RÉDACTION N° 307

COTE : PCR 009

TITRE : Sur la formalisation des Catégories et foncteurs
par Alexander Groth.

NOMBRE DE PAGES : 12

NOMBRE DE FEUILLES : 12

PCR 009

n° 307

Sur la formalisation des Catégories et foncteurs.

par Alexander Groth.

Préambule -

Il est certain qu'il faut pouvoir considérer les catégories, foncteurs, homomorphismes de foncteurs etc... comme des objets mathématiques, sur lesquels on puisse quantifier librement, et qu'on puisse considérer à leur tour comme formant les éléments d'ensembles. Deux raisons à cette nécessité : pour pouvoir effectuer sans contrainte pour les foncteurs les types de raisonnement (induction, etc...) proprement mathématiques, sans interminables contorsions pour sauve-garder la fiction du foncteur qui ne serait qu'un objet spécifié de la métamathématique ; parce que les ensembles de foncteurs, ou d'homomorphismes fonctoriels, avec les diverses structures naturelles qu'on a sur eux (groupe d'automorphismes d'un foncteur donné, etc) sont d'un intérêt mathématique évident, et que bien des structures (structures semi-simpliciales, etc) s'expriment le plus naturellement en regardant les nouveaux objets à définir comme des foncteurs.

Aussi la "solution" suggérée par Lacombe semble-t-elle tout à fait inadéquate. D'autre part, si on veut introduire une nouvelle catégorie d'objets mathématiques, les classes, qui seraient des "ensembles" trop gros pour qu'on ose les appeler par ce nom, la seule façon de les distinguer formellement des "vrais" ensembles semblerait d'interdire qu'ils puissent être eux-mêmes éléments de quelque chose (l'axiome de l'ensemble à un élément devenant donc la définition de la notion d'ensemble.)

Or, on a dit qu'on ne pouvait tolérer une telle interdiction. Donc il faut pouvoir considérer des classes de classes, et il serait naïf de croire qu'il sera possible de s'arrêter à ce second cran. Dès lors, on ne voit plus ce qui distingue les soit-disantes classes, hyperclasses etc.. des vulgaires ensembles, étant tout comme ceux-là caractérisés par la collection de leurs éléments et étant tout comme ceux-là éléments d'autres collections ; si ce n'est qu'il apparaît dans l'Univers Mathématique une sorte de filtration naturelle. Les opérations coutumières de la théorie des Ensembles (i.e. celles résultant de la stricte application des axiomes de Notre Maître) ne font pas sortir d'un cran donné U_i de la filtration, et il faut de nouvelles opérations comme celle correspondant à la notion intuitive de "formation de la catégorie de tous les objets" - plus correctement, de tous les objets de U_i - pour sortir de U_i, et entrer dans U_{i+1}. En vertu de ce qu'on vient de dire, de telles opérations ne pourront s'effectuer que moyennant un nouvel axiome dans la théorie des Ensembles, qui sera formulé plus bas. Ainsi, la formalisation des catégories, contrairement à ce qu'on a pu croire, se fait en réalité dans une Théorie plus forte que la théorie des Ensembles. Dans cette théorie chaque U_i pourra être considéré comme un modèle de la Théorie des Ensembles "affoiblie".

Bien entendu, quand on viendra à appliquer les notions et résultats de la "théorie des catégories" (une catégorie étant désormais comme tout le monde un ensemble, muni de certaines structures). Il ne peut pas être question, pas plus que par le passé, de parler de la catégorie de "tous" les ensembles, ou de "tous" les groupes abéliens etc..., si ce n'est encore qu'à titre d'objet purement métamathématique . Ce qui aura cependant un sens mathématique, c'est que pour chaque U_i , notre "hypercatégorie" induit sur U_i une véritable catégorie, à laquelle les résultats de la théorie sont appliquables. Un certain nombre de théorèmes mathématiques assureront que ces résultats "s'induisent bien" quand on change d'Univers U_i. Ainsi, on pourra énoncer et démontrer des théorèmes du type : si C est une catégorie abélienne, satisfaisant des conditions raisonnables (vérifiées par exemple pour la catégorie des faisceaux abéliens sur X qui se trouvent dans un univers donné), alors pour tout Univers U_i, tout objet injectif de la catégorie $C \cap U_i$ est aussi injectif dans C. (N.B. L'existence d'un générateur pour C doit être le genre d'hypothèses convenable ici). Il s'ensuit que les foncteurs dérivés s'induisent bien etc ...

