n° 288

CONTRE - REDACTION pour la REEDITION de

TOPOLOGIE GENERALE - chap.10

§1. - La structure uniforme de la $\mathfrak{S}$-convergence p.3

1 - La structure de la convergence uniforme p.3

2 - La $\mathfrak{S}$-convergence p.4

3 - Exemples de $\mathfrak{S}$-convergence. p.7

4 - Parties complètes de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ p.8

5 - Comportement de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ quand E,F,$\mathfrak{S}$ varient p.9

6 - La $\mathfrak{S}$-convergence dans les espaces d'applications continues p.11

§2. - Ensembles équicontinus p.15

1 - Définitions et critères généraux p.15

2 - Exemples p.18

3 - Propriétés fondamentales des ensembles équicontinus . p.20

4 - Ensembles compacts d'applications continues .... p. 22

§3. - Espaces fonctionnels spéciaux p.28

1 - Convergence compacte p.28

2 - Groupes d'homéomorphismes p.33

3 - Applications bornées, convergence bornée p.34

-:-:-:-:-:-:-:-:-

CONTRE-REDACTION pour la REEDITION de

TOPOLOGIE GENERALE, chap.10

Remords de Topologie générale :

Proposition A - Soient E un ensemble, E_i des espaces topologiques (resp. des espaces uniformes), f_i des applications de E dans les E_i, on munit E de la topologie (resp. la structure uniforme) la moins fine rendant les f_i continues (resp. uniformément continues). Alors :

a) Soit f une application d'un espace topologique (resp. d'un espace uniforme) F dans E. Pour que f soit continue (resp. uniformément continue) il faut et il suffit que les $f_i f$ le soient.

b) Soit Φ un filtre dans E. Pour que Φ converge vers un $x \in E$ (resp. soit un filtre de Cauchy) il faut et il suffit que pour tout i, $f_i(\Phi)$ converge vers $f_i(x)$ (resp. soit un filtre de Cauchy).

(Signalons qu'il faudrait aussi donner l'énoncé qui correspond à a) dans le cas d'une topologie sur E la plus fine qui rende continue des $f_i : E_i \longrightarrow E$, quand on a une application $E \longrightarrow F$; il faudrait aussi la caractérisation des parties ouvertes et des parties fermées de E. Mais dans ce chapitre, nous n'aurons pas à y référer).

A propos de la notion de précompacité. Comme cette notion est essentiellement une notion auxiliaire et intermédiaire, on a intérêt à la prendre la plus large possible. La condition de séparation imposée dans Bourbaki semble dans tous les cas un carcan inutile. Aussi on propose de modifier cette définition en errata, (l'espace uniforme E est dit précompact si le complété de l'espace séparé associé est compact), et d'y indiquer que le théorème 4 (critère de précompacité par l'existence de recouvrements finis par des ouverts arbitrairement petits) reste valable. De plus, il convient d'ajouter la proposition suivante :

Proposition 8 - Soit A une partie d'un espace uniforme E dont la structure est la moins fine des structures uniformes rendant uniformément continues des applications données f_i de E dans des espaces uniformes E_i. Pour que E soit précompact, il faut et il suffit que pour tout i, $f_i(A)$ le soit.

Nécessité évidente, pour la suffisance se ramener au cas où les E_i sont séparés et complets, et appliquer le théorème de Tychonoff.

---

§1. - La structure uniforme de la $\mathfrak{S}$-convergence.

Notations - Etant donnés deux ensembles E et F, nous désignerons par $\mathfrak{F}(E,F)$ l'ensemble F^E de toutes les applications de E dans F. Nous utiliserons la notion de filtre convergent dans des espaces non nécessairement séparés.

1. - La structure de la convergence uniforme.

Soient E un ensemble, F un espace uniforme . Pour tout entourage V de la structure uniforme de F, désignons par $\underline{W}(V)$ l'ensemble des couples (u,v) d'applications de E dans F tels que l'on ait $(u(x),v(x))\in V$ quel que soit $x \in E$. Lorsque V parcourt le filtre des entourages de F (ou un système fondamental d'entourages), les ensembles $\underline{W}(V)$ forment un système fondamental d'entourages d'une structure uniforme sur $\mathfrak{F}(E,F)$. En effet, ils satisfont de façon évidente à l'axiome (U_I') (Chap.II, §1) et si $V \subset V'$, on a $\underline{W}(V) \subset \underline{W}(V')$, donc les $\underline{W}(V)$ forment une base de filtre ; on a $\overset{-1}{\overline{\underline{W}(V)}} = \underline{W}(\overset{-1}{V})$, donc (U_{II}') est vérifié ; enfin, les relations "quel que soit x, $(u(x),v(x)) \in V$" et "quel que soit x, $(v(x),w(x)) \in V$" entraînent "quel que soit x, $u(x),w(x)) \in \overset{2}{V}$ " autrement dit on a $\overset{2}{\overline{\underline{W}(V)}} \subset \underline{W}(\overset{2}{V})$, ce qui démontre (U_{III}')..

Définition 1 - On dit que la structure uniforme sur l'ensemble $\mathfrak{F}(E,F)$ définie par la famille des ensembles $\underline{W}(V)$, où V parcourt le filtre des entourages de F, est la structure de la convergence uniforme On dit qu'un filtre Φ sur (E,F) converge uniformément vers un élément u_o, s'il converge vers u_o pour la topologie associée à la structure de la convergence uniforme. La topologie associée à la structure de la convergence uniforme est appelée topologie de la convergence uniforme.

On notera que cette topologie dépend de la structure uniforme de F, et non seulement de la topologie de F (cf. Exercice).

2. - La $\mathfrak{S}$ -convergence.

Soient E un ensemble, F un espace uniforme, $\mathfrak{S}$ un ensemble des parties de E. Pour toute partie A de E, et tout $u \in \mathfrak{F}(E,F)$, on désigne par $u|A$ l'élément de $\mathfrak{F}(A,F)$ restriction à A de l'application u.

Définition 2 - On appelle structure de la convergence uniforme dans les ensembles de $\mathfrak{S}$, ou simplement structure de la $\mathfrak{S}$ - convergence, la structure uniforme la moins fine sur $\mathfrak{F}(E,F)$ rendant uniformément continues les applications de restriction $u \longrightarrow u|A$ de $\mathfrak{F}(E,F)$ dans les espaces uniformes $\mathfrak{F}(A,F)$, munis de la structure de la convergence uniforme, lorsque A parcourt l'ensemble des parties de E appartenant à $\mathfrak{S}$. La topologie associée à la structure de la $\mathfrak{S}$ - convergence s'appelle la topologie de la $\mathfrak{S}$ -convergence, et un filtre Φ qui converge vers $u_0 \in \mathfrak{F}(E,F)$ pour cette topologie est dit converger vers u_0 uniformément dans les ensembles de $\mathfrak{S}$. On note $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ l'espace uniforme obtenu en munissant $\mathfrak{F}(E,F)$ de la structure de la $\mathfrak{S}$ -convergence.

Par abus de langage, si H est une partie quelconque de $\mathfrak{F}(E,F)$, on appelle structure de la $\mathfrak{S}$ -convergence sur l'ensemble H, la structure uniforme sur H induite par la structure de la $\mathfrak{S}$ -convergence sur $\mathfrak{F}(E,E)$, et la topologie sur H associée sera encore appelée topologie de la $\mathfrak{S}$ -convergence.

Il résulte aussitôt de la définition de la $\mathfrak{S}$ -convergence, et des remords de Top. Gén., qu'on a :

Proposition 1 - Soient $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties d'un ensemble E, F un espace uniforme.

a) Soit Φ un filtre dans $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Pour que Φ converge vers u_0, il faut et il suffit que pour tout $A \in \mathfrak{S}$, $u|A$ converge uniformément vers $u_o|A$ suivant le filtre Φ. Pour que Φ soit un filtre de Cauchy, il faut et il suffit que pour tout $A \in \mathfrak{S}$ le filtre image de Φ par l'application $u \longrightarrow u|A$ de $\mathfrak{F}(E,F)$ dans $\mathfrak{F}(A,F)$ soit un filtre de Cauchy pour la convergence uniforme.

b) Soit f une application d'un espace topologique (resp. d'un espace uniforme) H dans $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Pour que f soit continue (resp. uniformément continue), il faut et il suffit que pour tout $A \in \mathfrak{S}$, l'application $x \longrightarrow f(x)|A$ de H dans $\mathfrak{F}(A,F)$ soit continue (resp. uniformément continue), quand ce dernier espace est muni de la structure de la convergence uniforme.

c) Soit M une partie de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Pour que M soit précompact, il faut et il suffit que pour tout $A \in \mathfrak{S}$, l'ensemble $M|A$ des $u|A$ $(u \in M)$ soit une partie précompacte de $\mathfrak{F}(A,F)$ muni de la structure de la convergence uniforme.

Remarques - 1) D'après la définition 1, et la description générale d'un système fondamental d'entourages dans un espace uniforme dont la structure est définie comme la moins fine de celles qui rendent uniformément continues les applications f_i de l'ensemble $\mathfrak{F}$ dans des espaces uniformes $\mathfrak{F}_i$, on obtient un système fondamental d'entourages pour le $\mathfrak{S}$-convergence dans $\mathfrak{F}(E,F)$, en considérant, pour tout $A \in \mathfrak{S}$, et tout entourage V d'un système fondamental d'entourages de F, l'ensemble $\underline{W}(A,V)$ des couples (u,v) d'applications de E dans F tels que $(u(x),v(x)) \in V$ pour tout $x \in A$, et en prenant toutes les intersections finies d'ensembles de la forme $\underline{W}(A,V)$. Il s'ensuit aussitôt qu'on ne change pas cette structure en remplaçant $\mathfrak{S}$ par l'ensemble $\mathfrak{S}'$ des parties de E qui sont contenue dans la réunion d'un ensemble fini d'ensembles $A_i \in \mathfrak{S}$. Par suite, on peut toujours se ramener au cas où l'ensemble $\mathfrak{S}$ satisfait aux deux conditions suivantes :

(F'_{I}) Toute partie d'un ensemble de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$.

