Quelques remarques d'Algèbre Homologique

par

Alexander Grothendieck

Transcription by

CSG ISTITUTO GROTHENDIECK

Edited by Mateo Carmona
mateo.carmona@csg.igrothendieck.org
Centre for Grothendieckian Studies (CSG)
Grothendieck Institute
Corso Statuto 24, 12084 Mondovì, Italy

This transcription is derived from an unpublished scan provided by the "Fonds du secrétariat Bourbaki (ENS-ULM)" with the reference Rédaction Bourbaki "n° 222". This project was carried out by researchers and volunteers of the CSG under the supervision of Mateo Carmona. More details are available at:
https://csg.igrothendieck.org/transcriptions/

How to cite:

Alexander Grothendieck. *Quelques remarques d'Algèbre Homologique*. Rédaction Bourbaki No 222. Unpublished note. July, 1955. Transcription by M. Carmona et al., CSG, Grothendieck Institute. Draft, December 2025.

QUELQUES REMARQUES D'ALGÈBRE HOMOLOGIQUE

(par A. Grothendieck)

(n° 222)

1. La notion de classe abélienne.

Une *classe préabélienne* $\mathcal{C}$ est une classe d'objects (notés A, B, etc.), plus la donnée pour tout couple ordonné (A, B) d'un groupe abélien $\mathrm{Hom}(A, B)$ (*homomorphismes* de A dans B, notés aussi comme d'habitude par des flèches $u : A \longrightarrow B$) et pour tout triple (A, B, C) d'une application bilinéaire $\mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, C)$ (*composition* des homomorphismes), de telle façon que la *formule d'associativité* soit satisfaite pour des homomorphismes $A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D$, et que tout $\mathrm{Hom}(A, A)$ admette une unité 1_A pour la composition avec des $B \longrightarrow A$ et des $A \longrightarrow B$. En particulier, $\mathrm{Hom}(A, A)$ est un anneau avec unité ; si cet anneau est nul, on écrit $A = 0$. Un homomorphisme $u : A \longrightarrow B$ est dit *injectif* s'il n'a pas de diviseur de zéro à droite $C \longrightarrow A$, *surjectif* s'il n'a pas de diviseur de zéro à gauche $B \longrightarrow C$, *bijectif* s'il est à la fois injectif et surjectif. On appelle *noyau* (généralisé) de u toute injection $N \longrightarrow A$ telle que les diviseurs de zéro à droite $C \longrightarrow A$ de u soient exactement ceux qui se factorisent en $C \longrightarrow N \longrightarrow A$; définition duale pour le *conoyau* (généralisé) de u. Noyau et conoyau sont déterminés à un homomorphisme inversible canonique près. On dit que $\mathcal{C}$ est une *classe abélienne*, si elle satisfait aux trois axiomes C_1, C_2, C_3 :

C_1 (Factorisation). *Tout $u : A \longrightarrow B$ se factorise en $A \longrightarrow C \longrightarrow B$, où le premier homomorphisme est surjectif, le deuxième injectif.*

C_2 (Axiome du Ker et Coker). *Toute injection* $A \longrightarrow B$ *admet un conoyau* $B \longrightarrow C$ *dont ce soit un noyau ; et toute surjection* $B \longrightarrow C$ *admet un noyau* $A \longrightarrow B$ *dont ce soit un conoyau.*

Il en résulte que, A étant donnée, et une injection $P \xrightarrow{i} A$ et une surjection $A \xrightarrow{j} Q$, il revient au même de dire que j est un conoyau de i ou i un noyau de j. Introduisant dans l'ensemble de tels systèmes $P \longrightarrow A \longrightarrow Q$ (relatifs à A fixé) une relation de préordre évidente, d'où une relation d'équivalence associée, et choisissant dans chaque classe un représentant, on a la notion de *sous-truc* P et *truc-quotient* Q de A, avec l'*injection canonique* $P \longrightarrow A$ et la *surjection canonique* $A \longrightarrow Q$; on écrit alors $Q = A/P$ et dualement $P = A/Q$. Il y a une relation d'ordre naturelle dans la classe de sous-trucs de A et une dans la classe des trucs quotients, la correspondance entre sous-trucs et quotients renversant l'ordre. Le inf et le sup de deux sous-trucs existent toujours, on les écrira $P \cap P'$ et $P + P'$, à moins que (voulant éviter toute ambiguïté et utiliser une notation plus symétrique) on n'adopte $P \wedge P'$ et $P \vee P'$. On définit alors aisément les notions de noyau et de conoyau (*canoniques* d'un homomorphisme), ainsi que l'*image* de u (c'est le noyau de conoyau) et la *coimage* de u (c'est le conoyau de noyau), on prouve la factorisation canonique de u en $A \longrightarrow \mathrm{Coim}\, u \longrightarrow \mathrm{Im} u \longrightarrow B$ etc.

