Rapport sur l'oeuvre mathématique de David Mumford

par

Alexander Grothendieck

Transcription by

CSG ISTITUTO GROTHENDIECK

Edited by Mateo Carmona
mateo.carmona@csg.igrothendieck.org
Centre for Grothendieckian Studies (CSG)
Grothendieck Institute
Corso Statuto 24, 12084 Mondovì, Italy

This transcription is derived from an unpublished scan. This project was carried out by researchers and volunteers of the CSG under the supervision of Mateo Carmona. More details are available at:
https://csg.igrothendieck.org/transcriptions/

How to cite:

Alexander Grothendieck and Michel Raynaud. *Rapport sur l'oeuvre mathématique de David Mumford*. Unpublished note, 1969. Transcription by M. Carmona et al., CSG, Grothendieck Institute. Draft, June 2025.

RAPPORT SUR L'OEUVRE MATHÉMATIQUE DE DAVID MUMFORD

par A. Grothendieck et M. Raynaud

Dans le §1 de ce rapport, nous donnons quelques considérations générales sur l'oeuvre et la personnalité scientifique de D. Mumford. Dans les §2,3,4 nous donnons des indications plus détaillées sur certains de se travaux, choisis parmi les mieux connus et les plus accessibles au profane. Enfin, dans Le §5, nous essayons de donner une perspective de la place de Mumford parmi les géomètres algébristes contemporains.

1. Le trait le plus frappant de la personnalité scientifique de D. Mumford semble l'*universalité* de ses intérêts en mathématique. Nous connaissons peu de mathématiciens comparables à lui sous ce rapport, et c'est une qualité d'autant plus précieuse qu'elle devient plus rare. Jusqu'à présent les travaux de D. Mumford se sont placés tous, plus ou moins, dans le domaine (fort vaste) de la géométrie algébrique ; certains ont eu des implications intéressantes dans d'autres disciplines, notamment la topologie [1,6] la théorie des nombres [8], et bien entendu aussi la "géométrie analytique" (i.e. la géométrie des espaces analytiques). Il ne semble pas exagéré de dire qu'il n'y a aucun des aspects extrêmement divers, et des techniques extrêmement différentes, constituant actuellement la géométrie algébrique, qui ne soit représenté dans un ou plusieurs des travaux de Mumford. Certaines de ces théories, telle la vénérable "*théorie des invariants*", ou la *théorie des variétés abéliennes* et de leurs variétés modulaires, ont été entièrement renouvelées par Mumford [3, 9, 10]. Dans presque toutes, Mumford a une maîtrise technique parfaite et a apporte des contributions importantes, le plus souvent par certains théorèmes clefs, parfois par des conjectures frappantes, souvent par l'introduction de notions nouvelles. Un rapport détaillé sur les contributions scientifiques de Mumford serait sans doute extrêmement instructif pour le géomètre algébriste, mais sortirait des cadres d'un rapport destiné à des non spécialistes. Il nous a semblé par contre intéressant et révélateur de faire une liste approximative (avec des renvois à la bibliographie) des parties de la géométrie algébrique qui, à la connaissance des rapporteurs, ont bénéficié directement des travaux de Mumford. Il y a bien entendu de nombreux recoupements à l'intérieur de cette liste; d'autre part, les références bibliographiques sont incomplètes, de nombreux résultats intéressants de Mumford étant inédits (lettres communications ovales).

1) Théorie des *courbes* et des *surfaces algébriques* [l, 4, 7, 13, 14, 15, 17].

2) *Technique de construction de schémas*, notamment celle relative *au passage au quotient* par les opérations d'un groupe algébrique, avec application à la construction de *schémas modulaires pour des courbes* et *des variétés abéliennes*, ou à la représentabilité des foncteurs de Picard [2, 3, 17] et de variétés de fibrés vectoriels sur des courbes [19].

3) *Théorie des groupes algébriques linéaires semi-simples* et de leurs représentations, aussi bien en caractéristique nulle qu'en caractéristique $p > 0$ [3].

4) *Théorie fine des schémas modulaires*, notamment pour les variétés abéliennes polarisées, tant "à distance finie" qu'à l'infini (théorie des fonctions 0) [5, 6, 9, 10, 11, 15, 16, 20].

5) *Théorie des variétés abéliennes*, aussi bien sur un corps de base, que sur un anneau de valuation discrète (théorie de réduction à la Néron, théorie non archimédienne des fonctions θ) [3, 9, 10, 11, 16, 2l].