(F'_{II}) Toute réunion finie d'ensembles de $\mathfrak{S}$ appartient à $\mathfrak{S}$.

Lorsque (F'_{II}) est vérifiée on obtient un système fondamental d'entourages pour la $\mathfrak{S}$-convergence en prenant tous les ensembles $\underline{W}(A,V)$, A parcourant $\mathfrak{S}$ et V parcourant un système fondamental d'entourages de F.

On notera que (F'_{II}) implique que $\mathfrak{S}$ contient la partie vide de E (et en particulier n'est pas vide). Si $\mathfrak{S}$ est réduit à l'unique élément $\emptyset$, la $\mathfrak{S}$-convergence est la structure uniforme la moins fine sur $\mathfrak{F}(E,F)$, et la topologie associée est la topologie la moins fine sur cet ensemble.

2) D'après un remords de Topologie Générale (oublié au début de ce rapport), la topologie de la $\mathfrak{S}$ -convergence est aussi la moins fine de celles qui rendent continues les applications $u \longrightarrow u|A$ de $\mathfrak{F}(E,F)$ dans les espaces $\mathfrak{F}(A,F)$ ($A \in \mathfrak{S}$), munis de la topologie de la convergence uniforme.

3) Supposons qu'il existe $A \in \mathfrak{S}$, $A \neq \emptyset$. Considérons, pour tout $y \in F$, l'application $i(y)$ de E dans F qui est constante et a pour valeur y en tout point. Alors l'application $y \longrightarrow i(y)$ est un isomorphisme de l'espace uniforme F sur son image dans $\mathfrak{F}(E,F)$, comme le lecteur le vérifie aisément ; si F est séparé, $i(F)$ est fermé. (Ceci semble mûr pour le vidage).

4) Supposons que F soit séparé et que $\mathfrak{S}$ recouvre E. Alors si $u,v \in \mathfrak{F}(E,F)$ sont tels que $(u,v) \in \underline{W}(A,V)$ pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et tout entourage V de F, on a manifestement $u = v$. Donc $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est séparé.

L'ancienne rédaction donne de plus (page 4) diverses explications terminologiques, qui me semblent pouvoir avantageusement être laissées au "bon sens mathématique" du lecteur. Ce serait plutôt ici le lieu de remarquer que si $\mathfrak{S}$ augmente, la structure de la $\mathfrak{S}$-convergence devient plus fine - par exemple en remarque 3 .

3. - Exemples de $\mathfrak{S}$-convergence.

1. - Convergence uniforme sur une partie . Soit A une partie de E , et soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble de parties de E réduit à $\{A\}$. Alors la $\mathfrak{S}$-convergence s'appelle aussi la structure de la convergence uniforme sur A, et un filtre Φ sans $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ qui converge vers un $u_o \in \mathfrak{F}(E,F)$ pour la topologie associée est dit converger vers u_o uniformément sur A. Lorsque A = E, on retrouve la structure de la convergence uniforme définie au n°1.

II. - Convergence simple dans une partie. Soit E_o une partie de E, et soit $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties de E qui se réduisent à un élément de E_o (ou, ce qui revient au même en vertu de la remarque 1 du n°2, l'ensemble des parties finies de E contenues dans E_o). Alors la structure de la $\mathfrak{S}$-convergence s'appelle la structure de la convergence simple dans E_o et un filtre Φ dans $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ qui converge vers un $u_o \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ pour la topologie associée est dit converger vers u_o simplement dans E_o. En vertu de la proposition on voit qu'il revient au même de dire que pour tout $x \in E_o$, $u(x)$ tend vers $u_o(x)$ suivant le filtre Φ

Lorsque $E_o = E$, la structure uniforme de la convergence simple dans E_o est appelée simplement structure de la convergence simple. La topologie associée, appelée topologie de la convergence simple, n'est autre que la topologie produit dans F^E . Elle ne dépend donc que de la topologie de F et non de sa structure uniforme, contrairement à ce qui a lieu en général.

III. - Convergence compacte. Supposons que E soit un espace topologique, et prenons pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties compactes de E. La structure de la $\mathfrak{S}$-convergence est alors appelée structure de convergence compacte, la topologie associée est appelée topologie de la convergence compacte, les filtres convergents pour cette topologie sont dits converger uniformément sur tout compact. La structure de la convergence compacte est évidemment moins fine que la structure de la convergence uniforme, et lui est identique si E est compact ; et elle est plus fine que la structure de la convergence simple, et lui est identique si E est discret.

Lorsque E est un espace uniforme, on définit de même sur $\mathfrak{F}(E,F)$ la structure uniforme de la convergence précompacte, en prenant pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties précompactes de E. De même, si E est un espace métrique, on peut prendre pour $\mathfrak{S}$ l'ensemble des parties bornées de E, alors la structure de la $\mathfrak{S}$-convergence prend le nom de convergence bornée.

4. - Parties complètes de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$

Proposition 2 - Soient Φ un filtre dans $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ et $u_o \in \mathfrak{F}(E,F)$. Pour que Φ converge vers u_o, il faut et il suffit que Φ soit un filtre de Cauchy pour la $\mathfrak{S}$-convergence et que Φ converge vers u_o simplement dans $E_o = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$.

La condition est évidemment nécessaire, la structure de la convergence simple dans E_o étant moins fine que la $\mathfrak{S}$-convergence. Supposons réciproquement que Φ est un filtre de Cauchy pour la $\mathfrak{S}$-convergence et converge vers u_o simplement dans E_o. Soient V un entourage fermé de F, A un élément de $\mathfrak{S}$, il existe donc un $H \in \Phi$ tel que $u,v \in H$ implique $(u(x),v(x)) \in V$ pour tout $x \in A$. Par passage à la limite sur v, on en conclut (V étant fermé) $(u(x),u_o(x)) \in V$ pour $x \in A, u \in H$. Donc u_o est bien limite de Φ dans $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

<u>Corollaire</u> 1 - <u>Soit</u> H <u>une partie de</u> $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. <u>Pour que</u> H <u>soit complète</u>, <u>il faut et suffit que tout filtre de Cauchy dans</u> H <u>converge simplement dans</u> $E_o = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$ <u>vers une limite</u> $u_o \in H$.

C'est une conséquence immédiate de prop.2. On en tire :

<u>Corollaire</u> 2 - <u>Soient</u> $\mathfrak{S}_1$ <u>et</u> $\mathfrak{S}_2$ <u>deux ensembles de parties de</u> E <u>ayant même réunion et tels que</u> $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$, <u>et soit</u> H <u>une partie de</u> $\mathcal{F}(E,F)$. <u>Si</u> H <u>est complète pour la</u> $\mathfrak{S}_1$<u>-convergence</u>, <u>elle est complète aussi pour la</u> $\mathfrak{S}_2$<u>-convergence</u>.

<u>Corollaire</u> 3 - <u>Soit</u> H <u>une partie de</u> $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>telle que pour tout</u> $x \in E_o = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$, <u>l'adhérence de</u> H(x) <u>dans</u> F <u>soit complète</u>. <u>Alors l'adhérence de</u> H <u>est complète</u>.

Soit Φ un filtre de Cauchy, dans $\bar{H}$, alors pour tout $x \in E_o$ il existe un élément de F, soit v(x) , tel que $v(x) = \lim. u(x)$ (car $\Phi(x)$ sera un filtre de Cauchy dans $\overline{H(x)})$. Si $x \in E-E_o$, soit v(x) un point quelconque de F. Alors v est une application de E dans F, et en vertu de prop.1 c'est une limite de Φ . On a donc $v \in \bar{H}$, donc tout filtre de Cauchy dans $\bar{H}$ converge dans $\bar{H}$, C.Q.F.D.

En particulier, si F est complet, la condition du corollaire 3 est toujours vérifiée, d'où :

<u>Théorème</u> 1 - <u>Soient</u> E <u>un ensemble</u> , $\mathfrak{S}$ <u>un ensemble de parties de</u> E, F <u>un espace uniforme complet</u>, <u>alors</u> $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>est complet</u>.

<u>Exercices</u>-1) Réciproque du th.1 quand il existe un $A \in \mathfrak{S}$, $A \neq \emptyset$.
2) Montrer que l'espace séparé associé à $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ s'identifie à $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E_o,F_o)$, où E_o est la réunion de $\mathfrak{S}$ et F_o l'espace séparé associé à F.

5. - <u>Comportement de</u> $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>quand</u> E,F, $\mathfrak{S}$ <u>varient</u>.

<u>Proposition</u> 3 - <u>Soient</u> E_1, E_2 <u>deux ensembles</u>, F <u>un espace uniforme</u>

$\mathfrak{S}_i$ un ensemble de parties de E_i $(i = 1, 2)$. Considérons la bijection canonique de $\mathfrak{F}(E_1 \times E_2, F)$ sur $\mathfrak{F}(E_1, \mathfrak{F}(E_2, F))$. Cette bijection est un isomorphisme d'espaces uniformes de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2}(E_1 \times E_2, F)$ sur $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}_1}(E_1, \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}_2}(E_2, F))$ (où $\mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_2$ désigne l'ensemble des parties de $E_1 \times E_2$ qui sont de la forme $A_1 \times A_2$, avec $A_i \in \mathfrak{S}_i$).

