Généralités sur les Espaces Fibrés

par

Alexander Grothendieck

Transcription by

Edited by Mateo Carmona
mateo.carmona@csg.igrothendieck.org
Centre for Grothendieckian Studies (CSG)
Grothendieck Institute
Corso Statuto 24, 12084 Mondovì, Italy

This transcription is derived from an unpublished scan provided by the "Fonds du secrétariat Bourbaki (ENS-ULM)" with the reference Rédaction Bourbaki "No. 243". This project was carried out by researchers and volunteers of the CSG under the supervision of Mateo Carmona. More details are available at:
https://csg.igrothendieck.org/transcriptions/

How to cite:

Alexander Grothendieck. *Généralités sur les Espaces Fibrés*. Rédaction Bourbaki No. 243. Unpublished note. July, 1956. Transcription by M. Carmona et al., CSG, Grothendieck Institute. Draft, April 2025.

SOMMAIRE

Esquisse du chapitre I
du Livre de Topologie Élémentaire
(Généralités sur les espaces fibrés)
n° 243

Ce qui suit est un résumé, convenablement fonctoriel, d'un rapport didactique écrit à l'Université de Kansas [1], et qui a été distribué. Le rapporteur pense que, contrairement à ce qui a lieu pour le rapport Chevalley [2], le sac axiomatique qu'il propose est assez gros pour contenir toutes les variantes de fibrés qu'on rencontrera, dans la nature on ailleurs, sans être pour cela plus encombrant. Une première différence importante avec le rapport précédent est qu'on ne se limite plus aux fibrés localement triviaux (à fibre-type fixée) : l'hypothèse d'une fibre-type n'ajoute rien (sinon de fausses idées) quand on déroule les sorites sur les fibrés "à faisceau structural" ; d'ailleurs, il est quand même désirable que n'importe quel fibré (i.e. un couple formé d'un espace-base X et d'une application continue f d'un espace E dans X), qu'il soit ou non localement trivial, puisse rentrer dans le schéma général. En deuxième lieu, on en arrivé ici de façon très naturelle et directe au mécanisme algébrique essentiel des fibrés, qui peut se résumer pour l'essentiel dans la définition du foncteur $\mathrm{H}^1(X, F)$ du faisceau de groupes (abéliens ou non) F sur X, et l'étude de la suite exacte de cohomologie associé à une suite exacte de faisceaux. Il ne fait pas de doute pour le rapporteur que les diverses variantes de la suite exacte, comme elles sont esquissées aux n^{os} 13 et 14 devront figurer quelque part dans Bourbaki. Comme elles sont parfaitement élémentaires, leur place véritable semblerait bien dans ce chapitre 1. Cependant, il convient de remarquer qu'un développement, point par point parallèle à celui des n$^{\circ s}$ 13 et 14, peut se faire pour la cohomologie $\mathrm{H}^0(X, G)$ et $\mathrm{H}^1(X, G)$ d'un groupe à coefficients dans un groupe G (non nécessairement abélien) où il opère (X pouvant être un groupe discret, ou un groupe topologique opérant dans le groupe topologique G, ou un groupe de Lie complexe opérant dans le groupe complexe G etc) ; et ces développements semblent utile au même titre. Cet exemple et d'autres montrent qu'il serait peut être indiqué, en algèbre homologique, de faire un paragraphe d'algèbre homologique non commutative, dans des classes plus générales que les classes abéliennes, et d'en tirer les suites exactes qui nous intéressent comme cas particuliers. Le rédacteur est prêt à écrire un petit rapport, s'il semble désirable. — De toutes façons, la définition du "deuxième opérateur cobord" de la fin du n$^\circ$ 13, faisant intervenir un groupe $\mathrm{H}^2(X, F)$, ne pourra être donnée dans la première partie de Bourbaki.

1. Sorites sur les catégories morphiques.

Il semble que la place véritable de ces sorites soit en théorie des ensembles. En effet déjà dans la Première Partie, on se sert implicitement à travers chaque livre de relations de compatibilité qui expriment que certains trucs sont des foncteurs d'autres trucs, qu'on a un homomorphisme d'un foncteur dans un autre etc.

Jusqu'à présent, il a pu sembler excusable qu'on passe sous un silence pudique de telles compatibilités évidentes. Mais dans un sujet comme les fibrés, un tel silence serait absolument antibourbachique. Il est d'ailleurs évident pour tout le monde qu'on aura à fonctoriser ferme dans les parties suivantes, alors tant qu'à faire ! Il faut aussi noter que les contorsions dialectiques pour fourrer les catégories et foncteurs sous le chapeau logique canonique feraient une impression pénible partout ailleurs qu'en théorie des ensembles (et même là ; mais elle est là pour ça). Enfin, la notion de foncteur me semble donner une façon très maniable de définir les structures (voir plus bas).

On laissera ici les contorsions dialectiques à de plus qualifiés, et se placera au point de vue "naïf" comme tout le monde. Une *catégorie morphique* $\mathcal{C}$ est une catégorie d'objets (appelés trucs) $A, B, \ldots$; avec la donnée pour tout couple d'éléments (A, B) de $\mathcal{C}$ d'un ensemble $M(A, B)$ (qui peut-être vide) appelé ensemble des *morphismes* de A dans B (symbolisés par des flèches comme $u : A \longrightarrow B$) ; et pour tout triple A, B, C d'éléments de $\mathcal{C}$ d'une application $M(B, C) \times M(A, B) \longrightarrow M(A, C)$ notée $(v, u) \mapsto vu$ (*composition des morphismes*) de telle façon qu'on ait l'axiome d'*associativité*