6) *Groupes formels, groupes de Barsotti-Tate* (ou "groupes p-divisibles") et groupes infinitésimaux (questions liées à la théorie des déformations de tels groupes) [11, 12].

7) *Groupes discrets de type arithmétique* et leur cohomologie (ces groupes discrets intervenant fort naturellement en géométrie algébrique, comme les groupes fondamentaux de divers schémas ou sites modulaires) [6, 21].

8) *Topologies généralisées* (ou topos), et leurs liens avec les problèmes modulaires classiques [5,15].

9) *Pathologies* diverses en car. $p > 0$ [4].

10) *Problèmes diophantiens* [8].

11) *Théorie des cycles algébriques* [14].

Comme digne élève de 0. Zariski, Mumford est rompu au langage et aux méthodes des géomètres italiens, et un de ses plus récents travaux [14] consiste à exploiter la technique même de Severi, pour construire un contre- exemple à un “théorème” de Severi qui a constitué pendant longtemps une des plus irritantes parmi les nombreuses questions ouvertes dans la théorie des cycles algébriques[1]. Mais Mumford manie avec une égale aisance tous les outils de la géométrie algébrique, y compris les plus récents[2], et ceci sans jamais perdre sa vision géométrique simple des choses, grâce à une intuition extrêmement sûre, et que aucun de nous n’a encore vue en défaut. Par ces qualités exceptionnelles, Mumford semble par excellence l’homme qui sait unir, dans une même vision d’ensemble, des disciplines en apparence fort éloignées les unes des autres, qui sait comprendre et utiliser tous les langages et toutes les optiques sans être l’esclave d’aucun, et servir la cause de la compréhension interdisciplinaire en un temps où les spécialistes de branches même voisines de la mathématique ont de plus en plus de mal à se comprendre les uns les autres.

2. Topologie des singularités normales d’une surface algébrique [1].

Soit X une surface algébrique définie sur le corps des complexes, x un point singulier normal de X, qui est donc point singulier isolé. Mumford étudie du point de vue topologique la variété différentiable M de dimension 3, intersection de X avec une petite sphère centrée en x (X étant considérée comme immergée dans l’espace affine $\mathbf{C}^n$

[1] Il trouve que sur le produit X de deux courbes elliptiques (par exemple) le groupe des 0-cycles de degré zéro, modulo équivalence rationnelle, est de dimension infinie (et non pas $2 = \dim \mathrm{Alb}(X)$, comme on avait pu le supposer).

[2] Ainsi, nous pensons qu’il est à l’heure actuelle le meilleur spécialiste des phénomènes spéciaux à la caractéristique $p > 0$ pour la géométrie des variétés algébriques, ainsi que de la théorie des variétés abéliennes, de leurs déformations et de leurs variétés modulaires.

localement au point x) . Il donne notamment un principe de calcul pour le groupe fondamental de M, et il prouve le théorème remarquable suivant (conjecturé par Abhyankar) : $\pi_1(M)$ est le groupe unité (si et) seulement si x est un *point simple* de X, — ce qui implique donc que M est une sphère topologique (et même la sphère banale du point de vue différentiable). D'autre part, Mumford donne un exemple ou $\mathrm{H}_1(M) = 0$ (ce qui, du point de vue algébrique, s'exprime par la propriété remarquable : l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ de X en x est factoriel) et où pourtant x n'est pas un point simple, i.e. $\pi_1(M) \neq 1$.

Ce travail, qui est le premier de Mumford, est d'une grande densité (comme tous les travaux de Mumford), et le montre déjà en pleine possession de ses moyens. Il a joué un rôle important à plusieurs titres :

a) Le résultat principal de ce travail, qu'on vient d'énoncer, a exercé une influence certaine sur les topologues, et est fréquemment cité par ceux-ci quand ils étudient la topologie des singularités des variétés algébriques ou analytiques, — sujet qui commence à peine à l'heure actuelle à être étudié systématiquement (Hirzebruch, Brieskorn, Milnor,...). D'une part, Mumford donne dans un cas tout à fait non trivial une solution affirmative à la célèbre hypothèse de Poincaré (toute variété compacte connexe simplement connexe de dimension 3 est une sphère) ; d'autre part ce résultat conduit immédiatement à la question de savoir si des "sphères exotiques", comme celle de Milnor, peuvent se réaliser à l'aide de singularités isolées de surfaces algébriques (question résolue depuis par l'affirmative, comme on sait, par Brieskorn).

