.

c) \mathcal{J}' est un idéal de définition tel que A/\mathcal{J}' soit réduit (i.e. n'a pas d'élément nilpotent).

Pour qu'il existe un idéal \mathcal{J}' ayant ces propriétés, il faut et il suffit que le nilradical de A/\mathcal{J} soit nilpotent ; \mathcal{J}' est alors égal à l'idéal \mathcal{T} des éléments topologiquement nilpotents de A .

Il est clair que a) implique b), et b) implique c) en vertu de la proposition 1 (ii) ; pour la même raison, compte tenu du lemme 1 (ii), la proposition 1 (ii) montre que c) entraîne a). La dernière assertion résulte de la proposition 1 (i) et du lemme 1 (ii).

Lorsque \mathcal{T}/\mathcal{J} , nilradical de A/\mathcal{J} , est nilpotent, on note A_{red} l'anneau quotient (réduit) A/\mathcal{T} .

Corollaire 2. — *Si l'anneau préadmissible A est tel que pour un idéal de définition \mathcal{J} , les puissances \mathcal{J}^n ($n \geq 0$) forment un système fondamental de voisinages de 0, il en est de même des puissances \mathcal{J}^n de tout idéal de définition de A .*

Définition 2. — *On dit qu'un anneau préadmissible A est préadique s'il existe un idéal de définition \mathcal{J} de A tel que les \mathcal{J}^n forment un système fondamental de voisinages de 0 dans A . On appelle anneau adique un anneau préadique séparé et complet.*

Si \mathcal{J} est un idéal de définition d'un anneau préadique (resp. adique) A , on dit encore que A est un anneau \mathcal{J} -préadique (resp. \mathcal{J} -adique) et que sa topologie est la topologie \mathcal{J} -préadique (resp. \mathcal{J} -adique). Plus généralement, si M est un A -module, la topologie sur M ayant pour système fondamental de voisinages de 0 les sous-modules $\mathcal{J}^n M$ est dite topologie \mathcal{J} -préadique (resp. \mathcal{J} -adique). En vertu du corollaire 2 de la proposition 1, ces topologies sont indépendantes de l'idéal de définition \mathcal{J} considéré.

Proposition 2. — *Soient A un anneau admissible, \mathcal{J} un idéal de définition de A . Alors \mathcal{J} est contenu dans le radical de A .*

On sait () que cet énoncé est équivalent à un quelconque des corollaires suivants.

Corollaire 1. — *Pour tout $x \in \mathcal{J}$, $1 + x$ est inversible dans A .*

Corollaire 2. — *Pour que $f \in A$ soit inversible dans A , il faut et il suffit que son image canonique dans A/\mathcal{J} soit inversible dans A/\mathcal{J} .*

Corollaire 3. — *Pour tout A -module M de type fini, la relation $M = \mathcal{J}M$ (équivalente à $M \otimes_A A/\mathcal{J} = 0$) entraîne $M = 0$*

Corollaire 4. — *Soit $u : M \rightarrow N$ un homomorphisme de A -modules, N étant de type fini : pour que u soit surjectif, il faut et il suffit que $u \otimes 1 : M \otimes_A A/\mathcal{J} \rightarrow N \otimes_A A/\mathcal{J}$ le soit.*

Pour démontrer la proposition 2, il suffit donc de prouver son corollaire 1 ; or comme A est séparé et complet et que la suite (\mathcal{J}^n) tend vers 0, il est immédiat que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est convergente dans A , et si y est sa somme, on a $y(1 - x) = 1$, d'où le

corollaire 1.

2. Anneaux adiques et limites projectives

Toute limite projective d'anneaux discrets est évidemment un anneau linéairement topologisé, séparé et complet. Inversement, soit A un anneau linéairement topologisé, et soit (\mathcal{I}_λ) un système fondamental filtrant (pour \supset) de voisinages ouverts de 0 dans A formé d'idéaux. Les applications canoniques $\varphi_\lambda : A \rightarrow A/\mathcal{I}_\lambda$ définissent alors une représentation continue $\varphi : A \rightarrow \varprojlim A/\mathcal{I}_\lambda$; si A est séparé, φ est un isomorphisme topologique de A sur le sous-anneau partout dense $\varphi(A)$ de $\varprojlim A/\mathcal{I}_\lambda$; si en outre A est complet, φ est un isomorphisme topologique de A sur $\varprojlim A/\mathcal{I}_\lambda$.

