Réflexion sur le plan des EGA

par
Alexander Grothendieck

Transcription by

CSG ISTITUTO GROTHENDIECK

Edited by Mateo Carmona
mateo.carmona@csg.igrothendieck.org
Centre for Grothendieckian Studies (CSG)
Grothendieck Institute
Corso Statuto 24, 12084 Mondovì, Italy

This transcription is derived from an unpublished scan. This project was carried out by researchers and volunteers of the CSG under the supervision of Mateo Carmona. More details are available at:
https://csg.igrothendieck.org/transcriptions/

How to cite:

Alexander Grothendieck. *Réflexion sur le plan des EGA*. Unpublished note. Transcription by M. Carmona et al., CSG, Grothendieck Institute. Draft, August 2025.

RÉFLEXIONS SUR LE PLAN DES E.G.A.[1]

1. Plan actuel des E.G.A.

Je prévois le plan suivant :

I, II, III, IV pour mémoire.

V Étude élémentaire des morphismes projectifs.

VI Techniques de construction de schémas.

VII Schémas en groupes et torseurs sous iceux.

VIII Schémas de Picard.

IX Résidus et dualité.

X Intersections et Riemann–Roch.

XI Cohomologie étale : théorèmes généraux, application au groupe fondamental.

XII Cohomologie étale : dualité, Lefschetz.

……

Commentaires sur les différents chapitres prévus :

VII est sensé contenir tout d'abord certaines propriétés de nature très générale des schémas en groupe, dans l'esprit de SGAD VI essentiellement, à l'exclusion notamment de la théorie de structure à la Borel–Chevalley des groupes linéaires, pour laquelle le lecteur devra consulter des traités spécialisés (SGAD, Bible, livre en préparation de Demazure–Gabriel). On ne donnera une étude plus détaillée de types spéciaux de groupes algébriques que dans la mesure où ceux-ci jouent un rôle important en Géométrie Algébrique proprement dite, donc comme auxiliaires pour l'étude de variétés

[1] Prière d'envoyer des objections ou commentaires à Grothendieck !

générales. Même avec cette restriction, vu le rôle important des schémas de Picard d'une part, et des groupes algébriques ou formels commutatifs comme coefficients pour des cohomologies diverses d'autre part (surtout sur des schémas de dimension 1), on pourrait se trouver conduit à englober la théorie de structure des groupes algébriques et formels commutatifs généraux, — ce qui, à lui tout seul, ferait déjà un petit traité assez copieux...

On peut espérer que le livre de Demazure–Gabriel (prévu en deux tomes !) nous dispensera de ce boulot. Comme type spécial de schémas en groupes, dont une étude détaillée doit figurer quelque part dans EGA, il reste alors surtout les *schémas abéliens*, et éventuellement les extensions d'iceux par des groupes de type multiplicatif (tores notamment), qui leur sont apparentées par certaines propriétés de rigidité (cf SGAD IX, X) dont la place serait peut-être également dans EGA VII. Ce Chapitre contiendrait également les résultats spécifiques pour les schémas abéliens, du type de ceux du livre de Lang. On aura tout ce qu'il faut pour faire proprement la dualité des VA, grâce à la construction du schéma de Picard au Chap. VI. Néanmoins, pour certains des résultats numériques-clefs de la théorie (Chap. IV du livre de Lang), on a besoin d'un peu de théorie des intersections (ce qui est l'origine du présent retour sur le plan des EGA) ; on va revenir sur ce point. Sans doute ne convient-il pas, dans un chapitre de nature générale, d'aller en substance beaucoup plus loin que cela : on laissera donc sans doute de côté les schémas modulaires, encore plus les modèles de Néron, et tout ce qui touche l'étude arithmétique des VA. — Comme autre thème que j'envisage pour ce chapitre, il y a l'interprétation des torseurs (= fibrés principaux homogènes) sous les schémas en groupes classiques (linéaire, projectif, orthogonal, symplectique), et à propos du groupe projectif, un tapis sur les algèbres d'Azumaya et les fibrés de Brauer–Severi, dans l'esprit de mon exposé Bourbaki "Brauer I".