Soient V un entourage de F, A_i $(i = 1, 2)$ un élément de $\mathfrak{S}_i$. Il résulte aussitôt des définitions que $\underline{W}(A_1 \times A_2, V) = \underline{W}(A_1, \underline{W}(A_2, V))$, d'où résulte notre assertion.

Proposition 4 - a) Soient E un ensemble muni d'un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties F, F' deux espaces uniformes, f une application uniformément continue de F dans F'. Alors l'application $u \longrightarrow f \circ u$ de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ dans $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F')$ est uniformément continue.

b) Soient E un ensemble muni d'un ensemble de parties $\mathfrak{S}$, E' un ensemble muni d'un ensemble de parties $\mathfrak{S}'$, g une application de E' dans E telle que pour tout $A' \in \mathfrak{S}'$, $u(A')$ soit contenu dans la réunion d'un nombre fini d'ensembles A_i appartenant à $\mathfrak{S}$. Alors l'application $u \longrightarrow u \circ g$ de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ dans $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}'}(E',F)$ est uniformément continue.

c) Soient E, F deux ensembles, $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles, $(F_j)_{j \in J}$ une famille d'espaces uniformes. On se donne, pour tout $i \in I$, un ensemble $\mathfrak{S}_i$ de parties de E_i et une application g_i de E_i dans E et, pour tout $j \in J$, une application f_j de F dans F_j. On munit E de l'ensemble $\mathfrak{S}$ de parties, réunion des $g_i(\mathfrak{S}_i)$, et on munit F de la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues les applications f_j. Alors la structure de la $\mathfrak{S}$ - convergence sur $\mathfrak{F}(E,F)$ est la moins fine des structures uniformes sur cet ensemble rendant uniformément

ment

continues les applications $u \longrightarrow f_j \circ u \circ g_i$ de $\mathfrak{F}(E,F)$ dans les $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}_i}(E_i,F_j)$.

Cette proposition résulte facilement de la description d'un système fondamental d'entourages pour une structure de $\mathfrak{S}$-convergence, donnée au n°2 , remarque 1. Signalons le cas particulier suivant de c) :

Corollaire - Soient E un ensemble, $(F_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces uniformes, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E. Alors la bijection canonique de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E, \prod_i F_i)$ sur $\prod_i \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F_i)$ est un isomorphisme d'espaces uniformes ($\prod F_i$ étant muni de la structure uniforme produit).

6. - La $\mathfrak{S}$-convergence dans les espaces d'applications continues.

Soient E et F deux espaces topologiques, on désignera par C(E,F) l'ensemble des applications continues de E dans F. Si E est muni d'un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties, et si F est un espace uniforme, on désigne par $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ l'ensemble C(E,F) muni de la structure de la $\mathfrak{S}$-convergence En particulier, $C_s(E,F)$, $C_c(E,F)$, $C_u(E,F)$ désignent l'ensemble C(E,F) muni respectivement de la structure uniforme de la convergence simple, de la convergence compacte, et de la convergence uniforme.

Si $A \in \mathfrak{S}$ et si V est un entourage fermé de F, alors pour $u,v \in C(E,F)$, la relation $(u,v) \in W(A,V)$ équivaut à la relation $(u,v) \in W(\bar{A},V)$, comme on voit par passage à la limite dans la relation $(u(x),v(x)) \in V$ pour $x \in A$ (compte tenu que V est fermé, et u,v continues). Il en résulte que la structure de la $\mathfrak{S}$-convergence sur C(E,F) ne change pas si on remplace $\mathfrak{S}$ par l'ensemble des adhérences des $A \in \mathfrak{S}$. En particulier, si E_o est une partie partout dense de E, la structure de la convergence uniforme est, dans C(E,F), identique à la structure de la convergence uniforme dans E_o .

Soit E_o la réunion de $\mathfrak{S}$. Supposons E séparé. Si $u,v \in \mathcal{F}(E,F)$ appartiennent à tous les $\underline{W}(A,V)$ ($A \in \mathfrak{S}$, V entourage de F), u et v ont évidemment même restriction à E_o, et par suite ils sont identiques si E_o est dense dans E et u et v sont continues. Donc ;

<u>Proposition</u> 5 - <u>Soient</u> E <u>un espace topologique muni d'un ensemble de parties</u> $\mathfrak{S}$, F <u>un espace uniforme</u>. <u>Si</u> F <u>est séparé et la réunion</u> E_o <u>de</u> $\mathfrak{S}$ <u>dense dans</u> E, <u>alors</u> $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ <u>est séparé</u>.

En particulier, la topologie de la convergence simple dans une partie partout dense E_o de E fait de C(E,F) un espace séparé.

<u>Proposition</u> 6 - <u>Soient</u> E <u>un ensemble</u>, Φ <u>un filtre sur</u> E, F <u>un espace uniforme</u>. <u>L'ensemble</u> H <u>des applications</u> u <u>de</u> E <u>dans</u> F <u>telles que</u> u(Φ) <u>soit une base de filtre de Cauchy dans</u> F <u>est fermé dans</u> $\mathcal{F}(E,F)$ <u>muni de la topologie de la convergence uniforme</u>.

En effet, soit u_o une application de E dans F adhérente à H dans $\mathcal{F}(E,F)$. Pour tout entourage symétrique V de F, il existe une application $u \in H$ telle que $(u_o(x),u(x)) \in V$ pour tout $x \in E$; d'autre part, il existe par hypothèse un ensemble $M \in \Phi$ tel que, pour tout couple d'éléments x,y de M, on ait $(u(x),u(y)) \in V$. Comme on a $(u_o(x) ,u(x)) \in V$ et $(u(y),u_o(y)) \in V$, on en déduit que $(u_o(x),u_o(y))$ $\in \overset{3}{V}$ pour tout couple d'éléments de M, ce qui achève la démonstration

<u>Corollaire</u> - <u>Soient</u> E <u>un espace topologique</u>, F <u>un espace uniforme</u>. <u>L'ensemble des applications de</u> E <u>dans</u> F, <u>continues en un point donné</u> $x_o \in E$, <u>est fermé dans</u> $\mathcal{F}(E,F)$ <u>muni de la topologie de la convergence uniforme</u>.

En effet, dire qu'une application u de E dans F est continue en x_o revient à dire que l'image par u du filtre des voisinages $\mathcal{V}$ de x_o est une base de filtre de Cauchy dans F, puisque pour toute application u de E dans F, $u(x_0)$ est un point adhérent à $u(\mathfrak{U})$.

Théorème 2 - *Soient E un espace topologique, F un espace uniforme. Alors l'ensemble $C(E,F)$ des applications continues de E dans F est une partie fermée de $\mathcal{F}(E,F)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.*

En effet, pour tout $x \in E$, l'ensemble des applications de E dans F qui soht continues en x est fermé dans $\mathcal{F}(E,F)$ (cor. à la prop.6), donc l'intersection $C(E,F)$ de ces ensembles est aussi fermé .

Corollaire 1 - *Si F est un espace uniforme domplet, $C_u(E,F)$ est complet.*

En effet, $C_u(E,F)$ est un sous-espace uniforme fermé de $\mathcal{F}(E,F)$ muni de la convergence uniforme, qui est complet en vertu du théorème 1 .

Corollaire 2 - *L'espace $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est fermé dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ pourvu que toute application de E dans F dont la restriction à tout $A \in \mathfrak{S}$ est continue, soit continue. S'il en est ainsi, et si F est complet , $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est complet.*

Soit u un élément de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ adhérent à $C(E,F)$. Alors pour tout $A \in \mathfrak{S}$, $u|A$ est adhérent à $C(A,F)$ dans $\mathcal{F}(A,F)$ muni de la structure de la convergence uniforme, et par suite $u|A$ est continue (th.2). La première assertion du corollaire 2 s'ensuit, donc aussi la seconde, compte tenu du théorème 1.

La condition du corollaire 2 est vérifiée par exemple lorsque $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties compactes de E, et que E est de plus métrisable ou localement compact.

Remarques - 1) En général l'ensemble $C(E,F)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{F}(E,F)$ muni de la topologie de la convergence simple ; en d'autres termes, une limite simple de fonctions continues peut être discontinue (cf. exercice 2a).

2) un filtre sur $C(E,F)$ peut converger simplement vers une fonction continue sans converger uniformément (cf. exercices 3 et 4).

3) Si E est un espace uniforme, un raisonnement tout à fait analogue à celui de la proposition 1 montre que l'ensemble des applications uniformément continues de E dans F est fermé dans $\mathcal{F}(E,F)$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Proposition 7 - Soient E un espace topologique, F un espace uniforme. Alors l'application $(u,x) \longrightarrow u(x)$ de $C_u(E,F)$ dans F est continue.

En effet, soient u_o une application continue de E dans F, x_o un point de E, V un entourage symétrique de F. L'ensemble T des applications continues u de E dans F telles que $(u(x),u_o(x)) \in V$ pour tout $x \in E$ est un voisinage de u_o dans $C_u(E,F)$. Comme d'autre part u_o est continue, il existe un voisinage U de x_o dans E tel que $(u_o(x),u_o(x_o)) \in V$ pour tout $x \in U$. On a par suite $(u(x),u_o(x_o)) \in \overset{2}{V}$ pour $(u,x) \in T \times U$, ce qui démontre la proposition.