b) La méthode employée par Mumford, bien qu'il la présente sous une forme transcendante, s'est avérée fort suggestive et féconde en géométrie algébrique "abstraite". Elle consiste à utiliser une résolution locale de la singularité x de X, i.e. un morphisme birationnel et propre $f : X' \longrightarrow X$, tel que X' soit non singulière au voisinage de $f^{-1}(x) = C$. Alors la topologie de la singularité x est mise en relation avec la topologie de C, qui est ici une courbe algébrique (en général singulière et réductible) complète (i.e. compacte). Cette méthode générale a pu être utilisée (J.P. Murre et A. Grothendieck) pour calculer par voie algébrique le groupe fondamental local d'un schéma local complet de dimension 2 (ou plutôt, la partie première à la caractéristique résiduelle de ce groupe fondamental), et ce calcul à son tour a pu être utilisé pour établir un théorème de génération topologique finie pour le groupe fondamental local, dans le cas A de dimension quelconque.

c) En passant, Mumford met en évidence, dans son travail, une structure remarquable de groupe analytique sur le groupe des classes de diviseurs de l'anneau local analytique $\mathcal{O}_{X,x}$. La méthode de Mumford était analytique, et utilisait la suite exacte de l'exponentielle, mais Mumford lui-même posait la question d'une construction *algébrique*. Une telle construction est effectivement possible, en utilisant toujours la même idée clef, qui est celle de l'utilisation d'une résolution des singularités : on parvient ainsi, pour un anneau local complet normal A de dimension 2, à interpréter le groupe des classes de diviseurs de A comme le groupe des points rationnels sur le corps résiduel k d'un groupe algébrique P sur k canoniquement déterminé, qui mérite le nom de "schéma de Picard local" de A. (Cette construction est possible en tous cas lorsque A est d'égales caractéristiques.) Il semble également que Mumford ait été le premier à noter le lien entre le groupe d'homologie locale $\mathrm{H}_1(M)$, et le groupe des classes de diviseurs de A, lien qui garde sa validité pour des anneaux locaux complets généraux.

d) A titre auxiliaire, Mumford prouve le résultat suivant, qui s'étend également à des singularités normales quelconques de schémas de dimension deux, et qui a été souvent utilisé depuis : la "matrice d'intersection" $(C_i.C_j)_{1\leq i,j\leq n}$, où les C_i $(1 \leq i \leq n)$ sont les composantes irréductibles de $C = f^{-1}(x)$, est *définie négative*. Dans le cas d'une surface algébrique dans lequel s'était placé Mumford, ce résultat aurait pu se déduire du "théorème de l'index" de Hodge pour X, mais Mumford prend soin d'en donner une démonstration purement locale, qui a le mérite de s'étendre aussitôt aux cas plus généraux qu'on a eu à envisager ultérieurement.

3. Geometric invariant theory [2,3].

Sur le corps des complexes, la théorie des fonctions automorphes permet de construire (Satake), par voie transcendante, des variétés algébriques, appelées "variétés modulaires", dont les points "paramétrisent" les classes d'isomorphie de variétés abéliennes de dimension n, (munies d'une "polarisation" de degré d). Convenablement précisé, le problème de la construction d'une variété modulaire se ramène à celui de la représentabilité d'un certain foncteur, $S \mapsto$ familles de variétés abéliennes paramétrées par S, défini sur la catégorie des variétés algébriques sur $\mathbf{C}$, voire sur celle des schémas arbitraires. L'extension aux schémas arbitraires, qui amenait à rechercher un "schéma des modules" sur l'anneau des entiers (et a fortiori, sur le corps des rationnels), était d'ailleurs indispensable du point de vue de l'arithmétique et pour l'étude des phénomènes de spécialisation de la caractéristique zéro à la caractéristique p. Ce problème avait été abordé, et résolu dans divers cas très particuliers, par des mathématiciens comme Satake, Igusa, Shimura, Baily, Grothendieck, Seshadri. Il était clair d'ailleurs que la difficulté technique provenait d'une question de passage au quotient par une action du groupe projectif $\mathrm{GP}(n)$, sur une variété algébrique convenable. Ce problème a été résolu par Mumford dans son livre (qui constitue sa thèse). Pour mener à bien cette construction, Mumford démontre deux critères tout à fait originaux de passage au quotient sous l'action d'un groupe semi-simple. Nous allons maintenant dire quelques mots sur l'un de ces critères.