On voit que ce point de vue n'est pas très différent de celui (vomi par Bourbaki à juste titre) qui consistait à dire que n'importe quelle catégorie, telle la catégorie de "tous" les groupes abéliens, est réunion d'ensembles de plus en plus grands, qui sont des catégories et vérifient "à la limite" les axiomes de C, et que n'importe quelle construction de foncteurs pouvait en fait être regardée comme une construction au stade ensembliste, ou une sorte de limite de telles construction. Il semble que les inconvénients techniques de ce point de vue soient minimes pourvu qu'on dispose d'une filtration vraiment canonique, ayant des propriétés formelles très précises du genre de celles envisagées plus haut.

Pour conclure, il ne semble donc point qu'on soit obligé de rien changer aux trois premiers chapitres du Livre I (ce qui ne signigie pas que le rédacteur soit enchanté du chapitre I dudit livre, qui lui semble au contraire un candidat sérieux à une importante révision).

Il sera suffisant d'introduire au nouveau Chapitre 4 (qui remplacera l'ancien inutilisable de toutes façons) les axiomes supplémentaires de la Théorie des Ensembles, et y développer la théorie des catégories aussi loin qu'il semble désirable ; le plus naturel étant sans doute de donner, en plus de la formulation fonctorielle de la notion de problème universel et de la notion de structure, au moins tous les développements formels correspondants aux notions introduites au chapitre 2 (Sous-ensembles, ensembles quotients, relations d'équivalence etc...) Il y a d'ailleurs un procédé standart permettant de ramener la plupart de telles notions à la notion correspondante pour les ensembles (le rédacteur, qui commence à avoir une certaine expérience de ces questions, pourra fournir des petits papiers à l'occasion).

1. - La notion d'Univers.

Définition 1 - On appelle Univers un ensemble U ayant les propriétés suivantes :

(S'8) Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Si $I \in U$ et $X_i \in U$ pour tout $i \in I$, alors $\bigcup_{i \in I} X_i \in U$.

(A' 1) $X \in U$ et $x \in X$ implique $x \in U$

(A' 2) $x \in U$ implique $\{x\} \in U$

(A' 3) $(x,y) \in U$ équivaut à $(x \in U)$ et $(y \in U)$

(A' 4) $X \in U$ implique $\underline{P}(X) \in U$ (où $\underline{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X).

Proposition 1 - Soit U un Univers. Alors

(i) $X \in U$ et $Y \subset X$ implique $Y \in U$

(ii) Supposons U non vide. Alors $\emptyset \in U$, plus généralement, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$, il existe un ensemble E à n éléments tel que $E \in U$.

(iii) $X, Y \in U$ <u>implique</u> $X \cup Y \in U$ <u>et</u> $X \times Y \in U$

(iv) $x, y \in U$ <u>implique</u> $\{x, y\} \in U$

<u>Démonstration</u> - Si $X \in U$, alors $\underline{P}(X) \in U$ en vertu de (A' 4), et par suite pour $Y \subset X$ i.e. pour $Y \in \underline{P}(X)$, on a $Y \in U$ en vertu de (A'1) cela prouve (i). Supposons U non vide, soit donc $X \in U$, comme $\emptyset \subset X$ il résulte de (i) que $\emptyset \in U$. Appliquant (A' 4), on obtient $\underline{P}(\emptyset) \in U$, $\underline{P}(\underline{P}(\emptyset)) \in U$ etc , d'où par récurrence l'existence d'éléments de U ayant un cardinal plus grand que l'entier n ; appliquant à nouveau (i), on trouve l'existence d'un $E \in U$ ayant le cardinal n, ce qui prouve (ii). Supposons $X, Y \in U$, alors U n'est pas vide et contient donc un ensemble I à deux éléments $\{i, j\}$, considérons la famille $X_i = X$, $X_j = Y$, construit sur I ; en vertu de (S' 8), on trouve $X \cup Y \in U$. Soit $x \in X$, $y \in Y$, alors $x, y \in U$ en vertu de (A'1) , d'où $(x, y) \in U$ en vertu de (A' 3), donc $\{(x, y)\} \in U$ en vertu de (A' 2), donc $\{x\} \times Y \in U$ en vertu de (S' 8) puisque $\{x\} \times Y$ est la réunion de la famille d'ensembles $(\{(x, y)\})_{y \in Y}$, d'où enfin $X \times Y \in U$ puisque $X \times Y$ est la réunion de la famille d'ensembles $(\{x\} \times Y)_{x \in X}$; cela prouve (iii).