§2 - Ensembles équicontinus.

1. - Définitions et critères généraux.

Définition 1 - Soient E un espace topologique, F un espace uniforme, On dit qu'une partie H de $\mathcal{F}(E,F)$ est équicontinue en un point x_o de E, si, pour tout entourage V de F, il existe un voisinage U de x_o tel que $x \in U$ et $u \in H$ impliquent $(u(x_o),u(x)) \in V$. On dit que H est équicontinu si H est équicontinu en tout point de E.

Définition 2 - Soient E et F deux espaces uniformes, On dit qu'une partie H de $\mathcal{F}(E,F)$ est uniformément équicontinue si, pour tout entourage V de F, il existe un entourage U de F tel que $(x,y) \in U$ et $u \in H$ impliquent $(u(x),u(y)) \in V$.

Il est clair que si H est un ensemble d'applications de E dans F équicontinu en x_o, alors toute $u \in H$ est continue en x_o ; donc si H est équicontinu, alors les $u \in H$ sont des applications continues, i.e. $H \subset C(E,F)$. De même, si H est uniformément équicontinu, alors tout $u \in H$ est une application uniformément continue de E dans F. Il est clair que si H est uniformément équicontinue, il est aussi équicontinu. Pour des cas où la réciproque est vraie, voir prop.1, cor.4 et prop.3.

Proposition 1 - Soient E un espace topologique (resp. un espace uniforme), H un ensemble, F un espace uniforme, f une application de $H \times E$ dans F. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes : (i) L'application de H dans $\mathcal{F}(E,F)$ définie par f transforme H en un ensemble d'applications qui est équicontinu en $x_o \in E$ (resp. en un ensemble uniformément équicontinu). (ii) L'application de E dans $\mathcal{F}(H,F)$ définie par f est continue en x_o (resp. uniformément continue) quand on munit $\mathcal{F}(H,F)$ de la structure de la convergence uniforme.

Supposons que E soit un espace topologique, et démontrons alors l'équivalence de (i) et (ii). En effet, on voit aussitôt que (i) et (ii) signifient tous deux que pour tout entourage V de F, il existe un voisinage U de x_0 tel que $x \in U$ et $u \in H$ impliquent $(f(u,x_0),f(u,x)) \in V$. On démontre de même que l'énoncé relatif au cas où E est un espace uniforme.

Les 3 corollaires suivants ne sont que des reformulations de la proposition 1.

Corollaire 1 - *Soient E un espace topologique (resp. un espace uniforme), H un ensemble muni d'un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties, F un espace uniforme, f une application de E dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(H,F)$. Pour que f soit continue ((resp. uniformément continue) il faut et il suffit que pour tout $A \in \mathfrak{S}$, l'ensemble des applications de E dans F de la forme $x \longrightarrow f(x)(u)$, où u parcourt A, soit équicontinu (resp. uniformément équicontinu).*

En vertu de § 1, prop.1 b) on est ramené au cas où $\mathfrak{S}$ est réduit à $\{H\}$, i.e. au cas ou $\mathcal{F}(E,F)$ est muni de la structure de la convergence uniforme. On peut interpréter f comme une application de $H \times E$ dans F (Ensembles ...), et il suffit alors d'appliquer la proposition 1.

En particulier, appliquons le corollaire précédent à l'application identique d'une partie E de $\mathcal{F}(E,F)$, muni d'une topologie (resp. d'une structure uniforme) arbitraire, dans $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$, on obtient le

Corollaire 2 - *Soient H un ensemble, F un espace uniforme, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de H, E une partie de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. Pour tout $u \in H$, soit $\tilde{u}$ l'application $v \longrightarrow v(u)$ de E dans F. Alors pour tout $A \in \mathfrak{S}$,* **l'ensemble $\widetilde{A}$ des $\check{u}$ pour $u \in A$ est une partie uniformément équicontinue** *et a fortiori équicontinue de $\mathcal{F}(E,F)$. Plus précisément, la structure* uniforme (resp. la topologie) de la $\mathfrak{S}$-convergence sur E est la moins fine des structures uniformes (resp. des topologies) pour lesquelles toute partie de $\mathcal{F}(E,F)$ de la forme $\widetilde{A}$ (avec $A \in \mathfrak{S}$) est uniformément équicontinu (resp. équicontinu).

Corollaire 3 - Soient E un espace topologique (resp. un espace uniforme), H une partie de $\mathcal{F}(E,F)$. Pour que H soit équicontinu (resp. uniformément continu) il faut et il suffit que l'application $x \longrightarrow \widetilde{x}$ de E dans $\mathcal{F}(H,F)$ soit continue (resp. uniformément continue) quand on munit ce dernier espace de la structure de la convergence uniforme.

On interprète l'application identique de H dans $\mathcal{F}(E,F)$ comme une application de HxE dans F (Ensembles ....) et on applique la prop 1.

Corollaire 4 - Soient E un espace topologique compact, F un espace uniforme. Alors tout ensemble équicontinu d'applications de E dans F est uniformément équicontinu.

On applique le corollaire 3, en notant qu'une application continue de l'espace compact E dans un espace uniforme est aussi uniformément continue.

Corollaire 5 - Soient E un espace topologique, F un espace uniforme, H une partie équicontinue de $\mathcal{F}(E,F)$. Munissons H de la topologie de la convergence simple. Alors l'application $(u,x) \longrightarrow u(x)$ de HxE dans F est continue.

En effet, cette application est composée des applications naturelles

$$(1) \qquad H\times E \longrightarrow H\times C_u(H,F) \longrightarrow F$$

où la première application est déduite de l'application identique de H sur H et de l'application $x \longrightarrow \widetilde{x}$ de E dans $C_u(H,F)$. Comme cette dernière est continue en vertu du corollaire 3, la première application dans (1) est continue. Il en est de même de la deuxième, en vertu de § 1, prop.7

donc aussi de la composée des deux.

La proposition suivante donne l'analogue du corollaire précédent, dans le cas de l'équicontinuité uniforme :

Proposition 2- Soient E et F deux espaces uniformes, H une partie de $\mathcal{F}(E,F)$ munissons H d'une structure uniforme plus fine que celle de la convergence uniforme. Pour que H soit uniformément équicontinue, il faut et il suffit que l'application $(u,x) \longrightarrow u(x)$ de $H \times E$ dans F soit uniformément continue.

Supposons H uniformément équicontinu , soit V un entourage de F, il existe donc un entourage U de E tel que $(x,y) \in U$ et $u \in H$ impliquent $(u(x),u(y)) \in V$. Soit $\underline{W}(V)$ l'entourage de H formé des couples (u,v) tels que $(u(x),v(x)) \in V$ pour tout $x \in E$. Si alors $(x,y) \in U$, $(u,v) \in \underline{W}(V)$, on a $(u(x),v(y)) \in \overset{2}{V}$, comme le montre la considération de la suite de points $u(x),u(y),v(y)$ dans F. Cela montre que l'application $(u,x) \longrightarrow u(x)$ est uniformément continue. inversement, supposons cette dernière condition satisfaite, donc pour tout entourage V de F il existe un entourage U de E et un entourage W de H tel que $(x,y) \in U$ et $(u,v) \in W$ impliquent $(u(x),v(y)) \in V$; faisant $u = v$, on voit que $(x,y) \in U$ implique $(u(x),u(y)) \in V$ pour tout $u \in H$, donc H est uniformément équicontinu.

2. - Exemples

Soient E un espace topologique (resp. un espace uniforme), F un espace uniforme. Tout ensemble fini d'applications continues (resp. uniformément continues) de E dans F est équicontinu (resp. uniformément équicontinu). Plus généralement, la réunion d'un ensemble fini de parties équicontinues (resp. uniformément équicontinues) de $\mathcal{F}(E,F)$ est une partie équicontinue (resp. uniformément équicontinue). Bien entendu, une partie d'un ensemble équicontinu (resp. uniformément équicontinu) d'applications est encore équicontinu (resp. uniformément équicontinu).

Proposition 3 - Soient E, E' deux espaces topologiques (resp. deux espaces uniformes), F, F' deux espaces uniformes, f une application continue (resp. uniformément continue) de E' dans E, g une application uniformément continue de F dans F', alors l'application $u \longrightarrow g \circ u \circ f$ de $\mathcal{F}(E,F)$ dans $\mathcal{F}(E',F')$ transforme ensembles équicontinus (resp. uniformément équicontinus) en ensembles équicontinus (resp. uniformément équicontinus).

La vérification de cette proposition à partir des définitions est immédiate.

Proposition 4 - Soient E et F deux groupes topologiques, munissons les de leur structure uniforme gauche. Soit H un ensemble de représentations de groupe de E dans F. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) H est équicontinu en l'élément neutre e de E (ii) H est équicontinu (iii) H est uniformément équicontinu.

Il suffit de prouver que (i) implique (iii). On obtient par définition un système fondamental d'entourages de F en prenant, pour tout voisinage V de e dans F, l'ensemble des couples (x,y) de points de F tels que $x^{-1}y \in V$. Pour un tel entourage, on doit donc trouver un voisinage U de e dans E tel que pour tout couple (a,b) de points de E tel que $a^{-1}b \in U$, et tout $u \in H$ on ait $u(a)^{-1}u(b) \in V$. Or, on a $u(a)^{-1}u(b) = u(a^{-1}b)$, et il suffit donc de prendre U tel que $u(U) \subset V$ pour tout $u \in H$, ce qui est possible en vertu de l'équicontinuité de H en e.