Soient k un corps de caractéristique zéro et G un groupe algébrique semi-simple qui opère sur une k-variété X. Si X est affine d'anneau A, il est classique que la complète réductibilité des représentations de dimension finie de G entraîne que l'anneau A^G des fonctions invariantes sous G sépare les orbites fermées ; d'où l'existence d'une variété affine quotient X/G, lorsque les orbites de G sont fermées. Lorsque X n'est plus supposée affine, le problème du passage au quotient est nettement plus délicat. Toutefois, dans le cas où X est l'espace projectif $P(E)$ associé à un espace vectoriel E, et où l'action de G provient d'une représentation linéaire de G dans E, Mumford met en évidence un ouvert canonique V de $P(E)$, l'ouvert des *points stables*, tel que le quotient V/G soit une variété quasi-projective. L'intérêt de la notion de point stable provient du fait que l'on peut donner une *caractérisation numérique de la stabilité*. Le critère fait intervenir l'action "à l'infini" des sous-groupes à un paramètre de G. Il n'est établi à l'heure actuelle qu'en caractéristique nulle, mais Mumford signale qu'il pourrait s'étendre au cas général, moyennant une conjecture sur les représentations des groupes semi-simples en caractéristique > 0, qu'il présente comme un substitut à la complète réductibilité. (Cette conjecture a été depuis vérifiée par Seshadri dans le cas du groupe SL 2).

Or nombre de problèmes de modules, liés aux variétés projectives, peuvent se ramener à un problème de passage au quotient d'un schéma X sous l'action du groupe $\mathrm{GP}(n)$. La contribution la plus profonde de Mumford, dans cet ouvrage, est alors d'avoir mis en relation la notion abstraite de stabilité des points de X à laquelle on vient de faire allusion, et certaines propriétés *géométriques* des objets que l'on se propose de classifier. En fait, on ne dispose pas de théorème général dans ce sens, et chaque problème de modules demande une étude spéciale, souvent fort délicate. C'est dans celle-ci surtout , que Mumford donne la preuve d'une exceptionnelle intuition géométrique et d'une parfaite maîtrise de techniques très variées.

En dehors du problème des modules des variétés abéliennes, Mumford aborde avec succès de nombreux autres problèmes. Parmi ceux-ci, citons les modules des courbes de genre g (d'ailleurs étroitement lié à celui des variétés abéliennes via la théorie des jacobiennes) et l'étude des 0-cycles de la droite projective (problème ancien que les méthodes classiques n'avaient pu résoudre que pour les petis degrés).

En plus de l'importance intrinsèque des problèmes géométriques résolus dans le livre de Mumford, signalons que les méthodes et notions nouvelles qu'il introduit ont exercé une influence déterminante sur divers travaux concernant les variétés modulaires pour les fibrés vectoriels sur les courbes (Seshadri, Narasimhan, Newstead, divers auteurs russes).

Pour terminer, ajoutons que Mumford n'a cessé d'améliorer ses résultats sur les modules des variétés abéliennes. Grâce à une conception tout à fait originale des fonctions thêta [9], il dispose maintenant d'une construction nouvelle très explicite des variétés modulaires. Actuellement il est en bonne voie d'obtenir une compactification de ces variétés, d'origine géométrique, comparable à celle obtenue pour les modules des courbes (cf. paragraphe suivant).

4. Connexité de la variété des modules pour les courbes algébriques de genre g [15].

Il était connu depuis assez longtemps que la "variété des modules" pour les courbes algébriques (connexes, complètes, non singulières) de genre donné $g > 0$ sur le corps **C** des nombres complexes est connexe. En d'autres termes, étant données deux courbes algébriques de genre g sur **C**, on peut passer de l'une à l'autre par déformation continue (en un sens technique facile à préciser). On disposait de deux démonstrations, toutes deux de nature transcendante, celle via la théorie de Teichmüller, de nature analytique, et celle via la théorie de Hurwitz-Severi des revêtements ramifiés de la droite projective, de nature plus topologique. A l'heure actuelle, il semble que ce soient là les deux seules démonstrations connues ; en particulier, on ne dispose pas de démonstration purement algébrique de ce théorème, dont l'énoncé est pourtant de nature purement algébrique.