Supposons $x, y \in U$, alors $\{x\}, \{y\} \in U$ en vertu de (A' 2), d'où $\{x\} \cup \{y\} = \{x, y\} \in U$ en vertu de (iii), d'ou (iv).

<u>Remarque</u> - Les conditions de la définition 1, complétées par les conséquences (i) et (iv) de la proposition 1, expriment intuitivement que les axiomes (S 8), (A 1) à (A 4), de la Théorie des Ensembles sont satisfaits, quand on ~~se~~ restreint à ne considérer que les objets de U. On doit par suite s'attendre à ce que toutes les constructions de la Théorie des Ensembles (du moins celles ne faisant pas intervenir l'axiome (A 5) de l'existence d'un ensemble

pCR 009 7

infini, au cas où U ne contiendrait pas un tel ensemble), lorsqu'on les applique à des objets de l'Univers U, donnent encore des objets du même Univers. C'est ainsi qu'on vérifie par exemple que, avec les notations de (S' 8), on a aussi $\prod_{i \in I} X_i \in U$. Il y a cependant des exceptions possibles évidentes et "idiotes" à ce principe général, provenant de l'usage du symbole τ dans certaines constructions mathématiques. Ainsi avec la définition des cardinaux donnée dans Bourbaki il est certainement indémontrable que si $X \in U$, alors $\mathrm{card}(X) \in U$. C'est pour cette raison que nous sommes obligés d'introduire un schéma d'axiome (S 9) relatif au symbole $\tau_x R(x)$, (si nous désirons rester dans le formalisme Bourbaki et garder ce symbole - ce qui n'est pas le cas du rédacteur). On pourrait aussi, au lieu d'introduire cet axiome changer les définitions de Bourbaki chaque fois que le symbole τ est utilisé sans nécessité (comme dans le cas de la définition des cardinaux). Un tel changement avait déjà été décidé pour la définition de l'ensemble somme, et il semble que le nombre de changements à faire sera assez limité.

<u>Proposition</u> 2 - <u>Toute intersection d'Univers est un Univers.</u>

Trivial.

<u>Corollaire</u> - <u>Si</u> x <u>est élément d'un Univers, il existe un plus petit Univers contenant</u> x.

<u>Définition</u> 2 - <u>Le plus petit Univers contenant</u> x (<u>s'il en existe</u>) <u>est noté</u> Tx <u>et appelé le type de</u> x.

<u>Proposition</u> 3 - <u>Soit</u> U <u>un Univers, et soit</u> $X \in U$. <u>Alors</u> $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(U)$

En effet, en vertu de (A' 1), $X \in U$ implique $X \subset U$; appliquant ceci à $\underline{P}(X)$ (qui est aussi $\in U$ en vertu de (A' 4)) on trouve $\underline{P}(X) \subset U$, d'où card(X) $<$ card($\underline{P}$(X)) $\leqslant$ card(U), C.Q.F.D.

<u>Corollaire</u> 1 - <u>On a</u> U $\notin$ U, <u>plus généralement si</u> C <u>est un ensemble tel que</u> card (C) $\geqslant$ card(U), <u>on a</u> C $\notin$ U.

<u>Corollaire</u> 2 - <u>Si</u> C <u>est comme ci-dessus et si</u> F <u>est une fonction définie sur</u> C, <u>alors on a</u> F $\notin$ U.