3. - Propriétés fondamentales des ensembles équicontinus.

Théorème 1 - Soient E un espace topologique (resp. uniforme), F un espace uniforme, H une partie équicontinue (resp. uniformément équicontinue) de $\mathcal{F}(E,F)$. Alors sur H, les structures uniformes de la convergence compacte (resp. de la convergence précompacte), de la convergence simple, et de la convergence simple dans une partie E_o de E dense dans E, sont identiques.

Il suffit de démontrer que sur H, la structure uniforme de la convergence simple dans E_o est plus fine que la convergence compacte (resp. précompacte), i.e. que pour tout entourage V de F et toute partie compacte (resp. précompacte) K de E, il existe un entourage V' de F et une partie finie A de E_o telle que pour $u,v \in H$, la relation $(u,v) \in \underline{W}(A,V')$ implique $(u,v) \in \underline{W}(K,V)$. Soit V' un entourage symétrique fixe de F. Supposons d'abord K compact. A cause de l'équicontinuité de H, il existe pour tout $x \in K$, un voisinage U_x de x tel que $y \in U_x$, et $u \in H$ impliquent $(u(x),u(y)) \in V'$. Soit $(U_{x_i})_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie de tels voisinages recouvrant K, et pour tout i soit y_i un élément de $E_o \cap U_{x_i}$. Soit enfin A l'ensemble des y_i. Je dis que pour $u,v \in H$, la relation $(u,v) \in \underline{W}(A,V')$ implique $(u,v) \in \underline{W}(K,\overset{5}{V'})$ (ce qui achève la démonstration en prenant V' tel que $\overset{5}{V'} \subset V$). En effet, soit $x \in K$, pour prouver que $u(x)$ et $v(x)$ sont voisins d'ordre V', on notre qu'il existe un i tel que $x \in U_{x_i}$, et on considère la suite de points $u(x), u(x_i), u(y_i), v(y_i), v(x_i), v(x)$. Deux points consécutifs dans cette suite sont voisins d'ordre V', donc les points extrêmes sont bien voisins d'ordre $\overset{5}{V'}$.

Dans le cas où E est un espace uniforme, H uniformément continue, K précompact, on choisit encore V' tel que $\overset{5}{V'} \subset V$, on remarque qu'il existe un entourage U de E tel que $(x,y) \in U$ et $u \in H$ impliquent

$(u(x),u(y)) \in V'$, on recouvre K par un nombre fini d'ensembles U_i petits d'ordre U, on choisit dans chaque U_i un y_i appartenant à E_o, et on prend l'ensemble A des y_i. On prouve alors comme plus haut que pour $u,v \in H$, la relation $(u,v) \in \underline{W}(A,V')$ implique $(u,v) \in \underline{W}(K,\overset{5}{V'})$, ce qui achève la démonstration.

Théorème 2 - Soient E un espace topologique (resp. un espace uniforme) H une partie équicontinue (resp. uniformément équicontinue) de $\mathcal{F}(E,F)$ Alors son adhérence dans $\mathcal{F}(E,F)$ pour la topologie de la convergence simple est encore équicontinue (resp. uniformément équicontinue).

Soit V un entourage fermé de F. Si H est équicontinu, il existe pour tout $x_o \in E$ un voisinage U de x_o tel que $(u(x),u(x_o)) \in V$ pour tout $x \in U$ et $u \in H$. Cette relation sera encore valable, par passage à la limite, pour $x \in U$ et u dans l'adhérence $\bar{H}$ de H dans $\mathcal{F}(E,F)$ (pour la convergence simple), V étant fermé. Cela prouve que cette adhérence est aussi équicontinue. On procède de façon toute analogue dans le cas où H est uniformément équicontinu.

Corollaire - Sous les conditions du théorème 2, l'adhérence $\bar{H}$ de H dans $\mathcal{F}(E,F)$ pour la topologie de la convergence simple est identique à l'adhérence de H dans C(E,F) pour la topologie de la convergence compacte. (resp. pour la topologie de la convergence précompacte).

En effet, en vertu du théorème 2, $\bar{H}$ est équicontinu (resp. uniformément équicontinu), à fortiori contenu dans C(E,F), et tout revient à montrer que H est dense dans $\bar{H}$ pour la topologie de la convergence compacte (resp. pour la topologie de la convergence précompacte). Or sur $\bar{H}$ la topologie de la convergence simple est identique à la topologie de la convergence compacte (resp. précompacte) en vertu du th.1, donc H est bien dense dans $\bar{H}$ pour cette dernière.

Signalons encore le fait suivant, spécial à l'équicontinuité uniforme

Proposition 5 - Soient E et F deux espaces uniformes, H un ensemble uniformément continu d'applications de E dans F. Soient $\hat{E}$ et $\hat{F}$ les complétés des espaces séparés associés, et $\hat{H}$ l'ensemble des applications $\hat{u}$ de $\hat{E}$ dans $\hat{F}$ déduites des applications $u \in H$ par "prolongement canonique". Alors $\hat{H}$ est aussi uniformément équicontinu.

On se ramène aussitôt au cas où E et F sont séparés. Un système fondamental d'entourages de $\hat{F}$ est formé des adhérences, dans $\hat{F}\times\hat{F}$, des entourages V de F. Pour un tel, V, soit U un entourage de E tel que $(x,y) \in U$ et $u \in H$ impliquent $(u(x),u(y)) \in V$. Par suite, $(x,y)\in \overline{U}$ et $u \in H$ impliquent $(\hat{u}(x),\hat{u}(y)) \in \overline{V}$. Comme $\overline{U}$ est un entourage de $\hat{E}$, la proposition 5 est démontrée.

4. - Ensembles compacts d'applications continues.

Proposition 6 - Soient E un ensemble, F un espace uniforme, $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ deux ensembles de parties de E telles que $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$, ayant même réunion E_0. Soit H une partie précompacte de $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}_2}(E,F)$, alors sur H la structure uniforme de la $\mathfrak{S}_2$-convergence coïncide avec la structure de la $\mathfrak{S}_1$-convergence (et en particulier avec la structure de la convergence simple dans E_0).

Soit F_0 l'espace séparé complet associé à F. Il est immédiat que la structure de la $\mathfrak{S}_i$-convergence sur $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est l'image réciproque, par l'application naturelle de $\mathcal{F}(E,F)$ dans $\mathcal{F}(E_0,F_0)$ de la structure de la $\mathfrak{S}_i$-convergence sur $\mathcal{F}(E_0,F_0)$ (cela résulte par exemple de la prop.4; c) du § 1). En appliquant la prop.B du remords de Top. Gén., on est donc ramené au cas où F est séparé et complet et où $E = E_0$. Alors $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}_2}(E,F)$ est séparé et complet, donc l'adhérence $\overline{H}$ de H dans cet espace est compacte, s'identifiant au complété de l'espace précompact H. Par suite, la structure uniforme de $\bar{H}$ est identique à toute structure uniforme *séparée* moins fine, et en particulier à la structure de la $\mathfrak{S}_1$-convergence, ce qui démontre la proposition.

Proposition 7 - Soient E *un espace topologique,* F *un espace uniforme* H *une partie précompacte de* $C_u(E,F)$. *Alors* H *est équicontinu, et sur* H *la structure de la convergence uniforme est identique à la structure de la convergence simple dans une partie dense de* E. *Si de plus* E *est un espace uniforme et si tout* u *élément de* H *est uniformément continu, alors* H *est uniformément équicontinu.*

En vertu du cor.3 à la prop.1, l'équicontinuité (resp. uniforme équicontinuité) de H signifie que l'application $x \longrightarrow \tilde{x}$ de E dans $C_u(H,F)$ est continue (resp. uniformément continue). Or l'image $\tilde{E}$ de E dans $C_u(H,F)$ est uniformément équicontinu (cor.2 à prop.1), donc comme H est précompact, la structure de la convergence uniforme sur $\tilde{E}$ est identique à la structure de la convergence simple (théorème 1). Il suffit donc de montrer que l'application $x \longrightarrow \tilde{x}$ est continue (resp. uniformément continue) quand on munit C(H,F) de la convergence *simple*, ce qui signifie précisément que les applications $u \in H$ sont continues (resp. uniformément continues). Reste à prouver que sur H la structure de la convergence uniforme est identique à la structure de la convergence simple dans une partie partout dense E_o de E. Or H étant précompact pour la convergence uniforme, cette dernière structure sur H est identique à la convergence simple (prop.6), qui à son tour, en vertu du théorème 1, est identique à la structure de la convergence simple dans E_o (puisque H est équicontinu).

Corollaire 1 - Soient E *un espace topologique* (resp. *un espace uniforme*), $\mathfrak{S}$ *un ensemble de parties de* E, H *un ensemble* d'applications continues (resp. uniformément continues) de E dans F. Pour que H soit précompact pour la $\mathfrak{S}$-convergence, il faut que pour tout $A \in \mathfrak{S}$, l'ensemble $H|A$ des restrictions à A des $u \in H$ soit équicontinu (resp. uniformément équicontinu), et que pour tout $x \in E_0 = \bigcup_{A \in \mathfrak{S}} A$, l'ensemble $H(x)$ soit une partie précompacte de F. Si les $A \in \mathfrak{S}$ sont compacts (resp. précompacts), ces conditions sont aussi suffisantes pour que H soit précompact pour la $\mathfrak{S}$-convergence.