Avec la construction par Mumford du schéma des modules M_g sur l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers pour les courbes de genre g (et en fait même avant) la question se posait évidemment de savoir si le résultat de connexité précédent reste valable en toute caractéristique. Il revient au même de demander si les fibres géométrique de M_g au-dessus du spectre de $\mathbf{Z}$ (jouant le rôle d'une "variété de paramètres" dont les points seraient les différents nombres premiers p) sont connexes. Sous cette dernière forme, notant que le résultat de connexité sur $\mathbf{C}$ déjà connu signifie que la fibre géométrique *générique* de est connexe, il est naturel d'essayer de faire appel à un principe de dégénérescence pour en conclure que *toutes* les fibres géométriques de M_g sont connexes. Ainsi, il est pratiquement trivial que, pour g fixé, il n'y a qu'un nombre fini au plus de fibres géométriques de M_g qui ne sont pas connexes, i.e. le théorème de connexité pour M_g, pour g fixé, est valable en caractéristique p pour presque tout p (sachant qu'il est valable en car. nulle, sur le corps de base $\mathbf{C}$). D'ailleurs, si M_g était propre sur Spec($\mathbf{Z}$), une variante connue du "théorème de connexité" de Zariski permettrait de conclure à la connexité de *toutes* les fibres géométriques de M_g. La difficulté technique provient donc du fait que Mg n'est jamais propre sur Spec($\mathbf{Z}$), ce qui oblige, pour arriver à faire marcher l'idée de démonstration qu'on vient d'esquisser, d'utiliser une "*compactification*" convenable de en un schéma $\overline{M_g}$ propre sur Spec($\mathbf{Z}$). Si on arrive à construire $\overline{M_g}$ de façon que ses fibres soient *normales*, le théorème de connexité impliquera que ses fibres géométriques sont connexes donc *irréductibles*, donc il en est de même de celles de M_g, qui en sont des ouverts de Zariski.

Toute la difficulté (qui avait arrêté Mumford pendant six ou sept ans) consiste donc en la construction d'une telle compactification. Il était assez clair que cette compactification devait avoir une interprétation en termes de classification de courbes algébriques *singulières* ; mais quelles courbes singulières fallait-il admettre, pour trouver un "schéma modulaire" assez gros pour être propre sur Spec $\mathbf{Z}$, mais pas trop gros pour ne pas cesser d'être séparé ? La solution à ce problème délicat a été trouvée indépendamment par D. Mumford et P. Deligne, et a fait l'objet d'un travail commun. Il se trouve que les courbes qu'il convient d'ajouter aux courbes non singulières sont, essentiellement, les courbes n'ayant que des singularités ordinaires (et même genre virtuel g, bien entendu). Le fait qu'on trouve ainsi une compactification $\overline{M_g}$ de M_g résulte d'un lemme profond, dû indépendamment à D. Mumford et à M. Artin, et qui s'énonce ainsi :

Théorème de réduction semi-stable des courbes algébriques : Si X_K est une courbe lisse et propre sur le corps des fractions K d'un anneau de valuation discrète complet A, il existe une extension finie séparable K' de K et un "modèle" projectif X' de $X_{K'} = X_K \otimes_K K'$ sur le normalisé A' de A dans K', tel que la fibre spéciale de X' n'ait que des singularités ordinaires au plus.

(Ce résultat utilise la résolution des singularités des surfaces arithmétiques, la théorie de Néron pour la réduction des variétés abéliennes, et le formalisme de la cohomologie ℓ-adique).

Il n'est pas question de donner ici plus d'indications sur la compactification de Deligne-Mumford. Signalons seulement que la théorie de Teichmüller donnait un résultat plus précis que celui de la connexité de la variété modulaire pour les courbes de genre g sur le corps **C**, puisqu'on trouve même la connexité (et même la contractibilité) de la variété modulaire pour les courbes X de genre g, *munies* de la structure supplémentaire constituée par la donnée d'un isomorphisme extérieur entre le groupe fondamental de X, et le groupe fondamental d'une courbe fixée X_0 de genre g.

Qu'il nous suffise de dire à ce propos que la théorie de Deligne-Mumford permet d'exploiter toute la force de la théorie de Teichmüller, et d'établir des résultats de connexité pour les "variétés modulaires avec niveaux" qui constituent les approximations purement algébrique naturelles de l'espace modulaire de Teichmüller. La clef de tous ces résultats étant, bien entendu, la "structure à l'infini" des compactifications naturelles des schémas modulaires envisagés.

