1052 rua Oscar Freire
Sao Paulo (Brésil)

Sao Paulo le 13.8.1954

Cher Dixmier.

Merci pour ta lettre détaillée du 28.7. C'est bien dommage que tu penses la théorie des C^*-algèbres trop vaste pour être englobée dans ton bouquin. Mais où serait le mal d'un livre de 400 pages ou plus sur ce sujet, ça serait au contraire bien agréable qu'il en existe un, car ce n'est certes pas amusant de s'orienter à tâtons dans la littérature courante. Je regrette surtout que tu ne fasses pas Plancherel; car il ne coûte vraiment pas cher puisqu'on a déjà la bonne technique des algèbres de v.N., et un Plancherel joliment présenté ferait certainement du bien. D'ailleurs, si j'ai bien compris, c'est surtout pour des Plancherels et Cie que sert toute la théorie des C^*-algèbres.

Je précise un point de ma lettre précédente, qui te semblait obscur. Soit A une $*$-algèbre, P l'ensemble des formes positives, unitaires, bornées (au sens algébrique) et normées (i.e. $f(1)=1$ s'il y a unité) sur A. Soit pour tout $x \in A$: $N(x)^2 = \operatorname{Sup}_{f \in P} f(x^*x)$, alors on a aussi
~~N(x)~~
$N(x) = \operatorname{Sup} \|U_x\|$, où U parcourt toutes les représentations unitaires de A. Donc N est une norme sur A telle que l'algèbre complétée de A soit une C^*-algèbre, et les représentations unitaires de A correspondent biunivoquement à celles de cette C^*-algèbre (qui se substitue donc avantageusement à A dans diverses questions, p.ex. Plancherel). Supposons maintenant que A soit déjà muni d'une norme $\|x\|$ qui en fasse une algèbre normée complète, et pour simplifier supposons qu'il existe une unité. Alors les formes positives unitaires et bornées sont identiques aux formes positives continues, les formes normées sont celles telles que $f(1)=1$, ou encore celles de norme 1. Elles forment une partie convexe faiblement compacte de la partie hermitienne du dual de A. La partie hermitienne de ce dual est le dual de la partie hermitienne de A, il revient donc au même de dire que sur A_h, la norme donnée est égale à $N(x) = \operatorname{Sup}|f(x)|$, ou que la boule unité de A_h' est l'enveloppe disquée faiblement fermée de P. Cette dernière par raison de faible compacité n'est autre que l'ensemble des formes $f-g$, f et g positives, $\|f\|+\|g\| \leq 1$. S'il en est donc ainsi, la norme donnée est identique à la norme N sur A_h, et par suite équivalente à N sur A (car du point de vue réel, une algèbre normée involutive est somme directe topologique de sa partie hermitienne et de sa partie antihermitienne). Donc A est complète pour N; donc à condition de changer $\|x\|$ par une norme équivalente, A devient une C^*-algèbre. Si on ne veut plus que les deux normes coïncident sur la partie hermitienne, il suffisait même de supposer que toute forme hermitienne sur A est différence de deux formes positives, i.e. que A_h' est engendré par l'enveloppe disquée Q de P. Car A_h' étant tonnelé, il en résulte que Q est un voisinage de O, donc par polarité que les normes $\|x\|$ et $N(x)$ sur A_h (donc aussi sur A) sont équivalentes.

x ∈ A hermitien, 1 = Sup|f(x)| f ∈ P

[illegible]ée = [illegible] symétrique

Soit A une C^*-algèbre. par bitransposition, toute représentation unitaire de A, soit $x \to U(x)$, se prolonge en une application de même norme du bidual A" dans L(H), et de façon précise sur l'adhérence faible de U(A). Si toute forme positive sur A est de la forme $(U(x).a,a)$ (pour ceci, on prend pour U la somme hilbertienne des représentations unitaires associées aux diverses formes positives normées sur A), la bitransposée U" est biunivoque, et identifie donc A" à une algèbre de von Neumann. On voit aussitôt que la topologie ultrafaible de A" est $\sigma(A'',A')$, en particulier les formes positives normales sur A" sont les formes positives quelconques sur A. De plus, on constate aussitôt que si V est une représentation unitaire de A, alors V" est une représentation normale de U" (ce qui établit une correspondance biunivoque entre les représentations unitaires quelconques de A, et les représentations normales de A"). Cela établit d'ailleurs le fait (facile directement aussi) que la structure d'algèbre de v.N. sur A" est canonique. Ceci me semble commode dans bien des cas. Ainsi on appelera support d'une forme positive sur A le support de la forme nor-

male sur A" qu'elle définit (mais gaffe, si A est de v.N. et si la forme
donnée est déjà normale, ça fait deux supports différents). Deux formes po-
sitives seront dites disjointes si leurs supports sont orthogonaux. Ce fois
ci, il n'y a pas d'ambiguité quand A est déjà une algèbre de von Neumann et
~~xx~~ u et v normales, comme il résulte par exemple de la proposition (bien
facile): deux formes positives u,v sur la C^*-algèbre A sont disjointes si e
seulement si $\|u-v\| = \|u\| + \|v\|$.