En effet, si on avait F $\in$ U il s'ensuivrait, en appliquant la définition d'une fonction et la condition (A' 3), que le graphe de F est dans U. Comme ce graphe est équipotent à C, cela est absurde.

2. - <u>Exemples d'Univers.</u>

a) L'ensemble vide est un Univers.

b) Il existe un plus petit Univers $U_o = T\emptyset$ contenant l'élément $\emptyset$ (et en vertu de prop.1 , (i), c'est le plus petit Univers non vide). Cet Univers se construit par récurrence de façon évidente, en appliquant les conditions de la définition 1 ; c'est un ensemble infini dénombrable. Mais le rédacteur arrivé à ce point, s'aperçoit avec horreur que la construction ne marche même pas ; en effet, le couple étant introduit comme symbole primitif dans Bourbaki, qui néanmoins maintient l'axiome d'extensionalité, on ne peut savoir à priori quand quelque chose est un couple. Ainsi, il se pourrait fort bien que $\emptyset$ soit un couple, par exemple ($\underline{N}$,$\underline{N}$), ce qui exigerait qu'un Univers non vide contienne ($\underline{N}$,$\underline{N}$) et donc $\underline{N}$. De tels canulars sont si écoeurants que le rédacteur admettra froidement que le couple est <u>défini</u> en théorie des Ensembles par $(x,y) = \{\{x\} , \{x,y\}\}$, pour éculé et pisseux que ce soit. Cela rend inutile l'axiome (A 4) de la théorie des Ensembles, et par suite aussi le (A' 3) de la définition 1. Le formaliste rétorquera que, pour ce qu'on veut en faire, peut nous importe ici s'il existe un Univers contenant l'élément $\emptyset$, puisqu'on va poser un axiome

PCR 009 9

bien plus fort plus bas. Il n'empêche qu'il est des gens restant sensibles à des considérations esthétiques, et qui aiment savoir par exemple ce qu'il y a dans leurs Univers, même si ça ne leur facilite pas la démonstration de théorèmes dits sérieux.

c) Il semble qu'il ne soit pas possible de démontrer, en Théorie des Ensembles l'existence d'autres Univers que des deux tout petits construits dans a) et b). On doit pouvoir montrer sans peine que l'existence d'un Univers contenant un élément qui soit un ensemble infini est équivalente à l'existence d'un Univers contenant U_o comme élément, ou encore à l'existence d'un cardinal "strictement inaccessible". Ça devrait fournir un exercice illuminant.

Ici s'arrête nécessairement notre liste d'exemples.

3. - <u>L'axiome des Univers</u>.

C'est l'axiome suivant :

(A 5 bis) <u>Tout objet est élément d'un Univers</u>.

Cet axiome est plus fort que l'axiome (A 5) affirmant l'existence d'un ensemble infini. En effet, en vertu de la proposition 1, (ii), un Univers contenant l'objet $\emptyset$ est infini. Par exemple, $U_o = T\emptyset$ est infini.

Ainsi, pour tout x, le plus petit Univers Tx contenant x comme élément existe. Ainsi on peut considérer $U_1 = TU_o = TT\emptyset$, il contient comme éléments tous les objets mathématiques définis explicitement avant le jour de la rédaction de ce texte, le rédacteur étant le premier à définir un objet qui n'est pas dans U_1, à savoir U_1 lui-même, qui n'est en effet pas dans U_1 (cor.1 à la prop.3) mais est du moins dans $U_2 = TU_1$ par définition de TU_1 .

Admettons maintenant que la notion d'ordinal soit définie ; cela n'est pas fait dans Bourbaki (sauf bien entendu en exercices), mais il n'y a pas d'inconvénient logique à considérer les nombres cardinaux eux-mêmes comme des ordinaux (à tout nombre cardinal étant associé l'ensemble bien ordonné de ceux qui sont strictement plus petits). Soit n un nombre ordinal, on définit alors par récurrence transfinie un Univers U_n comme le plus petit Univers contenant les $U_{n'}$ $(n' < n)$, ou, ce qui revient au même, comme $U_n = T(\bigcup_{n' < n} U_{n'})$. Il est possible que seuls les Univers $U_1, U_2, U_3 \ldots$ correspondant~~s~~ aux ordinaux finis ~~seront~~ doivent être effectivement utilisés par le mathématicien, mais quoi qu'il en soit il reste de la marge.