$w(vu) = (wv)u$, et que pour tout $A \in \mathcal{C}$, $M(A)$ contienne un élément I_A (l'*identité* dans A) qui soit élément neutre pour les compositions avec les morphismes de $M(A, B)$ à gauche ou de $M(B, A)$ à droite, quel que soit B. Un $u \in M(A, B)$ est dit un *isomorphisme* s'il existe un $v \in M(B, A)$ tel que $uv = I_B$ et $vu = I_A$; ce v est alors unique et s'appelle l'inverse de u (et souvent on "identifiera" A et B par u et v). Un *foncteur* covariant F d'une catégorie morphique $\mathcal{C}$ dans une autre $\mathcal{C}'$ est une "fonction" associant à tout $A \in \mathcal{C}$ un $F(A) \in \mathcal{C}'$ et à tout $u \in M(A, B)$ $(A, B \in \mathcal{C})$ un $F(u) \in M(F(A), F(B))$, de façon compatible avec les unités et les lois de composition $F(vu) = F(v)F(u)$, $F(I_A) = I_{F(A)}$. Définition analogue pour un foncteur contravariant, la seule différence étant qu'on suppose maintenant $F(vu) = F(u)F(v)$. D'ailleurs introduisant la "*catégorie morphique duale*" $\mathcal{C}^\circ$ de $\mathcal{C}$ par la procédé bien connu de renversement des flèches, les foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ sont les foncteurs covariants de $\mathcal{C}^\circ$ dans $\mathcal{C}'$ ou de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'^\circ$, et inversement, ce qui permet dans beaucoup de questions de se borner aux foncteurs covariants. On peut composer de façon évidente des foncteurs $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ et $G : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$ pour obtenir un foncteur $GF : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}''$; la composition des foncteurs est associative, et les "foncteurs identiques" dans les catégories jouent le rôle d'éléments neutres (formellement, tout se passe comme si on pouvait considérer la catégorie morphique de toutes les catégories morphiques !).

Soient F et G deux foncteurs covariants d'une catégorie morphique $\mathcal{C}$ dans un autre $\mathcal{C}'$, on appelle *homomorphisme du foncteur F dans G* une "fonction" φ qui associe à tout $A \in \mathcal{C}$ un morphisme $\varphi(A)$ de $F(A)$ dans $G(A)$, de telle façon que pour un morphisme $A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{C}$, le diagramme correspondant suivant soit commutatif,

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \longrightarrow & F(B) \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(A) & \longrightarrow & G(B) \end{array}$$

les homomorphismes entre foncteurs covariants de C dans C' se composent d'ailleurs de façon évidente, la loi usuelle d'associativité étant satisfaite et le "homomorphisme identique" de F sur lui-même jouant le rôle d'élément unité pour cette composition (de telle sorte que formellement, tout se passe comme si on pouvait considérer la catégorie morphique de tous les foncteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$). Un homomorphisme du foncteur F dans le foncteur G est dit un *isomorphisme de foncteurs* si pour tout $A \in \mathcal{C}$, le morphisme $\varphi(A) : F(A) \longrightarrow G(A)$ est un isomorphisme (alors on permettra souvent d'identifier

F et G). Deux foncteurs $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ et $F' : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ sont dits *foncteurs inverses* l'un de l'autre si $F'F$ est isomorphe au foncteur identique de $\mathcal{C}$ et FF' est isomorphe au foncteur identique de $\mathcal{C}'$; quand on s'est donné explicitement un isomorphisme de $F'F$ et du foncteur identique dans $\mathcal{C}$ et de FF' et du foncteur identique dans $\mathcal{C}'$, il se trouve qu'on peut sans inconvénient substituer $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$ et inversement, et en pratique on les "identifie" effectivement (exemples innombrables, une bonne partie de la mathématique consistant précisément à interpréter une situation en termes d'une autre : ainsi un faisceau défini via les fibrés "n'est pas autre chose" qu'un faisceau défini via les préfaisceaux etc.).

C'est essentiellement tout ce qu'il nous faudra pour ce qui suit sur les catégories morphiques. Dans un paragraphe systématique comme le rédacteur en réclame, il faudrait inclure aussi des sorites du goût suivant : *sommes cartésiennes*, *produits cartésiens*, *"injections"* et *"surjections"*, *objets neutres*, *diagrammes* construits suivant un certain *schéma de diagrammes* (consistant en un ensemble de *sommets*, de *flèches* et de *relations de commutation*), catégories morphiques formées des diagrammes construits suivant un schéma donné dans une catégorie morphique donnée (il se trouve qu'un grand nombre de catégories morphiques importants s'interprètent comme des catégories de diagrammes ; dans le cas des classes abéliennes, cela permet de leur appliquer des théorèmes démontrés une fois pour toutes).

2. Digression sur les structures.

La digression qui suit fera mieux comprendre la définition fondamentale du n° 9. De plus, s'il en est encore temps, elle peut peut-être servir à simplifier la rédaction actuelle des structures.

Considérons la catégorie des ensembles comme une catégorie morphique, avec pour morphismes les *bijections*, soit $\mathcal{F}$. Quelle que soit la définition qu'on adopte pour la notion de "espèce de structures T", il faut qu'elle satisfasse aux conditions suivantes :

(i) pour tout ensemble E, on peut considérer l'*ensemble des structures sur E d'espèce T*, soit $T(E)$;

(ii) Si f est une bijection de E sur un ensemble F, toute structure d'espèce T sur E définit une structure d'espèce T sur F (dit obtenu par *transport de structure*) et on obtient ainsi une bijection de $T(E)$ sur $T(F)$, qu'on notera $T(f)$;