J'en viens à la question d'unicité de la décomposition d'une forme liné
aire hermitienne φ comme différence de deux formes positives disjointes u
et v. On peut supposer A une alg. de v.N. et u,v normales. Alors on a un ré
sultat plus général: Soient u,v deux formes positives (finies ou non) norma
les définies sur A^+, et semi-finies (par quoi on entend qu'il existe un
idéal bilatère faiblement dense, sur la partie positive duquel u resp. v es
fini). La notion de support est définie de ~~fxx~~ façon évidente; supposons
~~xxxxx~~ les supports de u et v orthogonaux. Alors je dis que u et v sont uniqu
ment déterminés par la connaissance de la forme u-v (qui est une forme liné
aire sur un idéal bilatère faiblement dense convenable de A; noter que l'en
semble des idéaux bilatères faiblement denses est une base de filtre, ce
qui précise le sens de l'énoncé précédent). La démonstration est absolument
élémentaire (pas de décompositions spectrales !), on montre directement
comment u et v peuvent s'exprimer en termes de $\varphi = u-v$. En fait, on peut encore
affaiblir la notion de semi-fini dans cette démonstration. Corollaire: si
φ est centrale, u et v sont des traces etc. Mais question: si on ne suppos
pas u et v disjointes, peut on écrire pourtant φ comme différence de deux
formes positives normales semi-finies disjointes ? C'est bien plausible,
mais je n'ai pas encore regardé. - Bien entendu, si on ne suppose plus que
A est une algèbre de v.N., on a des mêmes énoncés sans condition de norma-
lité, mais la condition de semi-finitude étant ici remplacée par l'existenc
d'un idéal bilatère dense (pour la norme) sur lequel la forme positive en-
visagée est finie (ce qui rejoint le point de vue de Godement dans son ex-
posé de Plancherel). On devra passer comme toujours à A" (mais j'avoue que
je n'ai pas fait les vérifications).

~~Malheureusement~~ Enfin, dans la décomposition canonique $\varphi = u-v$ avec
u et v positives, $\|\varphi\| = \|u\| + \|v\|$, si A est de v.N. et φ ultrafaiblement conti-
nue, alors u et v ~~sont~~ le sont aussi (i.e. sont normales). Il suffit d'ex-
hiber une telle décomposition, avec u et v normales. Mais la topologie ultr
faible de A étant induite par la top. ultrafaible d'un L(H), on peut suppo-
ser A = L(H). Mais alors on a une forme bien explicite des formes hermitien-
nes ultrafaiblement continues, donnée par des operateurs à trace hermitiens
dont la décomposition spectrale donne la décomposition voulue.

Malheureusement, je n'ai pas vu de démonstration générale du théorème d
commutation suivant (qu'il suffit maintenant d'énoncer pour les formes po-
sitives): Soit A alg. de v.N., u une forme positive normale sur A (en fait,
il devrait être inutile de supposer u finie, semi-finie devrait suffire),
soit B son "commutant" dans A. Alors B contient son commutant B' dans A.
Cela suggère une théorie de la commutation, qui serait la suivante; dis moi
si par hasard tu ne sais pas si elle est fausse. (Mais il me semble que le
seul cas présentant des difficultés - i.e. qui ne se réduit pas par des tec
techniques connues de décompositions spectrales - est celui d'une algèbre
purement infinie). On prend les commutants dans A (laissant tomber L(H) !),
notation B', B" etc. Une sous-algèbre de v.N. de A est dite close, si elle
est identique à son bicommutant (question: suffit-il qu'elle contienne le
?// centre ?) Soit P l'ensemble des formes positives normales semi-finies sur A.
(Il est cependant possible que la définition donnée plus haut de semi-finie
soit trop stricte. Car alors sur un facteur purement infini, donc simple,
une forme semi-finie serait automatiquement finie; alors ça semble trop
beau que la théorie esquissée ci-dessous puisse marcher). On dit que $x \in A$
et $u \in P$ commutent, si $u(xy) = u(yx)$ pour tout y dans ~~xxxxxx~~ un idéal bila-
tère ~~xxx~~ faiblement dense assez petit (définition sujette à variation, voir
ci-dessus). D'où notion de commutant $\gamma(B)$ dans P d'une partie de A, et
commutant $\gamma(M)$ dans A d'une partie M de P. Voici ce qui devrait être vrai
(et est vrai dans le cas d'une algèbre semi-finie):

Th. 1 Les parties de A qui sont des commutants $\gamma(M)$ $(M \subset P)$ sont exactement les sous-algèbres closes.

