

Motifs

①

2145

Systèmes de coefficients {
 I définitions, formules etc
 II systèmes de coefficients particuliers
 III ? Systèmes de coefficients
 IV catégories de motifs

I Systèmes de coeff. généraux $\mathcal{C}$

Donner schém. de base S_0 ($\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{(p)}, \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$)
 + catégorie pleine $\mathcal{C}$ de Schémas $\rightarrow$ contenant schémas de type fini sur S_0

$\mathcal{C}$ est une catégorie fibrée sur $\mathcal{C}$

$\forall X \in \mathcal{C}, \mathcal{C}_X$ catégorie triangulée + $\mathcal{C}_X^0$ catégorie abélienne adaptée
 $\forall f: X \rightarrow Y, f^*: \mathcal{C}_Y \rightarrow \mathcal{C}_X$

exact
 compatible avec
 généralisations

multiplicatif
 an. comm. unitaire
 (conditions sur i, h^0)

$\mathcal{A}$ catégorie triangulée
 $i: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^0$ cat. abélienne

i foncteur
 h^0 foncteur abélien
 $h^0 i \simeq \text{id}$

$D^b(\mathcal{A})$

$(\Rightarrow) i$ pl. f. dèle

formulation?

Yoga 1 On veut formules $RH_{\text{ét}}, Rf_*, Rf_!, Rf^! (Lf^*)$
 (pour commencer, en gardant des coeff. constants)

② $RH_{\text{ét}}(P, Q)$

$\text{Hom}(\mathcal{A}, RH_{\text{ét}}(-, \mathbb{Q})) \simeq \text{Hom}(\mathcal{A}^0, \mathbb{Q})$

③ Rf_* f. séparé de type fini {propre, fini} par adjoints de Lf^*
 (quelques (P.T.) par adjoints de Lf^*)

④ $Rf_!$ (f. séparé de type fini)

$Rf_!(F) \simeq Rf_*(F)$

$X \subset \bar{X} \hookrightarrow Y = \bar{X} - X$

$\downarrow Lf^* \rightarrow F \rightarrow \bar{F} \rightarrow F_Y \rightarrow 0$
 $\S \quad \text{epi} \quad \text{isom}$

⑤ $Rf^!$ adjoint de $Rf_!$

$(Rf_!(1), \mathbb{Q})$

+ propre + abélien

(moyennant une théorie des $\mathbb{Q}_{X/Y}$ $\rightarrow$ $\mathbb{Q}_X \rightarrow \mathbb{Q}_Y$ base 1)

Formules

②

2445

$$Rf_! (R\Gamma_{\text{ét}}(P, Q)) \simeq R\Gamma_{\text{ét}}(Lf^*(P), Lf^!(Q))$$

Formule Lefschetz

Yoga 2 Coefficients discrets

mm → a) $f: X \rightarrow Y$ est une immersion ouverte, Lf^* est une isom.

b) Th. de dgt. de base propre
 $\Rightarrow (Lf^* \text{ compatible : } R\Gamma)$

c) Th. de dgt. de base lisse

Rf_* et $R\Gamma_{\text{ét}}$ et Lf^*

commutent au dgt. de base lisse

cas
 spécial
 au cas
 discret

X
 $\downarrow$
 $Y \leftarrow Y'$

lisse

d) descente "algebrique"

~~mm~~ { par recouvrement ouvert
 par un faisceau propre singulier
 par un faisceau plat plat propre

($\Rightarrow$ a+d) $f: X \rightarrow Y$ homom. universel de fais. lisse,
 Lf^* est une isom.