VIII La construction de Picard, dans le cas clef traité dans mon exposé Bourbaki tout au moins, figurera dans VI. Il y a cependant un grand nombre de variantes pour ce théorème d'existence, et un grand nombre d'autres questions spécifiques liées au groupe de Picard : voir entre autres mes commentaires dans la collection de mes exposés Bourbaki FGA, et penser aux nombreuses variations sur les théorèmes du carré et du cube. Cela fera un assez gros chapitre, dont le thème est d'ailleurs d'une importance centrale en Géométrie Algébrique.

IX La substance de ce Chapitre est traitée, sous une forme provisoire, par le séminaire

Hartshorne paru chez Springer. C'est un gros pavé, et avec cela fort loin d'être complet (il n'y est pas question des classes de cohomologie associées à des cycles, ni des complexes d'opérateurs différentiels). Hartshorne est plus ou moins d'accord, dans les années qui viennent, d'écrire un bouquin sur le sujet, plus complet et plus au point. S'il le fait, on peut lui faire confiance que ce sera bien fait, et cela nous dispensera d'inclure cette théorie dans EGA : nous renverrons sans vergogne au bouquin de Hartshorne quand cela sera nécessaire.

X La théorie des intersections se fait à grands renforts de catégories triangulées, de groupes K d'iceux etc. Il y aura des notes dans SGA 1966/67.

XI contiendra entre autres les résultats sur le groupe fondamental de SGA 1960 et 1961. La technique s'est cependant considérablement assouplie grâce à l'introduction de la topologie étale et la 1-cohomologie non commutative (cf SGAA, notamment exposés XII à XV). Il y a lieu donc de reprendre entièrement la théorie sous ce point de vue, et il semble dès lors préférable, comme cela a été fait dans SGAA, de prouver les théorèmes techniques clef (théorèmes de changement de base, de finitude, de spécialisation...), en même temps que pour la cohomologie commutative en dimension quelconque. Le Chapitre prévu couvrirait à peu près SGAA I à XVII, sans compter quelques paragraphes spéciaux sur le groupe fondamental, consistant en grande partie en traductions des résultats déjà obtenus en termes de 1-cohomologie non commutative. Les exposés I à VI de Verdier seront sans doute absorbés d'ici là dans un livre systématique sur les topos (Giraud ?), qui contiendra également des sorites sur les faisceaux "constructibles", permettant d'alléger une partie de SGAA IX.

XII contient la partie plus spécifiquement commutative de la cohomologie étale : dualité, application à la formule de Lefschetz...(exposés dans SGAA XVIII, et SGA 1964/65 et 1965/66).

2.

Autres Chapitres qui, en principe, devraient avoir leur place dans un traité de fondements comme les EGA :

1°) Suite de la théorie cohomologique, avec un chapitre sur la cohomologie de De Rham, et éventuellement ses relations avec la cohomologie p-adique par spécialisation en caractéristique p. Un autre chapitre avec les théories de dualité – corps de classes, locales et globales, liées semble-t-il (pour l'instant au moins) aux schémas de dimension 1.

2°) La théorie des jacobiennes généralisées, tant locales que globales, leurs liens avec des adèles en tous genres. C'est encore, essentiellement, un chapitre de cohomologie, intimement lié au deuxième thème envisagé dans 1°).