(iii) $T(I_E) = I_{T(E)}$. $T(gf) = T(g)T(f)$ si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont deux bijections. En d'autres termes, T *définit un foncteur* covariant de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Réciproquement, étant donné un foncteur covariant T de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$, et un ensemble E, il semble raisonnable de considérer le choix d'un élément de $T(E)$ comme définissant sur E une certaine structure, dite structure d'espèce T. Bourbaki semble restreindre le foncteur T à être d'un type péniblement explicité à l'avance ($T(E)$ étant un ensemble construit dans l'échelle d'ensembles sur E et certains ensembles auxiliaires constants, suivant un schéma explicité, ou plutôt un sous-ensemble obtenu par des axiomes supplémentaires). Pour ce qu'on a à en faire, ça semble se donner bien du mal rien que pour avoir le droit de parler de transport de structure. D'ailleurs, en langage fonctoriel, les situations les plus communes dans la considération de structures diverses s'énoncent de façon immédiate. Soit $\mathcal{F}'$ la catégorie des ensembles, avec pour morphismes *toutes* les applications entre ensembles, alors les foncteurs de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ ou dans $\mathcal{F}'$ sont manifestement les mêmes, donc on peut considérer aussi une espèce de structure T comme un foncteur $T : \mathcal{F} \longrightarrow F'$. Ceci dit, soient S et T deux tels foncteurs, soit φ un homomorphisme de S dans T i.e. pour tout ensemble E on se donne une application $\varphi(E) : S(E) \longrightarrow T(E)$, qui satisfasse à la condition de compatibilité usuelle pour une bijection $E \longrightarrow F$; cela signifie donc que pour tout ensemble E la donnée d'une structure d'espèce S sur E implique (de façon explicitée) la donnée d'une structure d'espèce T, et ceci de façon à satisfaire à la loi de compatibilité évidente relative aux transports de structure. On dira alors qu'on a *subordonné* l'espèce de structure T à l'espèce de structure S (théoriquement, il peut y a voir plusieurs manières de le faire, mais il se trouve pratiquement qu'il y en a au plus une qui se présente de façon naturelle). Si φ est un isomorphisme de S sur T, alors on pourra dire que les *espèces de structures S et T sont équivalentes* bien que les "termes" S et T puissent avoir une structure formelle complètement différente cependant la loi φ donne une prescription moyennant quoi la donnée sur un ensemble E d'une structure d'espèce S est complètement équivalente à la donnée d'une structure d'espèce T.

D'ailleurs, arrivé à ce point, il ne coûte pas plus cher, remplaçant $\mathcal{F}$ par une catégorie morphique quelconque $\mathcal{C}$, de considérer comme *espèce de structure sur $\mathcal{C}$* tout foncteur, défini sur la catégorie morphique $\mathcal{C}_0$ obtenu à partir de $\mathcal{C}$ en restreignant les morphismes à être des isomorphismes, et à valeurs dans $\mathcal{F}$. La donnée d'une structure d'espèce T sur un truc $A \in \mathcal{C}$ est alors par définition la donnée d'un élément de $T(A)$. Ceci posé, on peut alors former la nouvelle catégorie morphique $\mathcal{C}_T$ dont les éléments sont les couples (A, t) d'un $A \in \mathcal{C}$ muni d'une structure $t \in A(T)$, les morphismes dans $\mathcal{C}_T$ de (A, t) dans (A', t') étant les isomorphismes u de A sur A' tels que $T(u)t = t'$ (i.e. tels que t' s'obtienne à partir de t par transport de structure par u).

Rien n'empêche d'ailleurs de considérer, pour un $A \in \mathcal{C}$ donné, la sous-catégorie $\mathcal{C}(A)$ de $C_\circ$ formé des $B \in \mathcal{C}$ isomorphes à A, (ce qui revient à considérer une catégorie où les morphismes sont des isomorphismes et où tous les trucs sont isomorphes), et de se proposer de rechercher les espèces de structures possibles sur $\mathcal{C}(A)$ (intuitivement, toute espèce de structure T sur $\mathcal{C}$ s'obtient en prenant un représentant A dans chaque classe de trucs isomorphes de $\mathcal{C}$, et en prenant arbitrairement une espèce de structure T_A sur chacune des catégories morphiques $\mathcal{C}(A)$). Soit donc T une espèce de structure sur $\mathcal{C}(A)$, alors le groupe Aut A des isomorphismes de A sur lui-même opère dans $T(A) = E$. Pour tout $B \in \mathcal{C}(A)$, l'ensemble $T(B)$ est alors canoniquement isomorphe à $\mathrm{Is}(A, B) \times_{(\mathrm{Aut}\, A)} T(A)$, quotient du produit $\mathrm{Is}(A, B) \times T(A)$ par le groupe Aut A opérant par $g \circ (u, t) = (u \circ g, g \circ t)$.

D'ailleurs, partant d'une représentation quelconque de Aut A par permutation d'un ensemble $\mathcal{C}$, alors $B \longrightarrow \mathrm{Is}(A, B) \times_{(\mathrm{Aut}\, A)} \mathcal{C}$ est un *foncteur* de $\mathcal{C}(A)$ dans $\mathcal{C}$; et on obtient ainsi une correspondance parfaite entre "espèce de structure" sur $\mathcal{C}(A)$ et représentations de Aut A par permutations.

Soit maintenant I l'ensemble quotient de $T(A)$ par le groupe Aut A.

Pour tout isomorphisme f de a sur un $B \in \mathcal{C}(A)$, f induit une bijection de I sur $T(B)/\,\mathrm{Aut}\, B$, et cette dernière ne dépend pas du choix de f, en d'autres termes, pour tout $i \in I$, $T(B)$ est réunion de sous-ensembles disjoints $T_i(B)$ $(i \in I)$ et les T_i sont encore des foncteurs sur $\mathcal{C}(A)$. On est donc ramené, pour avoir une vue d'ensemble sur les espèces de structures possibles sur $C(A)$, (modulo équivalence) d'envisager le cas où I est réduit à un élément, i.e. où Aut A opère transitivement sur $T(A)$, ou ce qui revient au même, où tous les éléments de $\mathcal{C}(A)_T$ (catégorie des trucs dans $\mathcal{C}(A)$ avec structures d'espèce T) sont isomorphes. Choisissons alors un $t \in T(A)$, soit $G \subset$ Aut A le stabilisateur de t, i.e. le groupe des automorphismes de (A, t). Pour tout $B \in \mathcal{C}(A)$, l'ensemble $\mathrm{Is}(A, B)$ des isomorphismes de A sur B est un espace homogène sous $\mathrm{Aut}\, A$ opérant à droite (par composition à droite), donc G opère sur cet ensemble, donc on peut considérer l'ensemble quotient $\mathrm{Is}(A, B)/G$. Cet ensemble est un foncteur en B, et on peut considérer le foncteur $B \longrightarrow \mathrm{Is}(A, B)/G$ sur $\mathcal{C}(A)$, d'où une espèce de structure sur $\mathcal{C}(A)$, appelée pour abréger *structure d'espèce* G, elle correspond à la représentation canonique de $\mathrm{Aut}\, A$ par permutations de l'espace homogène $\mathrm{Aut}\, A/G$. On voit aussitôt que, prenant sur A le structure d'espèce G canonique t, définie par l'image dans $\mathrm{Is}(A, A)/G$ de l'automorphisme identique de A, G est précisément le groupe des automorphismes de (A, t). *Ainsi, les espèces de structure sur* $\mathcal{C}(A)$ *qui sont "indécomposables"* (i.e. pour lesquelles toutes les structures d'espèce T sont isomorphes) *sont exactement, à équivalence près, les structures d'espèce G, où G est un sous-groupe quelconque de* $\mathrm{Aut}\, A$. T et T' sont équivalentes si et seulement si les représentations correspondantes de $\mathrm{Aut}\, A$ dans $T(A)$ et $T'(A)$ sont équivalentes, i.e. si les stabilisateurs G et G' d'un $t \in T(A)$ resp. $t' \in T'(A)$ sont conjugués dans $\mathrm{Aut}\, A$.