Les notions d'image inverse et directe d'un sous-truc, celle de restriction et la notion de duale (qui mérite un nom, o. ex. corestriction), etc., et les énoncés usuels, se développent de façon immédiate.

Soit (A_i) une famille de sous-trucs de A, pour tout B on a des homomorphismes de restriction $\mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A_i, B)$, d'où un homomorphisme $\mathrm{Hom}(A, B) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(A_i, B)$. On dit que A est *somme directe* des A_i si l'homomorphisme précédent est bijectif pour tout B. Si le famille est réduite à deux éléments M et N, on dit que M et N sont *supplémentaires*, cela signifie aussi comme d'habitude que $M \cap N = 0$ et $M + N = A$.

Dualement, étant donnée une famille (A_i) de quotients de A, on dit que A est *produit direct* des A_i si pour tout B, l'homomorphisme naturel $\mathrm{Hom}(B, A) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}(B, A_i)$ est bijectif. Si I est fini, ces notions sont essentiellement équivalentes. Le dernier axiome obligatoire pour une classe abélienne est

C_3 *Pour* A, B *dans* $\mathcal{C}$*, il existe un* C *qui est somme directe de deux sous-trucs isomorphes à* A *et* B (ou, ce qui revient au même, produit direct de deux quotients isomorphes à A et B).

Cet axiome permet de construire “en l’air” des sommes directes finies. Parfois, on a besoin de sommes et produits infinis, avec des propriétés plus ou moins fortes sur ceux-ci, les axiomes les plus rencontrés, semblent être les suivants (rappelons qu’ils sont facultatifs) :

C_4 *Existence de la somme directe* $\bigoplus A_i$ *pour une famille* (A_i) *quelconque.*

C_5 *L’axiome* C_4 *plus l’exigence que si on a des injections* $A_i \longrightarrow B_i$*, alors l’homomorphisme correspondant* $\bigoplus A_i \longrightarrow \bigoplus B_i$ *soit injectif* (c’est vrai à priori *seulement* pour I fini).

Notons que C_4 implique que pour toute famille (A_i) de sous-trucs d’un A, le Sup des A_i existe (prendre l’image de la somme directe $\bigoplus A_i$).

Ceci dit, on pose le renforcement suivant de C_5 :

C_6 *L’axiome* C_4*, plus le fait que* $B \cap \sum_i A_i = \sum_i B \cap A_i$ *quand* (A_i) *est une famille filtrante croissante de sous-trucs de* A.

Notons que (moyennant C_4) C_6 équivaut aussi à l’énoncé suivant : Si un A est somme d’une famille filtrante croissante de sous-trucs A_i, et si on a pour tout i un homomorphisme $u_i : A_i \longrightarrow B$, ces homomorphismes s’induisant mutuellement, alors il existe un homomorphisme u de A dans B induisant les u_i.

Enfin, il y a lieu de considérer aussi les axiomes C_4 bis, C_5 bis et C_6 bis duals des précédents. Notons qu’une classe abélienne non réduite à 0 ne peut satisfaire à la fois à C_6 et la condition duale C_6 bis. (Ainsi la classe des groupes abéliens vérifie la première condition, la classe des groupes compacts abéliens la seconde).

