# Lettre à J. Dixmier
# 24.01.1955

par

Alexander Grothendieck

Transcription by

CSG ISTITUTO GROTHENDIECK

Edited by Mateo Carmona
mateo.carmona@csg.igrothendieck.org
Centre for Grothendieckian Studies (CSG)
Grothendieck Institute
Corso Statuto 24, 12084 Mondovì, Italy



This transcription is based on an unpublished scan. This project was carried out by researchers and volunteers of the CSG under the supervision of Mateo Carmona. More details are available at:
https://csg.igrothendieck.org/transcriptions/.

How to cite:

A. Grothendieck. *Lettre à J. Dixmier*. Unpublished letter, 24.01.1955. Transcription by M. Carmona et al., CSG, Grothendieck Institute. Draft, October 2025.

Lawrence 24.1.1955

A. Grothendieck
1645 Kentucky Street
Lawrence (Kansas)
USA

Cher Dixmier,

Merci pour ta lettre. Bien que je me doutais qu'une partie des notions introduites dans mon papier (sinon toutes) devaient être connue, je ne connaissais aucune bibliographie, et ne savais pas, en effet, que les $\Delta_A(t)$ avaient été considérés par [Richard] Kadison. A-t-il aussi la "formule fondamentale" $\Delta_{|AB|} \leq \Delta_{|A|}\Delta_{|B|}$ ?

Je ne t'ai jamais demandé si une forme linéaire hermitienne ultrafaiblement continue sur une $C^*$-algèbre se décompose sous la forme $\varphi_1 - \varphi_2$, avec $\varphi_1, \varphi_2 >> 0$ et $\varphi_1$ et $\varphi_2$ disjointes. Si je me rappelle bien, je t'ai au contraire donné la démonstration dans la dernière lettre de Sao Paulo (mais *l'as-tu reçue ?*) C'était une lettre fort longue, écrite à la machine, où je posais un tas de conjectures[1]. Je n'ai jamais eu de réponse. Mais peut-être n'as-tu pas pu déchiffrer mon écriture dans une lettre antérieure (?!). En effet, on prouve

a) Toute $\varphi$ hermitienne continue sur une $C^*$-algèbre $A$ s'écrit $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, avec $||\varphi|| = ||\varphi_1|| + ||\varphi_2||$, $\varphi_1, \varphi_2 >> 0$ (Hahn-Banach) ;

b) Cette décomposition est unique. La condition $||\varphi|| = ||\varphi_1|| + ||\varphi_2||$ équivaut aussi au fait que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont disjointes ;

c) Si $\varphi$ est ultrafaiblement continue (sur $A$ supposé de von Neumann), $\varphi_1$ et $\varphi_2$ le sont.

c) est immédiat, car il suffit de prouver l'existence d'au moins une décomposition $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, $\varphi_1$ et $\varphi_2 \in A_*$, $||\varphi|| = ||\varphi_1|| + ||\varphi_2||$. Par Hahn-Banach, on est ramené au

[1] Je t'y donnais aussi la démonstration explicite que si $A$ est une $*$-algèbre normée complète telle que toute forme linéaire hermitienne continue sur $A$ est différence de deux formes positives, alors (par changement de norme) $A$ est équivalente à une $C^*$-algèbre.

cas où $A = L(H)$. Mais alors $A_* = L'(H)$ (espace des opérateurs de Fredholm), et la décomposition d'un opérateur de Fredholm hermitien en sa partie positive et négative donne le résultat cherché.

Quant à la preuve de b), je n'ai pas les papiers sous la main (ils sont dans une grosse malle qui va arriver dans quelques semaines). Aussi il vaut mieux que je te la donne quand j'aurai les papiers. J'ai une rédaction complète de ce fourbi (il n'y a donc pas de canular imprévu à craindre, je pense !).

As-tu l'intention de regarder les questions que je pose dans mon papier sur les inégalités de convexité. Et si oui, penses-tu que le fourbi mérite une rédaction soigneuse dans un "joint paper" ? En ce cas, il serait sans doute préférable que tu assumes la rédaction, pour le bien du lecteur !

Je suis en train de passer en revue mes éléments de top. alg. et me délecte dans des diagrammes variés. J'ai beaucoup de temps à moi, et suis ici tout à fait bien.

Amitiés

A. Grothendieck