3. Catégories pré-locales au dessus d'un espace topologique X.

Ce qui va suivre, dans le cas où X est un espace réduit à un élément, se réduit aux sorites déroulés dans les n^{os} 1 et 2.

Soit I un ensemble préordonné. *Un système transitif de catégories morphiques* sur I consiste en la donnée, pour tout $i \in I$ d'une catégorie morphique C_i, et pour tout couple (i, j) tel que $i = j$ d'un foncteur covariant pp_{ij} de C_j dans C_i (le *"foncteur restriction"*) et pour tout triple $(i \leq j \leq k)$ d'un isomorphisme du foncteur p_{ik} sur le foncteur $p_{ij}p_{jk}$ (*isomorphisme de transitivité des restrictions*) satisfaisant à l'axiome suivant : si $i \leq j \leq k \leq l$, alors le diagramme suivant d'isomorphismes de foncteurs est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} p_{ij}(p_{jk}p_{kl}) = p_{ij}p_{jk}p_{kl} & \longrightarrow & p_{ij}p_{jl} \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_{ik}p_{kl} & \longrightarrow & p_{il} \end{array}$$

Moyennant ces axiomes, il n'y a pas d'inconvénient d'*identifier*, pour $i \leq j \leq k$, les foncteurs $p_{ij}p_{jk}$ et p_{ik}. Quand I est l'ensemble des parties ouvertes non vides d'un espace topologique X, un système transitif de catégories morphiques sur X est appelé une *catégorie prélocale* sur X.

Soient I et I' deux ensembles préordonnés, $\lambda : i \longrightarrow i'$ une application croissante de I dans I', $\mathcal{C}(\mathcal{C}')$ un système transitif de catégories morphiques sur $I(I')$. Un *foncteur covariant F de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$* compatible avec λ consiste en la donnée, pour tout $i \in I$, d'un foncteur covariant F_i de $\mathcal{C}_i$ dans $\mathcal{C}'_i$, pour tout couple $(i \leq j)$ dans I, d'un isomorphisme de $p_{i'j'}F_j$ sur $F_j p_{ij}$ (ces deux foncteurs étant en effet des foncteurs covariants de $\mathcal{C}_j$ dans $\mathcal{C}'_{i'}$) de façon à satisfaire à l'axiome de commutation suivant : pour tout triple $(i \leq j \leq k)$, le diagramme ci-dessus d'isomorphismes de foncteurs doit être commutatif :

$$\begin{tikzcd}
p_{i'k'}F_k \arrow[r] \arrow[d] & p_{i'j'}p_{j'k'}F_k \arrow[dr] & \\
F_i p_{ik} & F_i p_{ij} p_{jk} \arrow[l] & p_{i'j'}F_j p_{jk} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Bien entendu, moyennant ces axiomes, on identifiera purement et simplement les foncteurs $p_{i'j'}F_j$ et $F_i p_{ij}$. (Bien entendu, des axiomes comme le précédent ne sont pas particulièrement drôles dans un exposé. Il est cependant manifestement indispensable, et tout le monde l'utilise implicitement et sans s'en rendre compte, comme cas particulière du théorème de Weil bien connu : deux applications canoniques d'un ensemble dans un autre sont toujours identiques). Le cas le plus commun est celui où $I = I'$, $i = i'$ pour tout i (auquel cas on omettra de signaler l'application croissante $\lambda : i \longrightarrow i'$). Notons aussi que si on a un système transitif $\mathcal{C}$ de catégories morphiques sur l'ensemble préordonné I, alors pour tout partie J de I, on définit de façon triviale la restriction $\mathcal{C}(I)$ de $\mathcal{C}$ à J, qui est un système transitif de catégories morphiques sur J. Ceci dit, soit f une application continue d'un espace X' dans un autre X, I' l'ensemble des parties ouvertes non vides de X', I l'ensemble des parties ouvertes non vides de X, enfin $J \subset I$ l'ensemble des parties ouvertes U de X telles que $f^{-1}(U) \neq \varnothing$ (i.e. qui rencontrent $f(X')$) ; alors $U \longrightarrow U' = f^{-1}(U)$ est une application croissante de J dans I'. Si maintenant $\mathcal{C}$ est une catégorie prélocale sur X, $\mathcal{C}'$ une catégorie prélocale sur X', on appelle *foncteur local covariant de C dans C' compatible avec f* un foncteur covariant de la restriction de $\mathcal{C}$ à J dans $\mathcal{C}'$, compatible avec l'application $U \longrightarrow U'$. Si $X = X'$ et f est l'identité, on dit simplement qu'on a un foncteur local de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. Autre exemple, soit $\mathcal{C}$ une catégorie prélocale sur X, U un ouvert non vide de X, alors la restriction (au sens précisé ci-dessus, si on peut dire) de $\mathcal{C}$ à l'ensemble $I(U)$ des ouverts non vides de X contenus dans U est une catégorie prélocale $\mathcal{C}(U)$ sur U appelée *restriction de $\mathcal{C}$ à l'ouvert U* ; considérons alors l'application identique f de U dans X, on a un foncteur local canonique de $\mathcal{C}$ dans

$\mathcal{C}(U)$ compatible avec f, c'est celui qui, à tout ouvert V de X rencontrant U, associe le foncteur de restriction de $\mathcal{C}_V$ dans $\mathcal{C}(U)_{V\cap U} = \mathcal{C}_{V\cap U}$. Le foncteur local ainsi construit sera appelé *foncteur local de restriction de X à U*. — On peut *composer* de façon évidente les foncteurs sur des systèmes transitifs de catégories morphiques, et en particulier des foncteurs sur des catégories prélocales.