Classe duale. Soit $\mathcal{C}$ une classe préabélienne ; on appelle *classe duale* la classe $\mathcal{C}^\circ$ formée des mêmes objets, avec $\mathrm{Hom}^\circ(A, B) = \mathrm{Hom}(B, A)$ (on “renverse les flèches”), addition et composition de $\mathcal{C}$ étant conservées. $\mathcal{C}^\circ$ est une classe *abélienne* si et seulement si $\mathcal{C}$ l’est. Le passage à la classe duale transforme injections en surjections et vice-versa, sous-trucs en trucs quotients et vice versa, sommes directes en produits directs et vice versa, limites inductives en limites projectives et vice versa. Les axiomes C_1, C_2, C_3 sont autoduals, C_4 est dual de C_4 bis etc. Le passage d’une classe à la classe duale sert à diviser par deux (et parfois par une puissance de deux, quand plusieurs classes sont en jeu simultanément) le nombre de démonstrations nécessaires ; l'expérience prouvant que, pour tout énoncé, on a tout autant besoin de l'énoncé dual. Il montre aussi pourquoi la symétrie entre limites inductives et projectives ne semblait pas parfaite, certaines choses marchant pour les limites *inductives* de groupes abéliens discrets ou espaces vectoriels (p.ex.) et non pour les projectives, alors que c'est l'inverse quand on considère des groupes abéliens compacts, ou des espaces vectoriels linéairement compacts (qui forment resp. des catégories isomorphes aux duales des précédentes). La raison en est que les deux premières satisfont à C_6 et non à l'axiome dual, et que c'est l'inverse pour les deux dernières. (C_6 implique que le foncteur "limite inductive" d'un système inductif est un foncteur *exact*, alors que C_6 bus implique que c'est le foncteur "limite projective" d'un système projectif qui est exact).

2. Exemples de classes abéliennes.

a. **Groupes abéliens discrets**, plus généralement modules unitaires sur un anneau U fixé avec élément unité (qui inclut en réalité les groupes abéliens à opérateurs, p.ex. groupes abéliens à groupe d'opérateurs, etc). On peut plus généralement encore, considérer la classe des modules gradués sur un anneau gradué (les homomorphismes étant les homomorphismes de degré zéro) ; déjà dans cette direction, on ne voit pas où la généralisation nécessaire s'arrêtera (bigradué au lieu de gradué, etc) ; et il semble ridicule, pour faire la théorie des foncteurs dérivés avec "la plus grande généralité raisonnable possible" de se charger tout au long du fardeau psychologique de graduations diverses et variées, avec un anneau (gradué !) à l'arrière plan qui n'intervient jamais, au lieu de parler carrément en termes de classes abéliennes — Tous les axiomes sont ici satisfaits, à l'exception de C_6 bis.

b. Classe des *faisceaux* de groupes abéliens sur un espace topologique X. Plus généralement, étant donné un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}$ sur X, on peut considérer la classe des faisceaux de $\mathcal{O}$ modules sur X. Cette classe satisfait à tous les axiomes à l'exception hélas de C_5 bis (et à fortiori C_6 bis) : le produit direct d'une famille infinie de surjections n'est en général pas une surjection. Il n'est pas exclu que la notion de faisceau *à valeurs dans une classe* $\mathcal{C}$ soit utile, mais pour que ces faisceaux forment une classe *abélienne* et non seulement préabélienne il faut que $\mathcal{C}$ satisfasse à C_6. Un co-faisceau sur X à coefficients dans $\mathcal{C}$ serait un faisceau à valeurs dans la classe duale $\mathcal{C}^\circ$, cela permettrait de définir l'*homologie* de X à coefficients dans un cofaisceau, généralisant l'homologie (Cechiste) à coefficients constants. L'intérêt en est douteux d'ailleurs.

c. Les "classes de groupes abéliens" de Serre sont des classes abéliennes, de plus les axiomes de Serre signifient qu'on peut passer à la classe quotient, et le langage "modulo $\mathcal{C}$" signifie qu'on travaille avec des "trucs" de la classe quotient.