5. Perspective.

Pour éclairer le Comité, il me semble qu'il peut être utile de "placer" en quelque sorte D. Mumford parmi les "working algebraic geometers" d'aujourd'hui. Parmi ceux-ci, plusieurs sont exceptionnellement doués, et leur œuvre mathématique nous semble d'une importance comparable à celle de Mumford. Nous pensons (par ordre alphabétique) à M. ARTIN, P. DELIGNE, P.A. GRIFFITHS, H. HIRONAKA et A. NERON (ce dernier nettement plus âgé que les autres). Il nous semblerait très difficile d'affirmer que l'oeuvre de l'un quelconque de ces six mathématiciens (Mumford compris) soit en profondeur ou en importance supérieure, ou inférieure, à celle des autres. Par ailleurs, Mumford occupe une place particulièrement brillante par le fait qu'il domine en son entier, avec une aisance parfaite, une branche de la mathématique aussi vaste et multiple que la géométrie algébrique. De ce point de vue de l'extrême variété, l'oeuvre d'Artin, ou celle de Deligne, nous semblent également tout à fait comparable à celle de Mumford[3]. Cela ne diminue en rien, bien entendu, les mérites de Mumford, qui sont manifestement exceptionnels et éclatants; un mathématiciens de son niveau ne pourrait que faire honneur à la plus haute distinction qu'on lui puisse décerner.

Et, chose plus importante, avec des mathématiciens tels que lui et ses pairs, l'avenir de la géométrie algébrique, et de la mathématique dans son ensemble, sont certainement en de bonnes mains !

Bures, Avril 1969

A. Grothendieck M. Raynaud

[3] Le fait que Artin (qui est 1'aîné de D. Mumford et a moins de quarante ans n'ait pas été envisagé par le Comité comme candidat à une médaille Field, s'explique probablement par le fait que ses contributions sans doute les plus importantes sont relativement récentes et relativement peu connues. Les rapporteurs ne doutent pas que la situation aura changé d'ici peu d'années, et que l'importance exceptionnelle de ces résultats sera alors clairement reconnue par l'ensemble des mathématiciens.

Bibliographie des travaux de D. Mumford (sans doute incomplète).

1 The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Pub. Math. no 9, p.5-22 (1961).

2 An elementary theorem in geometric invariant theory, Bull. Amer. Math. Soc. Sept 1961, vol 67, no 5, p. 483-486.

3 Geometric invariant theory, Ergebnisse Bd 34, Springer (1965).

4 Pathologies of modular algebraic surfaces, Amer. Journ. Math. vol 83, no 2 (1961), p. 339-342.

Further Pathologies in algebraic geometry, Amer. Journ. Math. vol 84, no 4 (1962), p.642-648.

Pathologies III, Amer. Journ. Math. vol 89, no 1 (1967), p. 94-104.

5 Picard groups of modular problems, in Arithmetic Algebraic Geometry, Proceedings of a conference held at Purdue University 1963, Harper's Series in Modern Mathematics.

6 Abelian quotients of the Teichmuller modular group, Jour. d'Analyse Math. vol XVIII (1967) p. 227-244.

7 (en collaboration avec T. Matsusaka) Two fundamental theorems on deformations of polarized varieties, Amer. Journ. Math. vol 86 (1964), p. 668-684.

8 A remark on Mordell's conjecture, Amer. Journ. Math. vol 87, no 4 (1965), p.1007-1016.

9 On the equations defining abelian varieties, I, II, III, Inventiones Mathematicae 3 p. ,p. 75-135, p.215-244 (1967).

10 Abelian varieties, livre en préparation, d'après un cours au Tata Institute for Fundamental Research.

11 Biextensions of formal groups, Tata Inst. of Fund. Research 1968 (à paraître).

12 (En collaboration avec F. Oort) Deformations and liftings of finite commutative group schemes, Inventiones mathematicae 5, 317-334 (1968)

13 Enriques' classification of surfaces in char. p, I, Harvard 1968 (à paraître).

14 On cycles on an algebraic surfaces (à paraître).

15 (En collaboration avec P. Deligne) The irreducibili ty of the space of curves of given genus.

16 Abstract Theta functions, notes by H. Pittie, Bowdoin College 1967.

17 Lectures on curves on an algebraic surface, Annals of Mathematical Studies no 59 (1966).

18 Introduction to algebraic geometry, Harvard

19 The boundary of moduli schemes, Summer Institute, Woods Hole, 1964.

20 (avec P. Newstead) Periods of a moduli space of bundles on curves, Amer. Journ. Math. vol. 90, no 4 (1968), p. 1200-1208.

21 A note on Shimura's paper "Discontinuous groups and abelian varieties", (à paraître).