Laissons tomber les "systèmes transitifs de catégories morphiques", et ne parlons que de catégories prélocales. Soit f une application continue d'un espace X' dans un autre X. $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}'$) une catégorie prélocale sur X (resp. X') soient F, G deux foncteurs locaux de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ compatibles avec f. Un *homomorphisme du foncteur local F dans le foncteur local G* consiste en la donnée, pour tout ouvert $U \subset X$ rencontrant $f(X')$, i.e. tel que $U' = f^{-1}(U) \neq \varnothing$, d'un homomorphisme φ_U du foncteur F_U dans le foncteur G_U, de telle façon que pour tout ouvert $V \subset U$ rencontrant $f(X')$, le diagramme suivant d'homomorphismes de foncteurs soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} p_{V'U'}F_U & \longrightarrow & F_V p_{VU} \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_{V'U'}G_U & \longrightarrow & G_V p_{VU} \end{array}$$

où les morphismes horizontaux sont ceux qui interviennent dans la définition des foncteurs locaux F et G, et les morphismes verticaux sont ceux déduits des homomorphismes fonctoriels $F_U \longrightarrow G_U$. On définit de façon évidente le composé d'homomorphismes de foncteurs locaux $F \longrightarrow G$ et $G \longrightarrow H$ (de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ compatibles avec f) les lois habituelles (associativité, unités) sont encore vérifiées. Par ailleurs, ci F est un foncteur local de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ compatible avec f, alors pour tout ouvert $U \subset X$ rencontrant $f(X')$, F définit par restriction un foncteur local $F(U)$ de la catégorie prélocale $\mathcal{C}(U)$ sur U, restriction de $\mathcal{C}$ à U, dans la catégorie prélocale analogue $\mathcal{C}'(U')$, compatible avec l'application $U' \longrightarrow U$ restriction de f ; et cette notion de restriction d'un foncteur local est évidemment transitive. Si alors F et G sont deux foncteurs locaux de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ compatibles avec f, et φ un homomorphisme du premier dans le deuxième, alors pour tout ouvert $U \subset X$ rencontrant $f(X')$ on définit par restriction l'homomorphisme $\varphi(U)$ du foncteur $F(U)$ dans le foncteur $G(U)$, cette notion de restriction est encore transitive (donc formellement tout se passe comme si les foncteurs locaux de $\mathcal{C}_{(U)}$ dans $\mathcal{C}'_{(U')}$ compatibles avec f, pour U variable, formaient une catégorie prélocale sur X). — Un homomorphisme φ de foncteurs locaux F, G est dit un *isomorphisme* de foncteurs locaux si les φ_U sont des isomorphismes de foncteurs. On définit alors aussitôt la notion d'isomorphisme de deux catégories prélocales sur X.

4. Catégories locales au dessus d'un espace topologique X.

Soit X un espace topologique. On appelle *catégorie locale* $\mathcal{C}$ au dessus de X une catégorie prélocale au dessus de X (voir n° 3) satisfaisant aux deux axiomes suivants (où on pose, pour deux ouverts non vides $V \subset U$ et tout $A \in C_U$, $A|V = p_{VU}A$).

(i) Soit U un ouvert non vide dans X, $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de U par des ouverts non vides, soient $A, B \in \mathcal{C}_U$, et pour tout $i \in I$ supposons donné un $u_i \in M(A_i, B_i)$, où $A_i = A|U_i$, $B_i = B|U_i$. Pour qu'il existe un morphisme $u : A \longrightarrow B$ dont les restrictions aux U_i soient les u_i, il suffit (et il faut évidemment d'après la définition des catégories prélocales) que pour tout couple (i, j) d'indices tels que $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \varnothing$, les restrictions de u_i et u_j à U_{ij} soient identiques. De plus, le morphisme u en question est alors unique. (*Axiome de recollement des morphismes*).

(ii) Soit U un ouvert non vide de X, $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de U par des ouverts non vides U_i, supposons donné pour tout $i \in I$ un $\varphi_i \in \mathcal{C}_{U_i}$ et pour tout couple (i, j) tel que $U_{ij} \neq \varnothing$ un isomorphisme f_{ij} de $\varphi_j|U_{ij}$ sur $\varphi_i|U_{ij}$. Pour qu'il existe un $A \in \mathcal{C}_U$ et des isomorphismes f_i des $A|U_i$ sur les φ_i de telle façon que l'on ait $f_{ij} = (f_i|U_{ij})(f_j|U_{ij})^{-1}$, il suffit (et il faut d'ailleurs, comme il résulte de la définition d'une catégorie prélocale) que pour tout triple (i, j, k) tel que $U_{ijk} = U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$, on ait $f_{ik}|U_{ijk} = (f_{ij}|U_{ijk})(f_{jk|U_{ijk}})$ (*Axiome de recollement des morceaux*).

De plus, il résulte alors aussitôt de (i) que le A en question est unique à isomorphisme près. En le supposant choisi une fois pour toutes (par exemple à l'aide du symbole τ de Hilbert) on peut appeler A le *truc obtenu par recollement des morceaux à partir du système de changement de cartes* (f_{ij}). Le cas le plus important est celui où les φ_i sont déjà les restrictions à U_i d'un même truc $\varphi \in \mathcal{C}_U$, alors les f_{ij} sont donc des automorphismes des $\varphi|U_{ij}$.