d. *Formation* de nouvelles classes. À l'aide d'une classe $\mathcal{C}$, on peut en former d'autres. Signalons la classe duale, la classe des *complexes* formés avec des trucs de $\mathcal{C}$, plus généralement, la classe des diagrammes construits suivant un schéma explicite et satisfaisant à des conditions de commutativité également explicitées. Si par exemple I est un ensemble ordonné filtrant, il y a intérêt à considérer la *classe des systèmes inductifs*, ou *projectifs*, construits sur I (avec des $A_i \in \mathcal{C}$), c'est fort commode comme langage. La notion de *préfaisceau* sur un espace X rentre d'ailleurs dans ce mode de définition d'une classe. Étant données deux classes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, on construit de façon évidente leur *produit tensoriel* ; il sert à interpréter les bifoncteurs $F(A, A')$ comme des foncteurs sur $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$, ainsi que dans l'étude des structures multiplicatives en rapport avec les foncteurs dérivés (le rédacteur avoue toutefois qu'il n'a pas encore au l'opportunité de regarder ceci en détail).

Ajoutons que le rédacteur ne se sent pas absolument certain si les axiomes C_1, C_2, C_3 sont bien les meilleurs en vue de développer l'algèbre homologique, et si des axiomes plus faibles, introduisant d'emblée axiomatiquement les suites exactes, ne pourraient être trouvés.

3. Compléments divers.

On se place dans une classe abélienne fixée $\mathcal{C}$. Un homomorphisme $i : A \longrightarrow I$ est appelé un *effacement injectif* si pour tout couple $(B \subset C)$ et tout homomorphisme $u : B \longrightarrow A$, il existe un homomorphisme $v : C \longrightarrow I$ qui prolonge u ; dans cette définition, il suffit de supposer que $B = A$ et u est l'homomorphisme identique. Un $I \in \mathcal{C}$ est dit *injectif* si l'homomorphisme identique $I \longrightarrow I$ est un effacement injectif, i.e. si tout homomorphisme d'un sous-truc B d'un C dans I se prolonge à C.

Dualement, une surjection $P \longrightarrow A$ est un *effacement projectif* de A si pour tout homomorphisme de A dans un quotient C/B, l'homomorphisme correspondant de P se relève en $P \longrightarrow C$, et P est dit *projectif* si l'homomorphisme identique de P est un effacement projectif.

Supposons pour simplifier que dans $\mathcal{C}$ on puisse prendre des sommes directes infinies (axiome C_4), alors on dit que $U \in \mathcal{C}$ est un *générateur* de $\mathcal{C}$ si tout $A \in \mathcal{C}$ est isomorphe à un quotient d'un $U^{(I)}$. Et dualement, si les produits infinis existent, on dit que M est un cogénérateur de $\mathcal{C}$ si tout $A \in \mathcal{C}$ est isomorphe à un sous-truc d'un M^I. (Dans la pratique, dès que l'on a démontré l'existence des sommes directes infinies, on trouve facilement des générateurs ; idem pour les cogénérateurs). Ceci posé :

Proposition. —

1° *Si $\mathcal{C}$ satisfait à C_4, C_5 et C_4 bis et admet un cogénérateur M, alors tout $A \in \mathcal{C}$ admet un effacement injectif $A \longrightarrow I$.*

(Donc si $\mathcal{C}$ satisfait à C_4, C_4 bis et C_5 bis et admet un générateur, tout $A \in \mathcal{C}$ admet un effacement projectif).

2° *Si $\mathcal{C}$ satisfait à C_6 et admet un générateur U, alors pour tout $A \in \mathcal{C}$ il existe une injection de A dans un I injectif.*

(Énoncé dual évident).

(Bien entendu, une injection dans un I injectif est un effacement injectif).

4. ∂-foncteurs et foncteurs cohomologiques.