Lemme 2. — *Pour qu'un anneau linéairement topologisé soit admissible, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à une limite projective $A = \varprojlim A_\lambda$, où $(A_\lambda, u_{\lambda\mu})$ est un système projectif d'anneaux discrets ayant pour ensemble d'indices un ensemble ordonné filtrant L (pour \leq) admettant un plus petit élément noté 0, et satisfaisant aux conditions suivantes :*

- a) les $u_\lambda : A \rightarrow A_\lambda$ sont surjectifs;
- b) le noyau de $u_0 : A \rightarrow A_0$ est nilpotent.

Compte tenu des remarques qui précèdent, cela exprime la déf. 1 (en remplaçant les \mathcal{I}_λ par $\mathcal{J} \cap \mathcal{I}_\lambda$, où \mathcal{J} est un idéal de définition, et prenant $\mathcal{J} = \mathcal{I}_0$).

Soient A un anneau topologique *admissible*, \mathcal{J} un idéal de définition de A ; on peut considérer sur A la topologie d'anneau ayant pour système fondamental de voisinages de 0 les puissances \mathcal{J}^n ($n \geq 0$) nous l'appellerons encore topologie *\mathcal{J} -préadique*. L'hypothèse que A est admissible entraîne que $\bigcap_n \mathcal{J}^n = (0)$, donc la topologie *\mathcal{J} -préadique* sur A est *séparée*; soit $\hat{A} = \varprojlim A/\mathcal{J}^n$ le complété de A pour la topologie *\mathcal{J} -préadique*, et désignons par u l'homomorphisme d'anneaux (non nécessairement continu) $A \rightarrow \hat{A}$ défini par les homomorphismes $u_n : A \rightarrow A/\mathcal{J}^n$. D'autre part, la topologie *\mathcal{J} -préadique* sur A est plus fine que la topologie donnée sur A ; comme A est séparé et complet pour cette dernière, on peut prolonger par continuité l'application identique de A (muni de la topologie *\mathcal{J} -préadique*) dans A (muni de la topologie donnée); cela donne par suite une représentation continue $v : \hat{A} \rightarrow A$.

Proposition 3. — Si A est un anneau topologique admissible, les homomorphismes d'anneaux $u : A \rightarrow \hat{A}$ et $v : \hat{A} \rightarrow A$ sont bijectifs et réciproques l'un de l'autre.

Il résulte en effet des définitions que $v \circ u$ est l'application identique de A ; d'autre part, $u_n \circ v : \hat{A} \rightarrow A/\mathcal{J}^n$ est le prolongement par continuité (pour la topologie \mathcal{J} -adique) de l'application canonique $u_n : A \rightarrow A/\mathcal{J}^n$, autrement dit c'est l'application canonique de $\varprojlim_k A/\mathcal{J}^k$ sur A/\mathcal{J}^n ; $u \circ v$ est la limite projective de cette suite d'homomorphismes, et par suite est l'application identique de \hat{A} .

Corollaire 1. — Sous les hypothèses de la prop. 3, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) l'homomorphisme u est continu ;
- (ii) l'homomorphisme v est bicontinu ;
- (iii) A est un anneau adique.

Corollaire 2. — Soient A un anneau topologique admissible, \mathcal{J} un idéal de définition de A . Pour que A soit noethérien, il faut et il suffit que A/\mathcal{J} soit noethérien et que $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ soit un (A/\mathcal{J}) -module de type fini.