En effet, pour que H soit précompact, pour la $\mathfrak{S}$-convergence, il faut et il suffit que pour tout $A \in \mathfrak{S}$, l'ensemble $H|A$ soit précompact dans $\mathfrak{F}(A,F)$ pour la convergence uniforme (§ 1, prop.1 c). Cela implique en vertu de prop.7 que $H|A$ est équicontinu (resp. uniformément équicontinu) ; de plus comme pour tout $x \in E_0$, l'application $u \longrightarrow u(x)$ de H dans F est uniformément continue, elle transforme H en une partie précompacte $H(x)$ de F. Inversement, si $H|A$ est équicontinu (resp. uniformément continue), et A compact (resp. précompact) alors sur $H|A$ la structure de la convergence uniforme est identique à la structure de la convergence simple (théorème 1) ; si donc $H(x)$ est précompact pour tout $x \in E_0$, il s'ensuit que $H|A$ est précompact pour la convergence simple (§ 1, prop.1, c), donc précompact pour la convergence uniforme, ce qui prouve que H est précompact pour la $\mathfrak{S}$-convergence.

Corollaire 2 - Soient E,F,G, trois espaces uniformes, f une application de ExF dans G telle que pour tout $x \in E$, l'application $\widetilde{x} : y \longrightarrow f(x,y)$ soit uniformément continue et transforme F en une partie précompacte de G, et que pour tout $y \in F$, l'application $\widetilde{y} : x \longrightarrow f(x,y)$ soit uniformément continue et transforme E en une partie précompacte de G. Soient $\mathfrak{S}$ (resp. $\mathcal{C}$) un ensemble de parties de E (resp. F). Alors les conditions suivantes sont toutes équivalentes :

a) Pour tout $A \in \mathfrak{S}$, l'ensemble $\tilde{A}$ des $\tilde{x}$ avec $x \in A$ est une partie précompacte de $C_u(F,G)$.

a') Pour tout $b \in \mathfrak{T}$, l'ensemble $\tilde{B}$ des $\tilde{y}$ avec $y \in B$ est une partie précompacte de $C_u(E,G)$.

b) Pour tout $A \in \mathfrak{S}$, la restriction à A de l'application $x \longrightarrow \tilde{x}$ de E dans $C_u(F,G)$ est uniformément continue.

b') Pour tout $B \in \mathfrak{T}$, la restriction à B de l'application $y \longrightarrow \tilde{y}$ de F dans $C_u(E,G)$ est uniformément continue.

c) Pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et tout $B \in \mathfrak{T}$, la restriction de f à $A \times B$ est uniformément continue.

Sous ces conditions, pour tout $A \in \mathfrak{S}$ et tout $B \in \mathfrak{T}$, $f(A,B)$ est une partie précompacte de G.

On voit aussitôt, en vertu de § 1, prop.1, qu'on peut se borner au cas où $\mathfrak{S}$ est réduit à $\{E\}$ et $\mathfrak{T}$ est réduit à $\{F\}$. a) implique b), car $\tilde{E}$ étant une partie précompacte de $C_u(F,G)$, sa structure uniforme est identique à celle de la convergence simple (prop.6), et comme l'application $x \longrightarrow \tilde{x}$ de E dans $\tilde{E}$ est évidemment uniformément continue pour cette dernière (les applications $x \longrightarrow f(x,y)$ de E dans G étant uniformément continues), c'est une application uniformément continue de E dans $C_u(F,G)$. b) implique a') car b) signifie que $\tilde{F}$ est une partie uniformément équicontinue de $C_u(E,G)$, et comme par hypothèse les $F(x)$ $(x \in E)$ sont des parties précompactes de F, le corollaire 1 s'applique. Par raison de symétrie a') implique b') et b') implique a), ce qui prouve que a), b), a'), b') sont équivalents. Ces conditions impliquent c), car f est composée des applications $E \times F \longrightarrow \widetilde{E \times F} \longrightarrow G$.

Ces applications sont uniformément continues ($\tilde{E}$ étant muni de la structure de la convergence uniforme), puisque $E \longrightarrow \tilde{E}$ l'est en vertu de b), et $\tilde{E} \times F \longrightarrow G$ l'est en vertu de prop.2, puisque $\tilde{E}$ est uniformément équicontinu en vertu de b'). Inversement, si f est uniformément continue, (ne serait-ce que pour le produit de la structure uniforme donnée de E par la structure uniforme discrète sur F), il résulte aussitôt des définitions que F est uniformément équicontinu, d'où la condition b). Cela achève de démontrer le cor.2. (N.B. - Ce corollaire est surtout utile quand E et F sont des E.V.T, u une forme bilinéaire séparément continue, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{T}$ des ensembles de parties bornées donc faiblement précompactes de E et F).

Proposition 8 - Soient E un espace topologique (resp. un espace uniforme), F un espace uniforme séparé, H un ensemble d'applications continues (resp. uniformément continues) de E dans F. Supposons que H soit équicontinu (resp. uniformément équicontinu) et que pour tout $x \in E$, l'ensemble $H(x)$ soit une partie relativement compacte de F. Alors H est relativement compact dans $C(E,F)$ pour la topologie de la convergence compacte (resp. pour la topologie de la convergence précompacte).

En vertu du théorème 2, l'hypothèse faite sur H sera encore vérifiée pour l'adhérence de H dans $\mathfrak{F}(E,F)$ pour la topologie de la convergence simple. On peut donc supposer H fermé pour cette topologie. Comme pour tout $x \in E$, l'adhérence de $H(x)$ est compacte et à fortiori complète, il s'ensuit que H est complet pour n'importe quelle structure de $\mathfrak{S}$-convergence (§1, prop.2, cor.3), en particulier pour la convergence compacte (resp. précompacte). D'autre part, H est précompact pour cette structure, en vertu du corollaire 1. Comme H est séparé, et complet, il s'ensuit que H est compact, ce qui achève la démonstration.

Théorème 3 - Soient E un espace localement compact, F un espace uniforme, H une partie de $C_c(E,F)$. Pour que H soit relativement compact, il faut et il suffit que H soit équicontinu, et que pour tout $x \in X$, l'ensemble $H(x)$ soit relativement compact dans F.

La condition est suffisante en vertu de prop.8, elle est nécessaire en vertu de prop.7, cor.1, car comme tout point de E admet un voisinage compact, le fait que $H|K$ soit équicontinu pour tout compact K implique déjà que H soit équicontinu.

Exercice - Soient E un espace topologique, $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E. On suppose que la topologie T_o de E est la plus fine des topologies T telles que les applications identiques des $A \in \mathfrak{S}$ (munis de la topologie induite par T_o) dans E (muni de T) soit continue, i.e. qu'une partie U de E qui induit sur tout $A \in \mathfrak{S}$ une partie relativement ouverte est ouverte. Soient alors F un espace uniforme, H un ensemble d'applications de E dans F. Montrer que pour que H soit équicontinu, il faut et il suffit que pour tout $A \in \mathfrak{S}$, l'ensemble $H|A$ soit équicontinu. En conclure que si H est précompact pour la $\mathfrak{S}$-convergence, il est équicontinu. En conclure que si les $A \in \mathfrak{S}$ sont compacts, alors les conditions suivantes sur H sont équivalentes ; (i) H est précompact dans $C_c(E,F)$ (ii) H est précompact dans $C_{\mathfrak{S}}(E,F)$ (iii) H est équicontinu, et $H(x)$ est précompact dans F pour tout $x \in E$. Donner aussi l'énoncé analogue pour le critère de compacité relative de H dans $C_c(E,F)$ (F étant supposé séparé).

Montrer que la condition imposée à $\mathfrak{S}$ est vérifiée si E est métrisable, et si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des parties compactes de E, ou l'ensemble des parties compactes qui sont formées de l'ensemble des points d'une suite convergente et de sa limite.

§3. - Espaces fonctionnels spéciaux

1. - La convergence compacte.

Théorème 1 - *Soient E un espace topologique, F un espace uniforme. Pour tout couple (K,U formé d'une partie compacte K de E et d'une partie ouverte U de F, soit $\Omega(K,U)$ l'ensemble des applications continues u de E dans F telles que $u(K) \subset U$. Alors les ensembles de la forme $\Omega(K,U)$ engendrent* (chap.I, §2), *la topologie de la convergence compacte sur* C(E,F).

Soient F_o l'espace uniforme séparé associé à F. La topologie de la convergence compacte sur C(E,F) est la topologie la moins fine rendant continues les applications naturelles de C(E,F) dans les espaces $C_u(K,F_o)$ où K parcourt les parties compacte de E. Par suite, un système de générateurs de la topologie de $C_c(E,F)$ s'obtient en prenant pour tout K un système de générateurs de la topologie de $C_u(K,F_o)$, et prenant les images réciproques dans C(E,F) de toutes les parties appartenant aux systèmes de générateurs envisagés dans tous les $C_u(K,F)$. Comme les ouverts U de F sont les images inverses, par l'application naturelle $F \longrightarrow F_o$, des ouverts U_o de F_o, et que pour $K' \subset K$, $\Omega(K,U)$ est manifestement l'image réciproque, dans C(E,F), de l'ensemble $\Omega(K,U_o)$ dans $C(K',F_o)$, on voit qu'il suffit de prouver le théorème quand E est compact, F séparé ce que nous supposons désormais.

Prouvons que l'ensemble $\Omega(K,U)$ est ouvert dans $C_c(E,F)$. Soit u_o un point de cet ensemble ; comme $u_o(K)$ est compact (chap.II, §4, prop.1) et contenu dans l'ensemble ouvert U, il existe un entourage symétrique V de F tel que $V(u_o(K)) \subset U$ (chap.II, §4, prop.1). Soit alors T le voisinage de u_o dans $C_c(E,F)$ formé des applications continues u de E dans F telles que $(u(x), u_o(x)) \in V$ pour tout $x \in K$. On a évidemment, pour ces applications , $u(K) \subset V(u_o(K)) \subset U$, donc $u \in \Omega(K,U)$, d'où $T \subset \Omega(K,U)$ qui prouve que $\Omega(K,U)$ est ouvert.