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux classes abéliennes, un *foncteur covariant* F de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est une loi faisant correspondre à tout $A \in \mathcal{C}$ un $F(A) \in \mathcal{C}'$, et à tout homomorphisme $u : A \longrightarrow B$ un homomorphisme $u_F : F(A) \longrightarrow F(B)$, de telle façon que à l'homomorphisme identique $A \longrightarrow A$ correspondre l'homomorphisme identique $F(A) \longrightarrow F(A)$, et au composé vu le composé $v_F u_F$. Enfin, nous supposerons toujours F *additif*, i.e. $(u+v)_F = u_F + v_F$. Définition analogue pour un foncteur contravariant ; d'ailleurs le remplacement de $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{C}'$ par la classe duale permet toujours de se ramener au cas covariant. F transforme une suite exacte $0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0$ en un complexe d'homomorphismes

$$0 \longrightarrow F(A') \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(A'') \longrightarrow 0\,;$$

F est dit *exact* si ce dernier est toujours exact, *semi-exact* si ce dernier est toujours exact en $F(A)$, *exact à gauche* s'il est toujours exact en $F(A')$ et $F(A)$, *exact à droite* s'il est toujours exact en $F(A'')$ et $F(A)$. (Exact signifie aussi que *toute* suite exacte est transformée en une suite exacte, exact à gauche que F commute avec l'expression Ker, exact à droite que F commute avec l'expression Coker). F est dit *effaçable* si pour tout $A \in \mathcal{C}$ il existe une *injection* $A \longrightarrow I$ telle que l'homomorphisme associé $F(A) \longrightarrow F(I)$ soit nul ; cela implique alors que pour tout effacement injectif $A \longrightarrow I$ (cf. n° 3), $F(A) \longrightarrow F(I)$ est nul, et la réciproque est vraie quand dans $\mathcal{C}$ tout A admet un effacement injectif (voir prop. plus haut) ; à fortiori, cela implique $F(I) = 0$ pour tout I injectif, et la réciproque est vraie quand dans $\mathcal{C}$ tout A peut s'immerger dans un truc injectif (voir prop. plus haut). On a la notion duale de *foncteur coeffaçable*.

Un *homomorphisme d'un foncteur* covariant F dans un autre G (tous deux $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$) consiste en la donnée, pour tout $A \in \mathcal{C}$, d'un homomorphisme $F(A) \longrightarrow G(A)$, avec la seule condition que tout homomorphisme $u : A \longrightarrow B$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \longrightarrow & F(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(A) & \longrightarrow & G(B) \end{array}$$

soit commutatif. (Notons qu'avec cette notion d'homomorphisme, et la notion évidente de somme et composé de deux homomorphismes, les foncteurs covariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ forment une classe abélienne fort suggestive, à cela près que $\mathrm{Hom}(F, G)$ n'est plus un ensemble en général, ce qui n'est pas tellement grave !).

Un *∂-foncteur covariant* de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, à degrés $a < i < b$ (où $-\infty \leq a < b - 1 \leq +\infty$) est un système $\mathrm{H} = \{\mathrm{H}^i\}$ de foncteurs covariants $\mathrm{H}^i (a < i < b)$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$, et pour tout i tel que $a < i < b - 1$ et toute suite exacte $0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A \longrightarrow A_2 \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{C}$, un homomorphisme $\partial : \mathrm{H}^i(A_2) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(A_1)$ conformément aux deux axiomes suivants :

a. Si on a une deuxième suite exacte $0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow B \longrightarrow B_2 \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{C}$ et un homomorphisme de la première dans la seconde, alors le

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^i(A_2) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{i+1}(A_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{H}^i(B_2) & \longrightarrow & \mathrm{H}^{i+1}(B_1) \end{array}$$

doit être commutatif.

b. Pour toute suite exacte dans $\mathcal{C}$: $0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A \longrightarrow A_2 \longrightarrow 0$, la suite d'homomorphismes associés

(1) $\quad \ldots \mathrm{H}^i(A_1) \longrightarrow \mathrm{H}^i(A) \longrightarrow \mathrm{H}^i(A_2) \longrightarrow \mathrm{H}^{i+1}(A_1) \longrightarrow \ldots$

est un *complexe*, i.e. le produit de deux homomorphismes consécutifs est nul.

Définition analogue pour les *∂^*-foncteurs covariants*, la seule différence étant que l'opérateur ∂ diminue le degré d'une unité au lieu de l'augmenter. On posse de l'un à l'autre, soit en remplaçant $\mathcal{C}$ par la classe duale, soit en remplaçant les degrés de H pour les degrés symétriques, aussi peut-on se borner en principe à ne parler que de ∂-foncteurs. De même, la définition des ∂ et ∂^*-foncteurs contravariants est immédiate, et l'on peut toujours (remplaçant $\mathcal{C}'$ par la classe duale si besoin est) se ramener au ∂-foncteur covariant.