~~ex~~ Sur un corps, la catégorie $\mathcal{T}_k^0$ est anticommutative
 Hom. de degré 0

Yoga 3 Condition de finitude $k_C = \text{End}(1_{S_0})$

Notion de coefficient FF $\mathcal{T}_X^0$ "de versin" (steady)
 (autre versin $F' \in \mathcal{T}_X$)

OK $\rightarrow$ (F serwa n) $\check{F} \otimes F \simeq \text{End}(F)$
 k_C (un bon cas au cas) $\Downarrow$ serwa

(3)

a) Soit $F \in \text{Ob } \mathcal{T}_X^0$, $X \neq \emptyset$, alors $\exists U \subset X$
 ouvert $\neq \emptyset$
 tel que $F|_U$ severse

Con. si $X = \text{Spec } k$, tout $F \in \text{Ob } \mathcal{T}_X^0$ severse

b) Hom (F, G) de type fini sur $k[\mathcal{T}_X^0]$

c) Si X normal, pt générique $y \rightarrow X$

$F \rightarrow F_y$ pl. fd de $\mathcal{T}_X^0 \text{ sur } \mathcal{T}_y^0$ severse

F severse $\rightarrow F \simeq \text{val}(F_y)$

$(\text{Hom } (G, F) \simeq \text{Hom } (G_y, F_y))$

direct

Yoga 4 (de recollement) (à la Artin)

$Y \subseteq X \supseteq U$
 $\parallel$
 $X \supseteq U$

F sur X

$F_y \rightarrow \varinjlim_i F_{U_i} = \varphi(F_U)$

Si cet val. est application de un morphisme
 fidèle de l'anneau, c'est val. avant.

Yoga 5 (d'exactitude au de degrés bornés)

Car si $k[y]$ est un corps : on ne peut pas des
 degrés bornés.

Yoga 6

Commutativité avec $\varprojlim$ et $\varinjlim$
 $\varprojlim \mathcal{T}_X^{(0)} \simeq \varinjlim \mathcal{T}_X^{(0)}$

Yoga 7

frobérian-structures

II Synth de coeff particuliers. (4)

- a) produits
- b) Λ -faisceaux abs. (A de torsion finie: car)
- c) $\mathbb{Z}_\ell$ faisceaux (ℓ ——— car)
 $\mathbb{Q}_\ell$ faisceaux $| S_0 = \text{Sp} \mathbb{Z}[\ell]]$
- 1°) E -faisceaux (E finies $\mathbb{Z}_\ell$ ou $\mathbb{Q}_\ell$) variantes
arithm-
tiques
- 2°) ^(iso) Theorie cristalline en car p $\mathbb{Z}_\ell$ $\mathbb{Q}_\ell$
- 3°) De Rham iso
- 4°) De Hodge

Theorie cristalline ($S_0 = \text{Sp} \mathbb{F}_p$, C contient schémas, de type fini sur corps de car. p)

$\mathbb{Z}_{\text{crist}}$ On veut que w
 X_0 est avec nos k cat. de $\mathbb{F}_p$,
 $\mathbb{Z}_{X_0, \text{ser.}}$ Si X_0 est affine, il se relie à
nouveau forme X lisse sur $\mathbb{A}_k$
(p-annulation des corps résiduels de k)
avec connexion formelle / $\mathbb{Z}_p$

Echelle Frobenius

Theorie de De Rham ($S_0 = \text{Sp} \mathbb{Q}$ C contient schémas de type fini sur corps $k \supset \mathbb{Q}$)

$\mathbb{Z}_{DR/\mathbb{Q}}$ coeff de De Rham absolus (w. $\mathbb{Q}$) $| k \supset \mathbb{Q}$

$\mathbb{Z}_{DR/k}$ X de type fini sur k, $\mathbb{Z}_{DR/k}^0 X$ défini par Deligne

$\mathbb{Z}_{DRF/k}$ + filtration ?

(5)

$$\mathcal{Z}_{DR/Q} \rightarrow \mathcal{Z}_{DR/k} \rightarrow \mathcal{Z}_{DR/k'}$$

$k \subset k'$

"dépê de Deligne", mais avec Antisymétrie sur Q
 Schémas (sur Q) à condition de "régularité".