Il s'agit là de théories pour lesquelles on dispose de quelques idées de départ, mais qui doivent encore considérablement mûrir, avant d'être mûres pour l'absorption dans un traité général. On peut espérer que le mûrissement se fera pendant les années où l'on sera occupé avec les chapitres V à VIII (qui sont parfaitement mûrs pour la rédaction). Signalons d'autres sujets, également d'importance fondamentale, mais bloqués par des difficultés de démonstration dont il est difficile de prévoir quand elles seront surmontées : résolution des singularités, théorie "fine" des cycles algébriques (dans la direction des conjectures de Weil). Prévoir des chapitres à leur sujet revient à vendre la peau de l'ours encore vivant. Enfin, il y a lieu d'envisager aussi :

3°) Un chapitre spécial pour les schémas abéliens, donnant une étude plus fine, et le cas échéant la théorie arithmétique, dépassant les éléments qui seront faits dans VII.

Mais on peut éventuellement considérer que cela dépasse le cadre d'un traité des fondements de la Géométrie Algébrique, et serait plus à sa place dans un traité séparé. La seule théorie des courbes elliptiques représenterait déjà un travail de mise au point et de rédaction considérable, devant laquelle les gens compétents reculent.

3. Duplication avec la littérature existante.

La question se pose au moins à partir du chapitre IX, pour tous les chapitres ultérieurs IX, X, XI, XII, sans compter la dernière partie de III dont il est question par ailleurs. Je propose la politique suivante :

a) Chaque fois qu'une présentation réellement satisfaisante d'un chapitre initialement prévu dans EGA sera disponible dans la littérature, comme ce sera peut-être le cas pour IX avec le livre de Hartshorne, il n'y a qu'à en profiter et se dispenser de re-rédiger en style EGA. On y référera (par un sigle approprié) au même titre qu'aux autres chapitres de notre savant traité.

b) Dans le cas où une grande partie de la substance du chapitre envisagé figure dans la littérature, par exemple dans SGA, et que le travail consistera en grande partie dans un travail de refonte et de réorganisation, comme ce sera le cas pour X, XI, XII, il sera sans doute plus raisonnable de s'abstenir de publier le chapitre comme un article dans les Publications Mathématiques, mais de le publier directement sous forme de livre. On peut d'ailleurs soulever la même question pour les chapitres antérieurs également, et notamment le Chap. VII, qui ne contiendra pas grand chose qui, sous une forme ou une autre, ne figure dans la littérature. Le mieux me semble de juger sur pièces, et de prendre la décision une fois en possession d'une rédaction d'ensemble détaillée d'un chapitre. Pour le moment, il convient de convenir sur une décision de principe, si on se donne latitude de publier hors des P.M. ; c'est en fait Dieudonné, comme rédacteur des P.M., qui est le principal concerné.

4. Deux questions de détail.

a) J'ai été bloqué jusqu'à présent dans la rédaction de la suite de EGA III, surtout à cause de l'impossibilité où j'étais de rédiger de façon satisfaisante le "théorème de dualité projective", faute de disposer du langage des catégories dérivées. Comme on dispose maintenant de ce langage (cf papier de Verdier à l'IHES, séminaire de Hartshorne paru chez Springer, enfin thèse de Verdier en cours d'achèvement, qui donnera un traité systématique avec démonstrations complètes), je propose que dans la suite de la rédaction de EGA, y compris la suite ou la réédition du Chapitre III, on utilise librement les catégories dérivées, chaque fois qu'il semblera artificiel de ne pas les utiliser.

   Indépendamment de cette décision de principe, se pose la question si on doit envisager dans un avenir pas trop éloigné la rédaction de la suite de EGA III. Cela ne me semble pas une tâche urgente vu que pour l'essentiel la substance de cette suite est déjà à la disposition de l'usager dans SGA 1962 (et, pour la dualité projective, dans un des chapitres du séminaire Hartshorne). On notera d'ailleurs qu'une partie de SGA 1962 (l'exposé IX) n'est guère qu'un remords à EGA III 3 ; cela rend plus tentant encore la solution que je préconise, qui est d'attendre pour compléter le Chap. III le moment où la réédition sera devenue nécessaire, et de publier alors le Chap. III révisé et complété sous forme de bouquin, comme actuellement le Chap. I.