Réciproquement, soient $u_o \in C_c(E,F)$, montrons que tout voisinage de u_o contient l'intersection d'un nombre fini de voisinages de la forme $\Omega(K,U)$. On peut supposer que le voisinage donné S de u_o est l'ensemble des $u \in C_c(E,F)$ telles que $(u(x),u_o(x)) \in V$ pour tout $x \in E$, où V est un entourage donné de F. Comme u_o est continue dans E, elle est uniformément continue (chap.II, §4, th.2) ; soit V_1 un entourage symétrique ouvert de F tel que $\overset{2}{V_1} \subset V$. Il existe un recouvrement de E par un nombre fini d'ensembles compacts K_i ($1 \leq i \leq n$) tels que $u_o(K_i)$ soit petit d'ordre V_1 pour tout i. Soit U_i l'ensemble ouvert $V_1(u_o(K_i))$, et soit u une application continue de E dans F appartenant à l'intersection des n ensembles $\Omega(K_i,U_i)$ (qui contiennent manifestement u_o). Alors pour tout $x \in K_i$, $u_o(x)$ et $u(x)$ appartiennent à U_i, donc sont voisins d'ordre V_1, donc voisins d'ordre V. Comme tout $x \in E$ appartient à un K_i au moins, il s'ensuit bien que $u \in S$, ce qui achève la démonstration.

Ce résultat conduit à poser la définition suivante :

Définition 1 - Soient E et F des espaces topologiques (non nécessairement uniformisables) . Pour tout couple (K,U) formé d'une partie compacte K de E et d'une partie ouverte U de F, soit $\Omega(K,U)$ l'ensemble des $u \in C(E,F)$ telles que $u(K) \subset U$. On appelle topologie de la convergence compacte dans $C(E,F)$ la topologie engendrée par l'ensemble des parties de la forme $\Omega(K,U)$. L'espace topologique obtenu en munissant $C(E,F)$ de cette topologie est noté $C_c(E,F)$.

Lorsque F est un espace uniforme, le théorème 1 prouve la compatibilité de cette définition avec la définition donnée dans le §1, $n^o 2$

La topologie de la convergence compacte dans $C(E,F)$ est plus fine que la topologie de la convergence simple, qui est en effet la topologie engendrée par les parties de $C(E,F)$ de la forme $\Omega(K,U)$, où K est *réduit à un point*. Par suite, *si F est séparé*, $C_c(E,F)$ *est séparé*

Théorème 2 - *Soient* E, F, G *trois espaces topologiques*, f *une application de* $E \times F$ *dans* G. *Pour tout* $x \in E$, *soit* $\tilde{x}$ *l'application de* F *dans* G *définie par* $\tilde{x}(y) = f(x,y)$. *Si* f *est continue, alors l'application* $x \longrightarrow \tilde{x}$ *est une application continue de* E *dans* $C_c(F,G)$. *La réciproque est vraie si* F *est localement compact*.

Supposons que f soit continue, montrons que l'application $f' : x \longrightarrow \tilde{x}$ l'est. Comme la topologie de $C_c(F,G)$ est engendrée par les ensembles de la forme $\Omega(K,U)$, où K est une partie compacte de F et U une partie ouverte de G, la continuité de f' signifie que pour tout couple (K,U), l'ensemble $V = f'^{-1}(\Omega(K,U))$ des $x \in E$ tels que $f(x,y) \in U$ pour tout $y \in K$ est ouvert. Soit donc $x_o \in V$. Pour tout $y \in K$ on a $f(x_o,y) \in U$, donc comme f est continue il existe un voisinage V_y de x_o et un voisinage W_y de y tel que $f(V_y \times W_y) \subset U$. Comme K est compact, il existe un nombre fini de points y_i de K $(1 \leqslant i \leqslant n)$ tels que les ensembles W_{y_i} recouvrent K. Soit V' l'intersection des n voisinages V_{y_i} de x_o, c'est un voisinage de x_o, et si $x \in V'$, $y \in K$ on a $f(x,y) \in U$ puisque y est contenu dans un des W_{y_i} et que $x \in V_{y_i}$. On a donc bien $V' \subset V$, donc V est un voisinage de chacun de ces points x_o, donc est ouvert.

Réciproquement, supposons f' continue, et F localement compact, montrons que f est continue. Soient $x_o \in E$, $y_o \in F$, U un voisinage ouvert de $f(x_o,y_o)$, prouvons qu'il existe un voisinage V de x_o et un voisinage W de y_o tel que $f(V \times W) \subset U$. Comme x_o est continue, il existe un voisinage <u>compact</u> W de y_o tel que $\tilde{x}_o(W) \subset U$. Comme $x \longrightarrow \tilde{x}$ est une application continue de E dans $C_c(F,G)$, l'ensemble V des $x \in E$ tels que $\tilde{x} \in \Omega(W,U)$, i.e. tel que $f(x,y) \in U$ pour tout $y \in W$, est une partie ouverte de E, donc un voisinage de x_o . On a alors bien $f(V,W) \subset U$.

<u>Corollaire</u> 1 -(Pour faire plaisir à CARTAN)- <u>Soient</u> E <u>et</u> F <u>deux espaces topologiques</u>, H <u>une partie de</u> C(E,F). <u>Alors sur</u> H, <u>la topologie de la convergence compacte est la topologie la moins fine pour laquelle l'application</u> $(u,x) \longrightarrow u(x)$ <u>de</u> HxE <u>dans</u> F <u>soit continue</u>.

On applique le théorème 2 à l'application $(u,x) \longrightarrow u(x)$ de HxE dans F, lorsque H est muni d'une topologie arbitraire.

<u>Corollaire</u> 2 - <u>Soient</u> E, F, G <u>trois espaces topologiques</u>, F <u>étant localement compact</u>, E <u>séparé</u>. <u>Alors la bijection naturelle de</u> $\mathfrak{F}(E\times F,G)$ <u>sur</u> $\mathfrak{F}(E, \mathfrak{F}(F,G))$ (Ens...) <u>induit un homéomorphisme de</u> $C_c(E\times F,G)$ <u>sur</u> $C_c(E,C_c(F,G))$.

En vertu du théorème 2, on obtient une bijection du premier espace sur le second, reste à voir que la topologie du premier est bien l'image réciproque de celle du second. Comme un système de générateurs de la topologie de $C_c(F,G)$ est formé des ensembles $\Omega(K,U)$, où K est une partie compacte de F et U une partie ouverte de G, il s'ensuit aussitôt, en vertu de la définition 1, que la topologie de $C_c(E,C_c(F,G))$ est engendrée par les ensembles de la forme $\Omega(L, \Omega(K,U))$, où K,U sont comme ci-dessus et L est une partie compacte de E. Or l'image inverse dans $C_c(E\times F,G)$ de $\Omega(L, \Omega(K,U))$ est évidemment $\Omega(K\times L,U)$, donc ouvert, ce qui montre que l'application envisagée dans le corollaire est bien continue. Inversement, soit M une partie compacte de ExF, U une partie ouverte de G, montrons que $\Omega(M,U)$ est ouvert pour la topologie engendrée par les ensembles de la forme

$\Omega(K\times L,U)$ (ce qui achèvera la démonstration). Soit donc $f\in\Omega(M,U)$ on va montrer que l'on peut trouver une suite finie $(K_i,L_i)_{1\leq i\leq n}$ de couples d'un compact K_i dans E et d'un compact L_i dans F, tels que l'intersection des $\Omega(K_i\times L_i,U)$ contienne f, et soit contenue dans $\Omega(M,U)$. Soient K (resp. L) la projection de M sur E resp. F, ce sont des parties compactes de E et F, et on a $M\subset K\times L$. Comme $f^{-1}(U)\cap(K\times L)$ est une partie ouverte de l'espace compact $K\times L$ contenant le compact M, on peut trouver un nombre fini de couples (K_i,L_i) de compacts $K_i\subset K$ et $L_i\subset L$, tels que $M\subset\bigcup_i K_i\times L_i\subset$ $\subset f^{-1}(U)\cap(K\times L)$. Ils répondent à la question. (N.B. - La démonstration dans l'ancienne rédaction était canulée. On pourrait peut-être remarquer que le corollaire 2 est trivial si G est uniformisable § 1, n°5, prop.3. - Je suspecte qu'il est faux si E n'est pas séparé, Dieudonné exercicera)

<u>Proposition 1 - Soient</u> E, F, G <u>trois espaces topologiques,</u> F <u>étant localement compact. Alors l'application</u> $(u,v)\longrightarrow vu$ <u>de</u> $C_c(E,F)\times C_c(F,G)$ <u>dans</u> $C_c(E,G)$ <u>est continue</u>

Il faut montrer que pour tout compact K dans E et tout ouvert U dans G, l'ensemble R des couples (u,v) tels que $vu(K)\subset U$ est ouvert. Or soit (u_o,v_o) tel que $v_ou_o(K)\subset U$. Alors $u_o(K)$ est une partie compacte de l'espace localement compact F, contenue dans la partie ouverte $v_o^{-1}(U)$, donc elle admet un voisinage compact L contenu dans $v_o^{-1}(U)$. Alors l'ensemble V des $u\in C_c(E,F)$ tels que $u(K)\subset L$ est un voisinage de u_o, l'ensemble W des $v\in C_c(F,G)$ tels que $v(L)\subset U$ est un voisinage de v_o, et $(u,v)\in V\times W$ implique $uv\in\Omega(K,U)$, ce qui prouve que R est un voisinage de u_ov_o, C.Q.F.D.