On dit que (H^i) est un *∂-foncteur exact* si la suite (1) est toujours exacte, et on appelle *foncteur cohomologique* un ∂-foncteur exact défini pour tous les degrés. (De même, on a la notion de ∂^*-foncteur exact et de *foncteur homologique*). Comme son nom l'indique, l'Algèbre Homologique est l'étude des foncteurs homologiques et cohomologiques.

Soient $\mathrm{H} = (\mathrm{H}^i)$ et $\overline{\mathrm{H}} = (\overline{\mathrm{H}}^i)$ deux ∂-foncteurs définis pour les mêmes degrés $a < i < b$, un *homomorphisme* de H dans $\overline{\mathrm{H}}$ est par définition un système (φ^i) d'homomorphismes de H^i dans $\overline{\mathrm{H}}^i$, soumis à la condition naturelle de commutation avec ∂ : pour toute suite exacte $0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow A \longrightarrow A_2 \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{C}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{H}^i(A_2) & \xrightarrow{\partial} & \mathrm{H}^{i+1}(A_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathrm{H}}^i(A_2) & \xrightarrow{\partial} & \overline{\mathrm{H}}^{i+1}(A_1) \end{array}$$

est commutatif. Bien entendu, les homomorphismes s'ajoutent et se composent de façon évidente.

5. ∂-foncteurs universels.

On dit que H est un *∂-foncteur universel pour le degré* i_0 (où $a < i_0 < b$) si pour tout deuxième ∂-foncteur $\overline{\mathrm{H}}$, et tout homomorphisme φ^{i_0} de H^{i_0} dans $\overline{\mathrm{H}}^{i_0}$, il existe un homomorphisme φ et un seul de H dans $\overline{\mathrm{H}}$ qui se réduise à φ^{i_0} en dimension i_0 ; quand $i_0 = 0$, on dira simplement que H est un *∂-foncteur universel*. (Dans ces définitions nous avons supposé les foncteurs envisagés covariants ; s'ils sont contravariants, on voit aussitôt qu'il faut modifier la définition précédente en considérant des homomorphismes $\overline{\mathrm{H}} \longrightarrow \mathrm{H}$ au lieu de $\mathrm{H} \longrightarrow \overline{\mathrm{H}}$). Par définition même, quand $\mathrm{H}^\circ = F$ (et l'ensemble des degrés) est donné, il ne peut exister essentiellement *qu'un seul* ∂-foncteur universel qui se réduise à H° pour la dimension 0, dont les composantes peuvent donc se dénoter sans ambiguïté par F^n (foncteurs dérivés). Il est fort possible, que quel que soit le foncteur (covariant par exemple) $F = \mathrm{H}^\circ$ sur la classe abélienne arbitraire $\mathcal{C}$, on puisse inversement trouver un foncteur universel défini pour tous les degrés, et qui pour le degré 0 se réduise à F. Voici ce qui pour l'instant peut se dire au sujet de l'existence de ∂-foncteurs universels :

Théorème. —

1° *Soit* $\mathrm{H} = \{\mathrm{H}^i\}$ *un ∂-foncteur exact (covariant ou contravariant) défini pour* $a < i < b$, *(où* $a < 0 < 1 < b$*), supposons que* H^i *soit effaçable pour* $i > 0$ *et coeffaçable pour* $i < 0$ *(cf. n° 3 pour les définitions), alors* H *est un ∂-foncteur universel.*