Jusque là, on risque seulement d'être un petit peu gêné aux entournures, dans quelques très rares endroits à partir du Chap. VI. On pourra alors, à titre provisoire, référer au besoin à SGA 1962 et Hartshorne, d'autant plus que jusque là le séminaire SGA devrait être régulièrement disponible en librairie (chez Benjamin).

b) Place de la théorie des intersections. Elle vient assez tard dans le plan prévu. Comme je l'ai déjà signalé, on est gêné aux entournures alors dans VII, pour certains calculs numériques sur les VA. D'autre part, dans V on ne sera pas capable d'écrire la formule de Riemann-Roch sur une surface, sous la forme faible (bien que la formule soit pratiquement triviale) :

$$\chi(\underline{\mathcal{O}}_X(D)) = 1/2D(D-X) + \chi(X).$$

C'est évidemment un peu idiot d'être obligé, pour une formule aussi importante et aussi triviale, d'attendre le Chapitre X. J'avais songé dans le temps faire quelque part (peut-être au Chap. V) un paragraphe donnant un petit peu d'intersections globales, du point de vue numérique, qui serait suffisant pour ce qu'on pourrait avoir à utiliser avant X. Si Deligne veut essayer, tant mieux. Mais je ne suis pas persuadé qu'on arrive à faire quelque chose qui ne soit bien bancal ; et une fois le doigt mis dans l'engrenage, tout le Chap. X risque de suivre. À moins de prendre comme critère de séparation le suivant : on ne parle ni de catégories dérivées, ni d'opérations λ^i, et on se donne un maximum de 40 pages (disons) pour écrire une théorie naïve utilisable. Une autre solution serait d'admettre sans vergogne ce qu'on pourrait avoir envie ici et là d'utiliser de la théorie des intersections, en renvoyant au Chapitre prévu, non rédigé et non publié (et de donner comme référence auxiliaire SGA 1966/67). Un Leitfaden détaillé pour l'ensemble des Chapitres prévus des EGA devrait convaincre le lecteur qu'il n'y a pas de cercle vicieux. De toute façon, l'usage que nous ferons des intersections avant le chapitre X sera tout-à-fait épisodique, et ne comportera pas des réactions en chaîne.

5. Critique du plan proposé.

À partir du chapitre VI l'ordre des chapitres est dans une certaine mesure arbitraire, ces chapitres étant dans une large mesure indépendants les uns des autres. Ainsi, VII et VIII dépendent (d'une partie) de VI, mais sont pratiquement indépendants l'un de l'autre. Les chapitres IX et X sont indépendants des chapitres VI à VIII, et même IV à VIII, et se rattachent directement à III ; ils sont également indépendants entre eux, à cela près que pour faire le formalisme de la classe de cohomologie (au sens Hodge, ou De Rham) associée à un cycle algébrique, il faut disposer de la théorie des intersections. Donc dans le plan prévu ce formalisme serait développé dans un paragraphe du chap. X de la théorie des intersections, et non dans le chap. IX sur la dualité des faisceaux cohérents. On pourra donc juger opportun d'intervertir IX et X, ce qui me semble en fait plus raisonnable réflexion faite, la théorie des intersections étant somme toute plus fondamentale que le pavé résidus et dualité. De plus, si la dualité est faite par Hartshorne, le "trou" dans EGA ne viendra qu'un chapitre plus loin ! Quant à XI, il n'utilise rien des chapitres précédents VI à X, sauf l'existence des schémas de Hilbert prouvée dans VI. (Un autre ingrédient est la théorie de Lefschetz locale, qui en principe figurera dans la dernière partie de III). Enfin, XII n'utilise que XI, et occasionnellement le formalisme des intersections, à l'exclusion des autres chapitres V à IX. Il m'a semblé que la suite des chapitres IX à XII formait un bloc cohomologique assez sympathique, après le bloc (pas ou peu cohomologique) IV à VIII, et qu'il n'y avait pas lieu de les mélanger entre eux, une fois en possession des outils fournis par III.