Ces conditions sont évidemment nécessaires. Inversement supposons-les remplies ; comme A est complet pour la topologie \mathcal{J} -préadique en vertu de la prop. 3, pour qu'il soit noethérien, il faut et il suffit que l'anneau gradué associé $\text{grad}^{\mathcal{J}}(A)$ le soit (). Or si a_1, \dots, a_n sont des éléments de \mathcal{J} dont les classes sont des générateurs de $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ en tant que A/\mathcal{J} -module, il est immédiat par récurrence que les classes mod. \mathcal{J}^{n+1} des monômes de degré n en les a_i forment un système de générateurs du (A/\mathcal{J}) -module $\mathcal{J}^n/\mathcal{J}^{n+1}$. Autrement dit, $\text{grad}(A)$ est un anneau isomorphe à un quotient de $(A/\mathcal{J})[T_1, \dots, T_n]$ (T_i indéterminées), ce qui achève la démonstration.

Proposition 4. — Soit (A_i, u_{ij}) un système projectif d'anneaux discrets ($i \in \mathbf{N}$), et pour tout i , soit \mathcal{J}_i le noyau dans A_i de l'homomorphisme $u_{0i} : A_i \rightarrow A_0$. On suppose que :

- a) pour $i \leq j$, u_{ij} est surjectif et son noyau est \mathcal{J}_j^{i+1} (donc A_i est isomorphe à A_j/\mathcal{J}_j^{i+1});

b) $\mathcal{J}_1/\mathcal{J}_1^2$ est un module de type fini sur $A_1/\mathcal{J}_1 = A_0$.

Soit $A = \varprojlim A_i$, et pour tout n , soient u_n l'homomorphisme canonique $A \rightarrow A_n$, $\mathcal{J}^{(n)} \subset A$ son noyau. Dans ces conditions :

(i) A est un anneau adique ayant pour idéal de définition $\mathcal{J} = \mathcal{J}^{(0)}$;

(ii) on a $\mathcal{J}^{(n)} = \mathcal{J}^{n+1}$ pour tout $n \geq 0$;

(iii) $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ est isomorphe à $\mathcal{J}_1/\mathcal{J}_1^2 = \mathcal{J}_1$, et est par suite un module de type fini sur $A_0 = A/\mathcal{J}$.

Il est clair que A est par définition un anneau linéairement topologisé, et comme l'hypothèse a) entraîne que $\mathcal{J}_j^{j+1} = (0)$, A est un anneau admissible (lemme 2) ; par définition, les $\mathcal{J}^{(n)}$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans A , et (ii) entraînera donc (i). En outre, les hypothèses entraînent que $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_{i+1}/\mathcal{J}_{i+1}^{i+1}$; d'où on tire aisément que tout $x_1 \in \mathcal{J}_1$ est l'image d'un élément de \mathcal{J} , et par suite (ii) entraînera (iii). On est ainsi ramené à prouver (ii). Par définition, $\mathcal{J}^{(n)}$ est formé des éléments $(x_k)_{k \geq 0}$ de A tels que $x_k = 0$ pour $k \leq n$, donc $\mathcal{J}^{(n)}\mathcal{J}^{(m)} \subset \mathcal{J}^{(n+m)}$; les $\mathcal{J}^{(n)}$ constituent donc une filtration de A . D'autre part, $\mathcal{J}^{(n)}/\mathcal{J}^{(n+1)}$ est isomorphe à la projection de $\mathcal{J}^{(n)}$ sur A_{n+1} , donc (en vertu du fait que $u_{i,i+1}$ a pour noyau \mathcal{J}_{i+1}^{i+1} et que $u_{i,i+1}(\mathcal{J}_{i+1}) = \mathcal{J}_i$) à \mathcal{J}_i à \mathcal{J}_{n+1}^{n+1} , qui est un module sur $A_0 = A_{n+1}/\mathcal{J}_{n+1}$. Soient alors $a_j = (a_{jk})_{k \geq 0}$ r éléments de $\mathcal{J} = \mathcal{J}^{(0)}$ tel que a_{11}, \dots, a_{r1} forment un système de générateurs de \mathcal{J}_1 sur A_0 ; nous allons voir que l'ensemble S_n des monômes de degré total $n+1$ en les a_j engendre l'idéal $\mathcal{J}^{(n)}$ de A . Il est clair tout d'abord (puisque $\mathcal{J}_i^{i+1} = (0)$) que $S_n \subset \mathcal{J}^{(n)}$; comme A est complet pour la filtration $(\mathcal{J}^{(m)})$, il suffit de montrer que l'ensemble \bar{S}_n des classes mod. $\mathcal{J}^{(n+1)}$ des éléments de S_n engendre le module gradué $\text{grad}(\mathcal{J}^{(n)})$ sur l'anneau gradué $\text{grad}(A)$ (pour cette filtration) () ; en vertu de la définition de la multiplication dans $\text{grad}(A)$, il suffira de prouver que pour tout m , \bar{S}_m est un système de générateurs du A_0 -module $\mathcal{J}^{(m)}/\mathcal{J}^{(m+1)}$, ou encore que \mathcal{J}_m^m est engendré par les monômes de degré m en les a_{jm} ($1 \leq j \leq r$). Pour cela, il reste à prouver que \mathcal{J}_m est (en tant que A_m -module) engendré par les monômes de degré $\leq m$ par rapport aux a_{jm} : raisonnons par récurrence sur m , et soit \mathcal{J}'_m le sous- A_m -module de \mathcal{J}_m engendré par ces monômes ; la relation $\mathcal{J}_{m-1} = \mathcal{J}_m/\mathcal{J}_m^m$ et l'hypothèse de récur-