Théorie de Hodge

$S_0 = \text{Spec } Q$, $C = \text{schéma de type fini sur } Q$

$$\mathcal{Z}_{Hd} (F_{\text{ob}} \mathcal{Z}_{Hd}^{\bullet}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{A-faisceaux alg. cohérents sur } X^{\text{an}} \\ (\Rightarrow M \otimes_Q C \in \mathcal{Z}_{DR/C}^{\bullet}) \\ + \text{ filtration croissante de } M \text{ "poids"} \\ W_i(M) \subset M \\ + \text{ filtration de sous-modules de } M \otimes_Q C \end{array} \right.$$

Axiome a) une donnée F_{ob} est une structure de Hodge mixte
 b) Transversalité de Griffiths

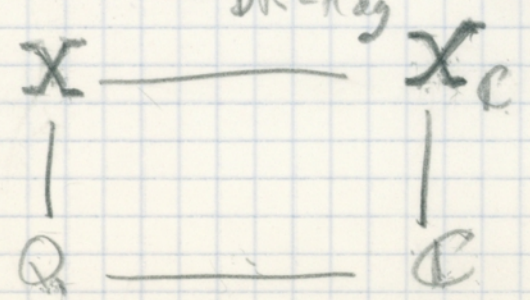
Théorie de Beilinson ($S_0 = \text{Spec } C$) $\mathcal{Z}_Z, \mathcal{Z}_Q$

Relations entre $\mathcal{Z}_{DR}, \mathcal{Z}_{\text{cris}}, \mathcal{Z}_{DR}, \mathcal{Z}_{Hdg} (\mathcal{Z}_Q)$

$$\mathcal{Z}_{Hdg} \rightarrow \mathcal{Z}_{DR/C} \quad (\text{sur } C)$$

Théorie de Hodge - De Rham

$S_0 = \text{Spec } Q$
 C schéma de t.f. sur Q



$\mathcal{Z}_X^{\bullet} = \text{cat. des symboles}$
 $(F, M, \varphi)_{\text{an}}$
 $F_Q \subset \text{ob } \mathcal{Z}_{DR/Q}^{\bullet} X$

φ un isom. entre $(F_Q) \otimes_Q C \hookrightarrow M_C \subset \text{ob } \mathcal{Z}_{Hdg} X_C$
 et le faisceau de DR associé à M_C

Relations entre Cris et DR

Soit X de $\text{d.f. sur } (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
 ou un sur V anneau de val. disant
 d'anneaux caractéristique p (corps
 résiduel parfait)

X intègre dominant V

$X_0 \leftarrow X \leftarrow \hat{X}$ $\hat{X} - X_0 = (\hat{X})_{/K} \xrightarrow{\text{dérivée}} X_K$ forme sur $V \subset X$

$S = \text{Spec } V \leftarrow \text{Spec } K$

Modif ^{loc} M sur X défini

- 1°) $\text{Cris}(M|X_0)$ Module loc libre strictement sur $\hat{X}_K$ (rigide-aur)
- 2°) $\text{DR}(M|X_K)$ Module strictement filtré sur X_K

après scindé de la filtration, on insère dans X_K "est" (10)

D'origine de structure mixte: DR = crystal
~~sur X~~

D'où DR-F-crystal

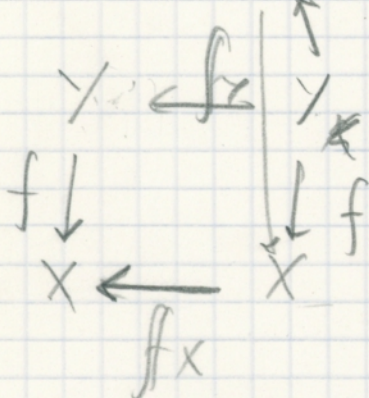
~~$M(X)$~~ $M(X) \rightarrow$ DR-F-crystal

⑦

Suite du Frobenius

Si $\mathbb{Z} \rightarrow$ une structure de coeff sur $\mathbb{F}_p$
 et M un $\mathbb{Z}$ -module $X/\mathbb{F}_p$

$$M^{(p/x)} = f_X^*(M)$$



$$M = R^i f_* (M^{(p/x)})$$

$$M^{(p/x)} = R^i f_* (M^{(p/x)}) \rightarrow R^i f_* (M^{(p/x)})$$

$$M^{(p/x)} \rightarrow M$$

$$\text{Chr}(M) = M$$

$$M^{(p/x)} \rightarrow M$$

D'ici notion de F-cristal

Notion de Système de coefficients : F -structure
 (re monte d'un $\mathbb{I}$)

