

A. Grothendieck
3 Chemin du Grand Moulin
Nancy

Nancy 7.6.75

Cher Dixmier,

Pourriez-vous m'envoyer votre article
sur la trace dans les anneaux de type fini,
et votre papier sur A sur les
"fonctions linéaires sur l'ensemble des
opérateurs..." ?

Je vous envoie un résumé (gros-
siviste) à une question posée dans
ces deux papiers (vous en avez sans
probablement le résumé anglais):
soit $\mathcal{I}$ un $\mathcal{A}$ -module de type fini
sur $\mathcal{A}$ (i.e. $\mathcal{I} \cong \mathcal{A}^n$) et $\mathcal{B}$ un $\mathcal{A}$ -module
de type fini, pour la suite. Le résumé
est un, on voit $a \in \mathcal{A}$, $a \neq 0$,
l'application $x \mapsto a \otimes x$ de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{I}$
est évidemment un isomorphisme dans,

mais si le projet envisagé était une
pour $\mathcal{P}$, elle le serait pour ses sous-
ensembles, donc pour K , ce qui est ~~faux~~.

Je ~~retrouve~~ une nouvelle
solution,

Furthermore

Nancy le 2.5.1952

Cher Dixmier,

Je n'ai jamais prouvé ni prétendu avoir prouvé le théorème dont tu parles, et qui d'ailleurs est faux. Il est en effet immédiat qu'il équivaudrait à l'énoncé suivant: Si K est un espace compact muni d'une mesure μ , ~~M~~ l'espace des fonctions sur K qui sont mesurables pour μ , muni de la topologie de la convergence simple, F un sous-espace de M contenant une suite partout dense, alors il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $K_\varepsilon \subset K$ avec $|\mu|(K \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$, les $f \in F$ ayant toutes une restriction à K_ε continue. Or, prends $K = (0,1)$ avec la mesure de Lebesgue, il est (je pense) connu, et facile à démontrer (excellent exercice Bourbaki) qu'il existe une suite de fonctions mesurables sur K ~~convergeant~~ à laquelle toute fonction définie sur K soit adhérente, ce qui prouve en particulier que M lui-même est déjà séparable, or M est loin d'avoir la propriété voulue!

sous sa forme initiale
Néanmoins, ton théorème est vrai si F est métrisable, comme tu t'en es sans doute convaincu tout seul, car on se ramène alors au cas où la fonction faiblement mesurable donnée prend ses valeurs dans une partie équicontinue de F' , cas où l'énoncé est trivial et figure déjà dans une rédaction antérieure. Comme le théorème est vrai encore lorsque F est le dual faible d'un espace métrisable séparable F' , (puisque alors $t \rightarrow \lambda_t$ est fortement-m.s.) F' (comme par exemple ℓ^∞) pour lequel la boule unité du dual faible F de F' admet (en méthode que pour F du type ℓ^1) une suite partout dense, il reste que dans les cas usuels, le théorème envisagé est valable. On pourrait même remarquer (re-exercice ?) que la catégorie d'espaces localement convexes séparables F pour lesquels l'énoncé envisagé est vrai, est stable pour le produit topologique ou la somme

directe d'un ensemble dénombrable d'espaces facteurs, ^{et} par l'opération de prendre un quotient ou une topologie moins fine - donc aussi pour les limites inductives dénombrables etc - en fait, on attrappe tous les espaces raisonnables de l'Analyse.

Bien à toi

A. Grothendieck