2. - Groupes d'homéomorphismes.

Proposition 2 - Soient E un espace uniforme, H un ensemble équicontinu d'homéomorphismes de E. Alors l'application $u \longrightarrow u^{-1}$ de H^{-1} sur H est continue pour la topologie de la convergence simple.

Il suffit de montrer que, pour tout $x_o \in E$, l'application $u \longrightarrow u^{-1}(x_o)$ de H^{-1} dans E est continue en tout point $u_o \in H^{-1}$; Soit V un entourage symétrique quelconque de E ; posons $y_o = u_o^{-1}(x_o)$. Il existe un entourage symétrique U de E tel que la relation $(x,x_o) \in U$ implique $(u^{-1}(x),u^{-1}(x_o)) \in V$ pour tout $u \in H^{-1}$, puisque H est équicontinu. Prenons $u \in H^{-1}$ voisin d'ordre $W(y_o,U)$ de u_o ; on a donc par définition $(u(y_o),u_o(y_o)) \in U$, i.e. $(u(y_o),x_o) \in U$ On en déduit $(y_o,u^{-1}(x_o)) \in V$, c'est à dire $(u_o^{-1}(x_o),u^{-1}(x_o)) \in V$ ce qui achève la démonstration.

Corollaire - Soient E un espace uniforme, H un groupe équicontinu d'homéomorphismes de E. Alors la topologie de la convergence simple sur H est compatible (chap.III, §1, n°1) avec la structure de groupe de H.

Il suffit de conjuguer la proposition précédente et le cor.5 de la proposition 1 du §2.

Théorème 3 - Soit G un groupe d'homéomorphismes d'un espace localement compact E. Munissons G de la topologie de la convergence compacte, et supposons qu'il existe un voisinage symétrique H de l'élément neutre de G qui soit relativement compact dans $C_c(E,E)$. Soit $\hat{G}$ l'ensemble des limites dans $C_c(E,E)$ des filtres Φ sur G tels que Φ et Φ^{-1} soient convergents dans $C_c(E,E)$ (où Φ^{-1} désigne l'image de Φ par l'application $u \longrightarrow u^{-1}$ de G dans lui-même). Alors $\hat{G}$ est un groupe d'homéomorphismes de E, sur $\hat{G}$ la topologie de la convergence compacte est compatible avec la structure de groupe, et fait de $\hat{G}$ un groupe localement compact, admettant l'adhérence $\bar{H}$ de H dans $C_c(E,E)$ comme voisinage compact de l'élément neutre, et admettant G comme sous groupe partout dense.

Il n'y a qu'à recopier l'ancienne démonstration, (un peu longue il est vrai). Comme le théorème sera probablement vidé, le rédacteur se dispense de copier. Après le théorème 4 il y a une foultitude de remarques, dont l'objet manifeste est de donner l'impression à un lecteur sans malice que ledit théorème est particulièrement important La remarque 3 est sans doute fausse, en plus.

3. - Applications bornées, convergence bornée.

Soient E un espace métrique. Une partie A de E est dite bornée s'il existe un nombre fini $M \geqslant 0$ tel que $d(x,y) \leq M$ pour $x,y \in E$. On voit aussitôt, a désignant un point quelconque de E, qu'il revient au même de dire qu'il existe un nombre fini $N \geqslant 0$ tel que $d(a,x) \leq N$ pour tout $x \in A$. Ceci dit, si F est un espace uniforme quelconque, on appelle comme de juste structure de la convergence bornée dans $\mathfrak{F}(E,F)$ (ou sur une partie quelconque de $\mathfrak{F}(E,F)$) la structure de la $\mathfrak{S}$-convergence, où $\mathfrak{S}$ désigne l'ensemble des parties bornées de E.

Supposons maintenant que E soit un ensemble quelconque, et F un espace métrique. Une application u de E dans F est dite bornée si u(E) est une partie bornée de F. Plus généralement, soit $\mathfrak{S}$ un ensemble de parties de E.

Considérons l'ensemble $B_{\mathfrak{S}}(E,F)$ des applications u de E dans F telles que u(A) soit borné pour tout $A \in \mathfrak{S}$, et munissons $B_{\mathfrak{S}}(E,F)$ de la structure de la $\mathfrak{S}$-convergence. Pour $A \in \mathfrak{S}$, et $u,v \in B_{\mathfrak{S}}(E,F)$

soit :

$$d_A(u,v) = \sup_{x \in A} d(u(x),v(x))$$

On constate aussitôt que les d_A sont les écarts finis sur $B_{\mathfrak{S}}(E,F)$, et que la famille de ces écarts, quand A parcourt $\mathfrak{S}$, définit la structure de la $\mathfrak{S}$-convergence sur $B_{\mathfrak{S}}(E,F)$.

Proposition 3 - Soient E un ensemble, F un espace métrique. Alors l'ensemble $B(E,F)$ des applications bornées de E dans F est une partie à la fois ouverte et fermée de l'espace $\mathfrak{F}(E,F)$ muni de la structure de la convergence uniforme.

En effet, si u est bornée, toute application v de E dans F telle que $(u(x),v(x)) \leq 1$ pour tout $x \in E$ est évidemment bornée, ce qui montre que $B(E,F)$ est ouvert. D'autre part, si u est adhérent à $B(E,F)$, il existe une application bornée v telle que $d(u(x),v(x)) \leq 1$ pour tout $x \in E$, donc u est bornée.

Corollaire - Soient E un ensemble muni d'un ensemble de parties $\mathfrak{S}$, F un espace métrique. Alors l'ensemble $B_{\mathfrak{S}}(E,F)$ des applications de E dans F qui transforment tout $A \in \mathfrak{S}$ en une partie bornée de F est fermé dans $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(E,F)$. En particulier, si F est complet, $B_{\mathfrak{S}}(E,F)$ est complet pour la $\mathfrak{S}$- convergence.

La première assertion résulte aussitôt de la proposition 3 appliquée aux espaces $B(A,F)$ (avec $A \in \mathfrak{S}$). La dernière assertion en résulte compte tenu de par.1, n°4, th.1.

Corollaire 2 - Soient E un espace topologique, F un espace métrique. Alors l'espace des applications continues bornées de E dans F est à la fois ouvert et fermé dans $C(E,F)$ muni de la topologie de la convergence uniforme, et est complet pour la convergence uniforme si F est complet

La première assertion est une conséquence immédiate de la proposition, la deuxième en résulte compte tenu de §1, $n^o 6$, th.2).

Soient E un ensemble muni d'un ensemble $\mathfrak{S}$ de parties, F un espace normé sur un corps valué K. Pour tout $A \in \mathfrak{S}$, la fonction

$$\|u\|_A = \sup_{x \in A} \|u(x)\|$$

est évidemment une semi-norme sur l'espace vectoriel $B_{\mathfrak{S}}(E,F)$, et la distance associée à cette dernière n'est autre que $d_A(x,y)$. Ainsi, la topologie de $B_{\mathfrak{S}}(E,F)$ peut être définie par la famille de semi-normes $u \longrightarrow \|u\|_A$. En particulier, si $E \in \mathfrak{S}$ (la $\mathfrak{S}$-convergence coincidant donc alors avec la convergence uniforme) cette topologie peut se définir par la seule norme,

$$\|u\| = \sup_{x \in E} \|u(x)\|$$

Soient en particulier $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ des espaces normés sur K, soit E leur produit , et soit F un espace normé sur K. Alors l'espace des applications multilinéaires de E dans F est une partie de $\mathfrak{F}(E,F)$ fermée pour la convergence simple, car formée de l'ensemble des $u \in \mathfrak{F}(E,F)$ qui satisfont à des relations de la forme :

$$u(x_1' + x_1'', x_2, \dots, x_n) = u(x_1', x_2, \dots, x_n) + u(x_1'', x_2, \dots, x_n)$$
$$u(\lambda x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda u(x_1, \dots, x_n)$$

(et des relations analogues relatives aux autres arguments $x_2, \dots, x_n$) les deux membres de ces relations étant des fonctions continues par rapport à $u \in \mathfrak{F}_s(E,F)$, il s'ensuit bien que l'ensemble des u qui y satisfont est fermé. Il résulte alors du corollaire 1 à prop.3 que l'ensemble des applications multilinéaires bornées de E dans F est fermé dans $\mathfrak{F}(E,F)$ pour la convergence bornée. (E étant considéré comme espace normé pour la norme $\|(x_i)\| = \sup_i \|x_i\|$), donc est complet si F est complet. Comme les parties bornées de E sont évidemment celles dont les projections sur les facteurs E_i sont bornées, que les parties bornées de E_i sont contenues (du moins si K est non discret) dans un homothétique de la boule unité de E_i, il s'ensuit aisément que sur l'espace vectoriel $L(E_1,\ldots,E_n\,;\,F)$, la topologie de la convergence bornée est définie par l'unique norme :

$$\|u\| = \operatorname{Sup} \|u(x_1,\ldots,x_n)\| \quad \text{pour} \quad \|x_1\| < 1,\ldots,\|x_n\| \leqslant 1$$

Ceci mérite sans doute une proposition en forme et une rédaction moins cursive, mais l'endroit pour ces sorites semblerait plutôt dans les E.V.T.