rence prouvent que $\mathcal{J}_m = \mathcal{J}'_m + \mathcal{J}_m^m$, d'où, puisque $\mathcal{J}_m^{m+1} = 0$, on tire $\mathcal{J}_m^m = \mathcal{J}'_m$, et finalement $\mathcal{J}_m = \mathcal{J}'_m$.

Corollaire 1. — *Sous les conditions de la prop. 4, pour que A soit noethérien, il faut et il suffit que A_0 le soit.*

Cela résulte en effet du cor. 2 de la prop. 3.

Corollaire 2. — *Supposons vérifiées les hypothèses de la prop. 4 ; pour tout i , soit M_i un A_i -module de type fini, et pour $i \leq j$, soit $v_{ij} : M_j \rightarrow M_i$ un di-homomorphisme tel que (M_i, v_{ij}) soit un système projectif. Supposons en outre que v_{ij} soit surjectif et que son noyau soit $\mathcal{J}_j^{i+1} M_j$. Alors $M = \varprojlim M_i$ est un A -module de type fini.*

Soient $z_h = (z_{hk})_{k \geq 0}$ un système de s éléments de M tels que les z_{h0} forment un système de générateurs de M_0 ; on va montrer que les z_h engendrent le A -module M . Le A -module M est séparé et complet pour la filtration des $\mathcal{J}^{(n)} M = \mathcal{J}^{n+1} M$, et les hypothèses entraînent que $\mathcal{J}^n M / \mathcal{J}^{n+1} M$ est isomorphe à $\mathcal{J}_n^n M_n$; on est ramené à montrer que les classes mod. \mathcal{J} de z_h engendrent le module gradué $\text{grad}(M)$ sur l'anneau gradué $\text{grad}(A)$; tout revient de nouveau à voir que les z_{hn} engendrent le A_n -module M_n . On raisonne de nouveau par récurrence sur n ; la relation $M_{n-1} = M_n / \mathcal{J}_n^n M_n$ et l'hypothèse de récurrence montrent que si M'_n est le sous-module de M_n engendré par les z_{hn} , on a $M_n = M'_n + \mathcal{J}_n^n M_n$, et comme \mathcal{J}_n est nilpotent, cela entraîne $M_n = M'_n$.