2° *Supposons que dans $\mathcal{C}$, tout A admette un effacement injectif (voir prop. du n° 3). Alors tout foncteur F sur $\mathcal{C}$ est la composante de degré 0 d'un ∂-foncteur universel, défini pour tous degrés* $i \geq 0$ *; ses composantes de degrés* > 0 *sont effaçables. Pour que ce soit même un ∂-foncteur exact, il faut et il suffit que F soit semi-exact, et satisfasse à la condition supplémentaire suivante (toujours satisfaite si F est exact à gauche, ou exact à droite) : si* $P \subset Q \subset R$ *dans $\mathcal{C}$, alors le noyau de* $F(Q/P) \longrightarrow F(R/P)$ *est contenu dans l'image de* $F(Q) \longrightarrow F(Q/P)$*. Donc dualement, si tout A dans $\mathcal{C}$ admet un effacement projectif, alors tout foncteur F sur $\mathcal{C}$ est la composante de degré 0 d'un ∂-foncteur universel défini pour les degrés* $i \leq 0$ *; ses composantes de degrés* < 0 *sont coeffaçables, et la condition pour que ce ∂-foncteur soit exact est la même que ci-dessus ; si donc tout A dans $\mathcal{C}$ admet à la fois un effacement injectif et un effacement projectif, alors pour tout foncteur F sur $\mathcal{C}$ il existe un foncteur universel défini pour tout les degrés, se réduisant à F pour la* *dimension 0 et c'est un foncteur cohomologique si et seulement si la condition donnée plus haut est vérifiée.*

Pour appliquer le première partie du théorème, il est utile de se rappeler qu'un foncteur identiquement nul est effaçable et coeffaçable. Signalons le

Corollaire. — *Si dans $\mathcal{C}$ tout A admet un effacement injectif et un effacement projectif, alors pour qu'un foncteur cohomologique* (H^i) *sur $\mathcal{C}$ soit universel, il faut et il suffit que les* H^i *soient effaçables pour $i < 0$ et coeffaçables pour $i > 0$.*

6. Exemples.

a. **Les** $\mathrm{Ext}^p(A, B)$. Soit $\mathcal{C}$ une classe abélienne quelconque, alors $\mathrm{Hom}(A, B)$ est un bi-foncteur sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans les groupes abéliens, covariant et exact à gauche par rapport à B et contravariant et exact à droite par rapport à A. On peut donc envisager le foncteur cohomologique dérivé de $B \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B)$, et le foncteur cohomologique dérivé de $A \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, B)$ (du moins si dans $\mathcal{C}$ il y a “assez” d'effaçements injectifs resp. projectifs) ; le premier sera nul en degrés < 0, le second nul en degrés > 0, et quand tous les deux existent ils sont égaux après avoir changé les degrés du deuxième de signe (résulte facilement du théorème d'unicité). On dénote ses composantes par $\mathrm{Ext}^p(A, B)$. En particulier, $\mathrm{Ext}^1(A, B)$ admet l'interprétation usuelle comme groupe de classes d'extensions de A par B. Ce foncteur Ext^p est digne d'intérêt aussi en dehors du cas classique où $\mathcal{C}$ est la classe des modules sur un anneau donné. Ainsi, si $\mathcal{C}$ est la classe des faisceaux de groupes abéliens sur un espace X (ou plus généralement, de faisceaux de modules sur un faisceau d'anneaux) on obtient des Ext^p “globaux”, qu'on écrira alors $\mathrm{Ext}^p(X; F, G)$ pour les distinguer des $\mathrm{Ext}^p(F, G)$ calculés localement ; ces deux sortes d'Ext sont bien entendu reliés par une suite spectrale, (cas particulier de suites spectrales générales relatives à un foncteur composé).

b. **Les notions homologiques classiques** comme les Tor^p, l'homologie et cohomologie des groupes discrets, algèbres de Lie, anneaux associatifs, sur lesquels il est inutile d'insister.

c. **Cohomologie d'un espace topologique**. Considérons un espace X et la classe des faisceaux de groupes abéliens sur X. La proposition du n° 3 prouve que tout faisceau F se plonge dans un faisceau injectif (malheureusement, il n'est pas vrai que tout faisceau admette un effaçament projectif, car l'axiome C_5 bis n'est pas vérifié !). Par suite, tout foncteur exact à gauche sur $\mathcal{C}$ admet un foncteur cohomologique dérivé, nul pour les degrés < 0. En particulier, soit φ un antifiltre de parties fermées de X, et soit $\Gamma_\varphi(F)$ le foncteur sur $\mathcal{C}$: "module des sections de F, à supports dans φ". C'est là un foncteur exact à gauche, les foncteurs dérivés sont notées $\mathrm{H}^p_\varphi(X, F)$. Ils sont donc caractérisés par les axiomes du séminaire Cartan, à cela près que l'axiome des faisceaux fins est remplacé par le suivant : $\mathrm{H}^p(X, F) = 0$ si F est injectif et $p > 0$ qui exprime que les H^p sont des foncteurs *effaçables* pour $p > 0$.