Soient (f_{ij}) et (f'_{ij}) des systèmes de changement de cartes relatifs au même recouvrement (U_i) et des systèmes (φ), (φ'_i), A et A' les éléments de $\mathcal{C}_U$ obtenus par recollement des morceaux à partir de ces systèmes, soit g un homomorphismes de A dans A' ; soit f_i l'isomorphisme canonique de $A|U_i$ sur φ_i, définissons de même f'_i, et posons

$$g_i = f'_i(g|U_i)f_i^{-1} \quad ;$$

les g_i sont des morphismes $\varphi_i \longrightarrow \varphi'_i$, dont la connaissance équivaut à celle des $g|U_i$, et qui suffisent donc à déterminer g ; de façon précise, d'après (i), un système (g_i) définit un homomorphisme g de A dans A' si et seulement si on a $f_i'^{-1}g_if_i = f_j'^{-1}g_jf_j$ sur U_{ij} pour tout couple (i,j), i.e. si $f'_{ij}g_j = g_if_{ij}$, soit $f_{ij} = g_i^{-1}f'_{ij}g_j$ dans U_{ij}. Pour que g soit alors un isomorphisme, il faut et il suffit que les g_i le soient.

5. Espaces fibrés généraux.

Un *espace fibré* sur X est un espace topologique E muni de la donnée d'une application continue p (la *projection* du fibré) de E dans X ; si $x \in X$, $p^{-1}(x)$ est appelé la *fibré* de x dans la fibré E ; c'est un ensemble fermé si $\{x\}$ est fermé, il peut d'ailleurs être vide. Un *homomorphisme* d'un fibré E de base X projection p dans un autre (E', X', p'), est un couple d'applications continues $f : X \longrightarrow X'$ et $g : E \longrightarrow E'$ telles que $p'g = fp$, alors g applique fibres dans fibres (mais pas nécessairement *sur* !) ; d'ailleurs, si p est surjective, f est uniquement déterminée par g. Si f est donnée, on dit que g est un f-homomorphisme. Composition d'homomorphismes : un homomorphisme d'espaces fibrés est dit un *isomorphisme* si f et g sont des homéomorphismes surjectifs ; pour ceci, il faut et il suffit qu'il existe un homomorphisme "inverse".

Si on fixe son attention sur les fibrés de base fixée X, et les I-homomorphismes de tels fibrés associés à l'application identique I de X (qu'on appellera *X-homomorphismes* ou simplement homomorphismes si aucune confusion est à craindre), ils forment évidemment une catégorie morphique, appelée *catégorie des fibrés généraux* sur X.

Soit maintenant f une application continue $X' \longrightarrow X$, alors pour tout fibré E sur X on définit son *image réciproque* par f, notée $f^{-1}(E)$ par abus d'écriture, qui est un espace fibré sur X'. C'est le sous-espace de $X' \times E$ formée des points (x', y) tels que $fx' = py$, avec pour projection $(x', y) \longrightarrow x'$. L'opération de passage à l'image réciproque est *transitive* dans un sens évident. En fait, $E \longrightarrow f^{-1}(E)$ peut même être considéré comme un *foncteur covariant* de la catégorie morphique des fibrés sur X dans celle des fibrés généraux sur X', car un X-homomorphisme $E \longrightarrow F$ donne naissance de façon évidente à un X'-homomorphisme $f^{-1}(E) \longrightarrow f^{-1}(F)$.

Supposons maintenant que f soit l'application identique d'une partie X' de X dans X, on obtient alors la notion de *fibré induit* sur une partie X' de X par un fibré E sur X, ce fibré sera noté $E|X'$. $E \longrightarrow E|X'$ est donc un foncteur de E. Si pour tout ouvert non vide $U \subset X$, on considère la catégorie morphique C_U des fibrés généraux sur U, et si on envisage la notion précédente de restriction d'un fibré sur U à une partie ouverte non vide V de U, on a les données premières d'une catégorie prelocale sur X. On vérifie de plus aisément les conditions (i), (ii) du n° 3, donc on a bien défini une catégorie locale sur X, dite *catégorie locale des germes de fibrés* sur X. Si f est une application continue $X' \longrightarrow X$, alors l'opération qui, à un fibré E sur un ouvert U de X rencontrant $f(X')$, associe le fibré image réciproque $f^{-1}(E)$ sur $U' = f^{-1}(U)$, est un *foncteur local* au sens du n° 3.

La notion de sous-fibré, fibré quotient, produit fibré (fini ou infini) se développe de façon immédiate. Un *espace fibré trivial* est comme d'habitude un espace fibré isomorphe à un produit $X \times F$ muni de la projection canonique $X \times F \longrightarrow X$, d'où la notion d'*espace fibré localement trivial*. D'ailleurs dans cette partie générale de la théorie, les espaces localement triviaux ne jouent guère de rôle privilégié, ce qui est le trait qui semble le plus différencier le présent exposé du rapport Chevalley. D'aucuns prétendent que dans la définition générale des fibrés, il ne faut pas mettre de topologie sur le fibré E (sa seule structure étant l'application de projection p et ce que nous appellerons plus bas son "faisceau structural"). À ceci pourra répondre que tout d'abord, dans à peu près tous les cas raisonnables, il y a bien une topologie naturelle sur E et qui joue un rôle important ; et que d'autre part on peut raccrocher le point de vue sans topologie sur E, si ça nous chante en convenant alors de restreindre l'attention aux fibrés E dont la topologie est l'image réciproque de celle de X par la projection p ; alors dans la définition des X-homomorphismes de fibrés la condition de continuité est satisfaite automatiquement (donc la notion d'homomorphisme devient purement "ensembliste"), et on pourra alors mettre les faisceaux structuraux qu'on voudra, sans avoir à se soucier de conditions de continuité. — Un petit désagrément, c'est que la notion "générale" de trivialité d'un espace fibré n'est pas la bonne en géométrie algébrique, puisque la topologie de Zariski d'un produit n'est pas le produit des topologies de Zariski des facteurs ; dans ce cas, il faudra donc par "trivial" entendre "trivial en tant que fibré à faisceau structural" (voir plus bas) — ce qui en effet n'implique pas du tout "trivial" au sens défini plus haut (car d'après les définitions qui seront données plus bas, *tout* espace fibré peut être muni d'une structure de fibré à faisceau structural pour laquelle il soit "trivial". Il faudrait peut-être employer des mots différents, et dire "fibré constant" au lieu de "trivial" pour un fibré isomorphe à un *produit topologique* $X \times F$).