Remarques. —

- 1) Si A est un anneau adique ayant un idéal de définition \mathcal{J} tel que $\mathcal{J} / \mathcal{J}^2$ soit un (A / \mathcal{J}) -module de type fini, il est clair que les $A_i = A / \mathcal{J}^i$ vérifient les conditions de la prop. 4 ; leur limite projective étant A , on voit que la prop. 4 donne la description de *tous* les anneaux adiques du type considéré (et en particulier de tous les anneaux adiques noethériens).
- 2) Soit A un anneau adique noethérien, \mathcal{J} un idéal de définition de A , de sorte que $\mathcal{J} / \mathcal{J}^2$ est un (A / \mathcal{J}) -module de type fini ; tout A -module M de type fini est alors séparé et complet pour la topologie \mathcal{J} -adique (§ 3, n° 5, cor. 4 du lemme 2) ; si $M_i = M / \mathcal{J}^i M$, on a alors $M = \varprojlim M_i$ et les M_i vérifient les conditions du cor. 2 de la prop. 4.

Exemple. — Soient B un anneau, \mathcal{I} un idéal de B tel que $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ soit un module de type fini sur B/\mathcal{I} (ou sur B , ce qui revient au même) ; posons $A = \varprojlim B/\mathcal{I}^{n+1}$; A est le complété de l'anneau séparé associé à B muni de la topologie \mathcal{I} -préadique. Si $A_n = B/\mathcal{I}^{n+1}$, il est immédiat que les A_n vérifient les conditions de la prop. 4 ; on voit donc que A est un anneau adique, et si \mathcal{J} est l'adhérence, dans A , de l'image canonique de \mathcal{I} , \mathcal{J} est un idéal de définition de A et $\mathcal{J}/\mathcal{J}^2$ est isomorphe à $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ en tant que (A/\mathcal{J}) -module. De même, si N est un B -module de type fini, et si on pose $M_j = N/\mathcal{I}^{j+1}N$, $M = \varprojlim M_j$ est un A -module de type fini, isomorphe au complété du module séparé associé à N (pour la topologie \mathcal{I} -préadique).

3. Anneaux de séries formelles ses restreintes, convergentes...

Soient A un anneau topologique linéairement topologisé, séparé et complet ; soit (\mathcal{I}_λ) un système fondamental filtrant de voisinages ouverts de 0 dans A formé d'idéaux, de sorte que A s'identifie canoniquement à $\varprojlim A/\mathcal{I}_\lambda$. Pour tout λ , soit $B_\lambda = (A/\mathcal{I}_\lambda)[T_1, \dots, T_r]$, où les T_i sont des indéterminées ; il est clair que les B_λ forment un système projectif d'anneaux discrets. Nous poserons $A\{T_1, \dots, T_r\} = \varprojlim B_\lambda$, et nous allons voir que cet anneau topologique est indépendant du système fondamental d'idéaux (\mathcal{I}_λ) considéré. De façon précise, soit A' le sous-anneau de l'anneau des séries formelles $A[[T_1, \dots, T_r]]$ formé des séries formelles $\sum_\alpha c_\alpha T^\alpha$ ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbf{N}^r$) telles que $\lim c_\alpha = 0$ (suivant le filtre des complémentaires des parties finies de \mathbf{N}^r) ; pour tout voisinage V de 0 dans A , soit V' l'ensemble des $x = \sum_\alpha c_\alpha T^\alpha$ tels que $c_\alpha \in V$ pour tout α . On vérifie aussitôt que les V' forment un système fondamental de voisinages de 0 définissant sur A' une topologie d'anneau séparée ; nous allons définir un isomorphisme topologique canonique de $A\{T_1, \dots, T_r\}$ sur A' . Pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^r$ et tout λ , soit $\varphi_{\lambda\alpha}$ l'application de $(A/\mathcal{I}_\lambda)[T_1, \dots, T_r]$ dans A/\mathcal{I}_λ qui, à tout polynôme du premier anneau, fait correspondre le coefficient de T^α dans ce polynôme. Il est clair que les $\varphi_{\lambda\alpha}$ forment un système projectif d'homomorphismes d'anneaux, dont la limite projective.