(Ce théorème serait faux, déjà pour $A = L(H)$, si on restreignait P aux formes finies). ~~Si M est une partie de P, soit (M)~~ Une partie M de P est dite close, si c'est le commutant $\gamma(B)$ d'une partie de A. Une intersection de parties closes est close, d'où partie close engendrée. Si $M \subset P$, soit $\sigma(M) = \gamma(M)'$, $M \to \sigma(M)$ établit une correspondance biunivoque entre les parties closes de P et celles de A. ~~Par transport de structure~~ ~~on a la notion de parties M et N commutant si (M) et (N) commutent~~
On dit que M et N commutent, si $\sigma(M)$ et $\sigma(N)$ commutent. Pour ceci, il faut et il suffit que tout élément de M commute à tout élément de N. Partie commutative de P: qui commute à elle-même. Deuxième conjecture:

Th. 2 Tout $u \in P$ commute à lui-même, i.e. la partie close qu'il engendre est commutative (ou encore $\gamma(u)$ contient son commutant, ou encore $\sigma(u)$ est commutative). Alors la partie close engendrée par u est identique à l'ensemble des bornes supérieures dans P des ensembles de formes ${}^{x}u = u^{x}$, où x parcourt la partie positive de $\sigma(u)$. Si u est finie, l'ensemble des formes finies qui sont dans la partie close engendrée par u, est aussi l'adhérence de l'ensemble des ${}^{x}u = u^{x}$ (pour la norme du dual de A).

vrai pour vérifier $\|p\|.u = 1$

On pose bien entendu ${}^{x}u(y) = u(yx)$, $u^{x}(y) = u(xy)$; si x est positive et $x \in \sigma(u)$, alors ${}^{x}u = u^{x}$ est une forme positive ~~semi-fi~~ (semi-finie). Enfin:

Th. 3 Pour qu'une partie close M de P (resp. de la partie P_o de P formée des formes positives finies) soit commutative, il faut et il suffit que ce soit un lattice (existence du sup de deux éléments). ~~Dans le cas~~

En vertu du théorème de Kakutani, il s'ensuivra que l'espace vectoriel engendré par M (dans le cas où $M \subset P_o$) est isomorphe avec toutes ces structures à un espace L^1, dont le dual sera alors $\sigma(M)$. - Bien entendu, on dira qu'une partie de P_o est close si c'est l'intersection de ~~P~~ P_o avec sa clôture dans P.
dans le th. 1

Dans le cas où A est finie, la théorie se simplifie, car il suffit de ne considérer que des formes positives finies; elle est d'ailleurs à peu près triviale dans ce cas. Dans le cas général, si on est embêté par la considération de formes positives non finies, on peut ignorer l'énoncé 1, et n'envisager que les deux autres énoncés, dans le cas de formes finies.

Dernière question, qui ne devrait pas être très vache: sait-on si toute forme linéaire ultrafaiblement continue u sur l'algèbre de v.N. A admet une décomposition polaire $u = {}^{U}v$, avec v forme positive normale, et U partiellement isométrique ? Bien entendu, il y a aussi des questions d'unicité, sous des ~~condition~~ conditions faciles à préciser.

Pour la démonstration du théorème sur la projection de L(H) sur une sous-algèbre de v.N., je t'enverrai une copie dès que j'aurai rédigé ça. J'écrirai peut-être un petit article à l'occasion. ~~Si je peux te donner des renseignements~~ ~~dans ce domaine~~

J'espère que mes questions ne finissent pas par t'embêter. Meilleures salutations

A. Grothendieck

P.S. Ecris-moi plutot à mon adresse personnelle, c'est plus sur. - Je sais démontrer qu'en décomposant une distribution centrale de type positif sur un groupe de Lie, on peut se borner à des caractères qui sont des distributions (d'ordre un de plus). Ce n'est pas bien profond d'ailleurs. Est-ce que ça se savait déjà ?

ou du moins un quotient de $\sigma(M)$ (car dans le cas des types purement infinis, s'introduit une question de supports. Ainsi, $M = \{0\}$ est clos stable, c'est le commutant $\sigma(A)$ de A, donc $\sigma(M) = Z$, or $Z \neq 0$ n'est pas le dual de $\{0\}$!)