Mystère de Tate-Hodge-Deligne

- Trouver deux catégories pleines des
- a) des DR-F-cristaux $\widehat{X}$ (il y a plus d'un X)
 - b) de la cat. des $\mathbb{Q}_p$ -faisceaux $\widehat{X}_K$

Contenant les $\mathbb{Q}$ -points de $\text{Mot}(\hat{X})$

et une isométrie $\varphi_X: P \cong Q$

de telle façon que pour $M \in \text{Mot}(\hat{X})$

$$\varphi(\text{Cris}_{\text{DR}, \mathbb{Q}}(M)) \cong T_P(M)$$

fonctionnel sur M
comp. avec l'isométrie

Ex Soit X de type fini sur $\mathbb{Z}$, lisse, de dimension d
lisse pour simplifier

M motif sur X

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_{\mathbb{Q}} \\ | & & | \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \end{array}$$

$$M_{\mathbb{Q}} \text{ sur } X_{\mathbb{Q}}$$

a) $\text{DR}(M_{\mathbb{Q}})$ Module différentiel et filtres M

$$b) \forall p, X_p = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$$

$$\text{Cris}(M|_{X_p}) = M_p$$

module différentiel sur $\hat{X}_{\mathbb{Q}}^{(p)}$ avec $\mathbb{F}_p$

c) Autoisomorphisme $\mathbb{F}_p$, $M_p = \pi_p^*(M)$ (représ. shéarique)

$$\hat{X}_{\mathbb{Q}}^{(p)} \xrightarrow{\pi_p} X_{\mathbb{Q}}$$

Appelons de tels foncteurs des $\mathbb{F}_p$ -coeff de De Rham

So fait une abélienne

de Groth
Conjecture

Le foncteur $M_{\mathbb{Q}}(X) \rightarrow$
est pleinement fidèle

Cong de Tate

(9)

~~X~~ normal, def. f sur $\mathbb{Z}$ on sur un
corps normal

$$M_A(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \rightarrow T_\ell(X)$$

$\mathbb{Q}$ $\mathbb{Q}_\ell$

pl. locale

ramifié ou
non ramifié

$$\text{Hom}(M, N) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$$

$$\xrightarrow{\sim} \text{Hom}(T_\ell M, T_\ell N)$$

un tel isomorphisme

X (on sur un corps alg
fermé)

$$\text{Hom}(\mathbb{1}, H^2(\mathbb{Z}/\ell, T(\mathbb{1})) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\mathbb{Q}_\ell, H^2(\mathbb{Z}/\ell, \mathbb{Q}_\ell))$$

$\uparrow$ $\mathbb{Z}$ $\uparrow$ $\mathbb{Z}$
projetif et borné
non $\mathbb{Z}$

$$A_i(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$$

Cong. de Tate global

serait

$x \in X$ $\times$ M, N

$\downarrow$ f

$\downarrow$ h

$$T_\ell(M) \xrightarrow{u} T_\ell(N)$$

$$u \text{ injectif} \iff u \text{ sur}$$

Cong. de Tate given focal ⁽¹⁰⁾

A annu local complet pour top. (fA)-alg
intègre

$$\text{Mod} \text{ser}(A) \rightarrow \text{DR-F-cts}(A)$$

$$\text{Hom}_{\text{int}}(M, N) \xleftrightarrow{\text{DR-F}} \text{Hom}_{\text{cts}}(\text{cts}(M), \text{cts}(N))$$

intégral $\approx$ après $\otimes \mathbb{Q}$ $\otimes \mathbb{P}$

intégral $\rightarrow$ formation des hom de cristallin
qui, après oubli de DR, proviennent d'un
hom $M_k \rightarrow N_k$ (Champs mixtes)

Question
Cong du double réseau : Cong. de Hodge
renforcé en oubliant filtration
(cas serien)
