[illegible] rue Oscar Freire
Sao Paulo (Bresil)

Sao Paulo le 28.6.1954

Cher Dixmier,

Connais-tu la réponse à la question suivante. Soit $\underline{A}$ un anneau d'opérateurs dans un Hilbert H, existe-t-il une projection u de norme 1 de R(H) sur $\underline{A}$, ~~de norme 1,~~ compatible avec l'involution, et telle que $u(ATB) = Au(T)B$ pour $A,B \in \underline{A}$? C'est vrai si H est de dimension finie (et évidemment c'est bien facile dans ce cas), ou si $\underline{A}\supset\underline{A}'$, et de ce dernier cas on déduit facilement que c'est vrai si $\underline{A}$ est commutative (commencer à appliquer le résultat précédent à un anneau commutatif maximal B contenant $\underline{A}$, d'autre part on sait qu'il existe une projection de $\underline{B}$ sur $\underline{A}$ qui a les propriétés voulues). Bien entendu, même si $\underline{A}$ est commutatif maximal, il n'y a pas unicité de la projection u. Voici la démonstration du deuxième cas $\underline{A}\supset\underline{A}'$: Soit K le spectre de $\underline{A}'$, Ω l'ensemble des partitions finies de K en ensembles ouverts et fermé, muni de sa relation d'ordre naturelle; pour $\omega=(\omega_i)\in\Omega$ on pose $u_\omega(T)=\sum_i T_{\omega_i} T T_{\omega_i}$, on considère un ultrafiltre sur Ω plus fin que le filtre des sections croissantes, et on pose $u(T) = \lim u_\omega(T)$ (limite faible!). - Le problème m'intéresse pour pouvoir ramener les propriétés vectorielles et topologiques d'algèbres autoadjointes uniformément fermées quelconques d'opérateurs, aux propriétés de R(H), d'où facilement aux propriétés de l'algèbre $R_0(H)$ des opérateurs compacts, ce qui ramènera souvent à des propriétés de nature métrique sur les R(H) ~~quand~~ où H est de dimension finie. De même, les propriétés des espaces duals de C^*-algèbres (et aussi des espaces L^1 qui interviennent en intégration non commutative) se rameneraient aux propriétés des espaces $H\hat{\otimes}H$.

A propos, en vue de simplifier l'exposé de Godement sur la transformation de Fourrier des groupes loc.comp.unimod., j'ai eu besoin du résultat suivant, qui se démontre assez facilement en se ramenant à R(H): les formes linéaires positives sur une C^*-algèbre engendrent le dual. Cela est-il connu, ou te semble-t-il utile de publier une petite note là-dessus ?

Comment va le bouquin que tu écris sur les Anneaux d'opérateurs ?

J'espère que cette lettre t'arrivera, et que tu pourras me donner une réponse positive. Bien à toi

A. Grothendieck