1 i 2 4 5

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY
91405 ORSAY Cédex

MATHÉMATIQUE
Bâtiment 425

Téléphone : 941. ____________

Orsay, le 16 novembre 1984

Cher Grothendieck,

Je t'adresse sous pli séparé un texte que j'ai rédigé à la demande de Deligne pour le séminaire Szpiro de l'an dernier sur Faltings. Les notes que j'avais de ton cours au Collège étaient incomplètes - il me manquait notamment la démonstration du théorème principal (prolongement de BTT), que j'ai eu un peu de mal à reconstituer. J'espère ne pas avoir été trop infidèle.

A l'occasion d'un groupe de travail qu'on fait à Orsay sur les conjectures de Beilinson (régulateurs et valeurs de fonctions L), je m'initie aux arcanes de la K-théorie supérieure, mais je m'aperçois que la théorie n'est pas dans un état entièrement satisfaisant. Par exemple, le formalisme dont on dispose à l'heure actuelle ne contient pas (comme cas particulier pour le K_o) celui développé dans SGA 6 ! Pour ce point, cela tient à ce que les gens (i.e. Quillen et al.) ont, pour des raisons qui m'échappent, préféré travailler avec des faisceaux cohérents ou localement libres plutôt qu'avec des complexes (pseudo-cohérents ou parfaits), ce qui ne simplifie pas les questions de fonctorialité. On peut sans doute arranger cela avec les techniques de complexes filtrés à la Waldhausen - qui reprennent en fait des définitions des K_i que tu avais suggérées dès 1968 si je me souviens bien. Il y a aussi des difficultés plus sérieuses qui viennent du manque de fondements adéquats sur la catégorie homotopique stable. Une illustration de ce fait est fournie par le problème de comparer la suite spectrale de Quillen (donnée par la filtration par la codimension du support) à celle de Brown-Gersten (donnée par la filtration canonique par les tronqués de la tour de Postnikov). En principe, les deux coïncident à partir de E_2 . Gillet prétend le vérifier dans un papier aux Proc. de la Conf. de K-théorie d'Evanston 1980, mais la démonstration me paraît incomplète. Il me semble que, pour bien comprendre la situation, on ait besoin d'un analogue homotopique de la catégorie dérivée filtrée. As-tu des idées là-dessus ? J'aimerais aussi pouvoir disposer d'une catégorie homotopique stable des faisceaux simpliciaux sur un topos (et de variantes filtrées ...) pour pouvoir étudier fonctoriellement les relations entre K_i globaux et K_i locaux. Il y a bien sûr des candidats, mais je ne sais pas trop quel est le bon, et comme j'imagine que ce sont des questions auxquelles tu as dû pas mal réfléchir depuis longtemps, je préfère te demander ce que tu en penses.

Bien à toi,

Luc