Soit E un espace fibré sur X, une *section* de E est une application *continue* de X dans E qui, composée avec la projection de E sur X, redonne l'identité. On désignera par $\mathrm{H}^0(X, E)$ l'ensemble des sections de E sur X, c'est un foncteur covariant de E. Soit f une application continue $X' \longrightarrow X$, E un fibré sur X, E' son image réciproque par f, alors on a une application naturelle de $\mathrm{H}^\circ(X, E)$ dans $\mathrm{H}^\circ(X', E')$ (*image réciproque* d'une section par f) qui est fonctorielle (i.e. un homomorphisme du foncteur $\mathrm{H}^\circ(X, E)$ de E dans le foncteur $\mathrm{H}^\circ(X, f^{-1}(E))$). Transitivité, comme cas particulier, on obtient la notion de *restriction* d'une section de E sur X à un sous-ensemble A' de X. Cela permet de former aussi, pour toute partie A de X, l'ensemble $\mathrm{H}^0(A, E)$ limite inductive des $\mathrm{H}^0(U, E|U)$ pour les voisinages ouverts U de A ; $\mathrm{H}^0(A, E)$ est encore un foncteur de E. — Il faut aussi expliciter la détermination des sections dans un fibré donné par "recollement des morceaux" (cf n° 2), une section est donné par un système (f_i) de sections des E_i sur les U_i tel que $(f_i|U_{ij}) = f_{ij}(f_j|U_{ij})$.

6. Faisceaux.

Un faisceau sur X est un espace fibré E sur X tel que tout point a de E a un voisinage ouvert U tel que la projection p induise un homéomorphisme de U sur un ouvert de X. Il en résulte que l'ensemble des points où deux sections de E sur un ouvert V coïncident est ouvert, l'application naturelle de $\mathrm{H}^0(\{x\}, E)$ dans la fibre E_x de E au-dessus de x est bijective ; pour $A \subset X$ l'application naturelle de $\mathrm{H}^\circ(A, E)$ dans l'ensemble $\mathrm{H}^\circ(A, E|A)$ des sections de E au dessus de A est injective, et même surjective si A admet un système fondamental de voisinages paracompacts, ou si A est fermé et admet un voisinage paracompact. *Propriétés de permanence*: l'image inverse d'un faisceau par une application continue est un faisceau, le produit fibré d'un nombre fini de faisceaux est un faisceau ; dans le cas infini, il faut prendre non le produit fibré usuel, mais passer à la limite inductive sur les produits des ensembles de sections pour obtenir encore un faisceau, que par abus de langage sera appelé *produit des faisceaux* données.

Comme la condition pour qu'un fibré soit un faisceau est de nature purement locale, les faisceaux sur les ouverts de X forment une sous catégorie locale de la catégorie des fibrés sur les ouverts de X, catégorie qu'on appellera *catégorie locale des germes de faisceaux sur* X.

Il faudra dérouler aussi les sorites usuels sur la définition des faisceaux par les préfaisceaux, sur les sous-faisceaux et les faisceaux quotients.

Exemples à donner : faisceau constant ($X \times F$, où F est *discret*) et localement constant (propriétés de permanence pour de tels faisceaux); les germes d'applications de X dans un ensemble donné et des sous faisceaux, p.ex. les germes de sections d'un fibré ; les germes d'homomorphismes d'un fibré sur X dans un autre. Plus généralement, si $\mathcal{C}$ est une catégorie locale sur X, et si $A, B \in \mathcal{C}_X$, alors les morphismes de $A|U$ dans $B|U$ (U ouvert variable) avec les opérations de restriction naturelles, sont les sections d'un faisceau en vertu de l'axiome de localisation des morphismes, ce faisceau sera appelé *faisceau des germes de morphismes de* A *dans* B, et noté par exemple $\mathcal{M}(A, B)$ si $M(A, B)$ est le symbole fonctionnel désignant les morphismes globaux de A dans B.

7. Group bundles et faisceau de groupes.

(Mot pour "group-bundle" en français ?). On définit de façon générale les *fibrés avec loi de composition* (i.e. un hom. de carré fibré de E dans E) dans la fibre, avec la notion évidente de homomorphisme, image réciproque etc. Parmi les sorites on doit aussi expliciter dans le cas de fibrés qui sont des faisceaux, le point de vue des faisceaux définis via préfaisceaux. — Un fibré avec loi de composition dans les fibres est dit un *group-bundle*, si les fibres sont des groupes et si l'application $z \longrightarrow z^{-1}$ de E dans lui-même est continue, et l'application qui à chaque $x \in X$ fait correspondre l'élément unité de la fibre E_x est continue (on l'appelle alors la *section unité*). Alors les $\mathrm{H}^\circ(U, E)$ sont des groupes, (et la réciproque est vraie quand E est un faisceau), dépendant fonctoriellement de E etc.