4\. - L'axiome (A 6) dit "l'axiome gratuit" ou "l'axiome d'épuration", (suivant qu'on est formaliste ou esthète).

C'est le suivant :

(A 6) Tout objet est élément d'un Univers de la forme U_n .

Le rédacteur l'introduit pour deux raisons : 1.) il lui semble satisfaisant pour l'esprit ; 2) en théorie des catégories, on devra à chaque moment de l'exposition se limiter à la considération d'objets dans un Univers U_n, pour être en mesure de bénéficier de l'axiome (S 9) plus bas - donc autant admettre que tout objet est dans un tel U_n. Le rôle pratique de cet axiome est cependant nul, car il n'empêchera pas qu'on soit quand même obligé de se limiter à un U_n donné, et que peu importe dès lors de savoir ce qui concerne les objets qui ne sont pas dans U_n (et en particulier, s'ils appartiennent chacun à un $U_{n'}$).

On peut d'ailleurs énoncer (A 6) indépendamment de l'axiome (A 5b) de la façon suivante, qui fournira un exercice plaisant. Soit E un

PCR 009 11

ensemble, désignons par $S_8(E)$ l'ensemble réunion de E et de l'ensemble des réunions $\bigcup_{i\in I} X_i$ pour toutes les familles $(X_i)_{i\in I}$ avec $I \in E$ et $X_i \in E$; par $A_1(E)$ l'ensemble réunion de E et de la réunion de tous les objets de E, par $A_2(E)$ l'ensemble réunion de E et de l'ensemble des $\{x\}$ avec $x \in E$, par $A_4(E)$ l'ensemble réunion de E et de l'ensemble des $\{\underline{P}(X)\}$ pour $X \in E$, enfin par $S(E)$ l'ensemble réunion de E et de $\{E\}$. (On n'introduit pas $A_3(E)$, puisque le couple est supposé défini comme $\{\{x\}, \{x,y\}\}$). On pose $F(E) = S_8(A_1(A_2(A_4(E))))$ et $G(E) = S(F(E))$. On définit ensuite, pour tout ordinal n, l'ensemble $F_n(E)$ par $F_{n'+1}(E) = F(F_{n'}(E))$, et $F_n(E) = \bigcup_{n'<n} F_{n'}(E)$ si n est un ordinal limite, définition analogue pour $G_n(E)$. On voit facilement que les $G_n(E)$ vont strictement en croissant, et l'axiome (A6) est que tout objet est élément d'un $G_n(\emptyset)$. Quant aux $F_n(E)$, ou bien ils croissent strictement, ou bien ils finissent par s'arrêter, et l'ensemble obtenu est alors le plus petit Univers contenant E comme élément. L'axiome (A5 bis) signifie que c'est cette deuxième alternative qui se produit (quel que soit E) ; cet axiome est d'ailleurs équivalent (du moins si on admet déjà (A 6 ?)) au suivant : tout cardinal est majoré par un cardinal strictement inaccessible. Il est certainement possible de trouver un foultitude d'exercices polonois et délectables de ce genre, notamment concernant la "structure" des objets d'un U_n. Question : Y-a-t-il d'autres Univers que les U_n et l'Univers vide ? Cela semble bien probable.

5. - <u>L'axiome</u> (S 9) <u>dit "l'axiome garde fou"</u>.

Comme son nom l'indique, son objet est de neutraliser les effets d'un usage idiot du symbole τ de Hilbert. Il s'énonce ainsi :

(S 9) Soit R une relation , x une lettre, n une lettre ne figurant pas dans R. Alors " [n est un ordinal et il existe un $x \in U_n$ tel que R(x)] implique ($\tau_x R(x) \in U_n$) " est un théorème.

Des axiomes comme celui-ci seront superflus le jour où Bourbaki aura bien voulu balancer le symbole τ pour le remplacer par un quantificateur et le bon vie~~ux~~il axiome du choix.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-