Comparaison avec les autres définitions. Supposons pour simplifier φ = ensemble de tous les fermés. On peut aussi définir des foncteurs $\mathrm{H}^p_m(X, F)$, (m, initiale de m...auvaise), cohomologie calculée par les recouvrements de $\check{C}$ech. Les foncteurs H^p_m sont *effaçables* pour $p > 0$, car on peut immerger le faisceau F dans le faisceau $\hat{F}$ des germes de sections *continues ou non* de F, et le raisonnement classique par construction d'un opérateur d'homotopie dans le complexe de cochaînes (utilisé en général pour prouver que $\mathrm{H}^p(X, F)$ est nul si $p > 0$ et F *fin* sur X paracompact) prouve que $\mathrm{H}^p_m(X, F)$ est nul pour $p > 0$. Donc, si les H^p_m (éventuellement avec p inférieur à N fixé) forment un ∂-foncteur *exact*, il résulte du théorème d'unicité du n°5 qu'ils coïncident avec les H^p précédents.

D'après Serre, ceci est vrai, sans aucune hypothèse sur X, si on se limite aux degrés ≤ 1, *donc* $\mathrm{H}^1(X, F)$ *peut se calculer par les recouvrements*. C'est encore vrai si X est *paracompact*, sans restrictions sur le degré. Dans ce cas, comme nous l'avons déjà signalé, les $\mathrm{H}^p(X, F)$ $(p > 0)$ sont nuls pour F fin, et il est évident à priori que cela peut se substituer à la condition d'effaçabilité, pour caractériser axiomatiquement les H^p, puisque tout faisceau se plonge dans un faisceau fin. Le calcul des $\mathrm{H}^p(X, F)$, par résolution de F par une suite exacte de faisceaux fins, en résulte aussitôt (car ce mode calcul est valable même dans toute classe, pour le calcul des foncteurs dérivés d'un foncteur Γ exact à gauche ; "fin" étant remplacé par "acyclique pour Γ", i.e. $\Gamma^p(F) = 0$ pour $p > 0$).

Quand aux H^p_m et même les "bons" H^p sur un espace X quelconque, notamment une variété algébrique avec la topologie (non séparée) de Zariski, il n'est pas sûr qu'ils offrent le moindre intérêt en dehors de $p = 0, p = 1$ et $p = 2$. Tout ce que les résultats de Serre montrent, est qu'il existe sur la *classe des faisceaux algébriques cohérents* un foncteur cohomologique ayant des propriétés remarquables, et qui peut par hasard se calculer par les recouvrements, i.e. se définir à partir de mauvais H^p_m qui ne forment pas même un ∂-foncteur (et fort probablement coïncident aussi avec les $\mathrm{H}^p(X, F)$). D'ailleurs, il résulte des théorèmes de Serre que les H^p_m sur cette classe restreinte sont effaçables, donc on a bien un foncteur cohomologique universel, ensemble avec la condition que $\mathrm{H}^\circ = \Gamma$, ceci suffit donc à caractériser axiomatiquement la cohomologie de X à coefficients dans un faisceau algébrique cohérent.

Pour finir, notons que les suites spectrales de Leray, de Cartan-Leray, etc., sont aussi des cas particuliers immédiats de suites spectrales générales se définissant dans des classes abéliennes arbitraires. D'ailleurs, chaque fois qu'on prend un produit tensoriel avec un faisceau fin, ou un faisceau fondamental, pour définit quelque chose, (suite spectrale, multiplication en cohomologie) on est en train de redémontrer des choses valables dans des classes générales ; comme ces expédients ne servent jamais pour des calculs explicites, cela prouve donc qu'ils sont entièrement superflus.