Un sous-fibré d'un group-bundle E (i.e. un sous-ensemble F de E, muni de la projection induite) est un *sous-group-bundle* si son intersection avec chaque fibre de E est un sous-groupe. On définit alors de façon évidente le *fibré quotient* E/F. On a des homomorphismes canonique $F \longrightarrow E \longrightarrow E/F$ (le premier injectif, le deuxième surjectif) donnant naissance à des applications canoniques

$$\mathrm{H}^0(X, F) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, E) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, E/F)$$

le premier étant un homomorphisme de groupes injectif. Cette suite d'applications est *exacte* dans le sens suivant : l'image de la première application est identique au noyau de la seconde (ce noyau est défini, grâce à l'existence d'un élément privilégié dans $\mathrm{H}^0(X, E/F)$). Quand F est *distingué* dans E (i.e. les F_x distingués dans les E_x) E/F est même un group-bundle (et le deuxième application (1) est encore un homomorphisme de groupes). — Si dans ce qui précède E est un faisceau et F un sous-faisceau, on dit que F est un sous-faisceau de groupes de E, ou simplement sous-faisceau si aucune confusion ne peut en résulter. Alors E/F est encore un faisceau. Ici encore, il faut expliciter aussi le point de vue préfaisceaux.

Exemple important (et d'ailleurs universel) de faisceau de groupes : Soit C une catégorie locale sur X, et soit $A \in \mathcal{C}_X$, alors le *faisceau des germes d'endomorphismes* de A est muni d'une structure de *faisceau de monoïdes*, et le *faisceau* Aut A *des germes d'automorphismes* (sous-faisceau formé des éléments symmétrisables du précédent) est un *faisceau de groupes*.

8. Fibré avec group bundle d'opérateurs.

Soit E un fibré sur X, G un group-bundle, on dit que G opère sur E (à gauche p. ex.) si on s'est donné une application du produit fibré $C_x \times E$ dans E telle que, pour tout $x \in X$, l'application induite $G_x \times E_x \longrightarrow E_x$ définit sur E_x une structure d'ensemble à groupe G_x d'opérateurs. Alors pour toute partie non vide U de X, $\mathrm{H}^\circ(U, E)$ admet $\mathrm{H}^\circ(U, G)$ comme groupe d'opérateurs. On dit que G opère sans point fixe (resp. transitivement) s'il en est ainsi sur chaque fibre ("sans point fixe" signifiant un élément de groupe distinct de l'élément neutre n'admet pas de point fixe). E est dit *principal au sens large* sous G si G opère sans point fixe et si l'application du sous-espace M de $E_x \times E$ formé des couples (a, a') d'éléments de E_x congrus sous G_x (pour quelque x) dans G, faisant correspondre à (a, a') l'unique $g \in G_x$ tel que $a' = ga$ est continue : si de plus G est transitif, on dit que E est *principal* sous G. (N.B. Si G est un group-bundle constant $X \times G_0$ — G_0 un groupe topologique donné — et l'application de E sur X ouverte, on retrouve la notion usuelle de fibré principal sous G_0, de base X). Si E admet G comme groupe d'opérateurs, alors on définit de façon évidente le quotient E/G qui est un fibré sur X. On a un homomorphisme canonique (surjectif) $E \longrightarrow E/G$, donnant lieu à des applications canoniques

$$\mathrm{H}^{\circ}(U,E) \longrightarrow \mathrm{H}^{\circ}(U,E/G)$$

Deux éléments de $\mathrm{H}^{\circ}(U,E)$ congrus sous $\mathrm{H}^{\circ}(U,G)$ donnant la même image dans $\mathrm{H}^{\circ}(U,E/G)$, et l'inverse est vrai si E est princiapl au sens large.

Dans le cas où E est un *faisceau* sur lequel opère sans point fixe un *faisceau* de groupes G, on voit aussitôt que E est automatiquement principal au sens large, et E/G est encore un faisceau. De plus, les sections de E/G correspondent canoniquement aux sous-faisceaux de E stables sous G et principaux sous G (i.e. dans lesquels G est transitif), à une section f de E/G correspondant l'image réciproque de $f(X)$ dans E par l'homomorphisme canonique $E \longrightarrow E/G$. — Notons aussi, toujours dans le cas où G est un faisceau de groupes, qu'il revient au même de faire opérer G à gauche sur un fibré E, ou de se donner un homomorphisme (de faisceau de groupes) de G dans le faisceau $\underline{\mathrm{Aut}}E$ des germes d'automorphismes de E. Il y a donc lieu, si $\mathcal{C}$ est une classe locale sur X et $A \in \mathcal{C}_X$, de dire que G opère à gauche dans A si on s'est donné un homomorphisme de G dans le faisceau $\underline{\mathrm{Aut}}(A)$ des germes d'automorphismes.

Exemple important de faisceau avec faisceau de groupes opérant sans points fixes. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie locale sur X, soient $A, B \in \mathcal{C}_X$ et supposant A et B *localement isomorphes*, i.e. que tout $x \in X$ a un voisinage ouvert U tel que $A|U$ soit isomorphe à $B|U$. Considérons alors le faisceau $\mathrm{Is}(A,B)$ des germes d'isomorphismes de A sur B, sa projection sur X est donc surjective par définition. Ce faisceau admet à la fois le faisceau $\underline{\mathrm{Aut}}A$ des germes d'automorphismes de A comme faisceau de groupes d'opérateurs à droite, et le faisceau $\underline{\mathrm{Aut}}B$ comme faisceau de groupes d'opérateurs à gauche, grâce à la composition des germes d'isomorphismes. $\mathrm{Is}(A,B)$ est manifestement principal sous $\underline{\mathrm{Aut}}A$ et sous $\underline{\mathrm{Aut}}B$.

9. Définition des espaces fibrés à faisceau structural.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie locale sur X. Donnons-nous une fois pour toutes un $\varphi \in \mathcal{C}_X$ un faisceau de groupes G et une représentation biunivoque de G dans le faisceau de groupes $\underline{\mathrm{Aut}}\varphi$ (de sorte que nous pourrons identifier G à un sous-faisceau de ce dernier), les automorphismes de φ (où plus généralement de restrictions $\varphi|U$) qui sont des sections de G seront dits *permis*. Soit $A \in \mathcal{C}_X$ localement isomorphe à φ, alors on a vu que le faisceau $\mathcal{M}(\varphi, A)$ des germes d'isomorphismes de φ sur A est principal sous $\underline{\text{Aut}}\varphi$ opérant à droite donc principal au sens large sous G opérant à droite. Une section du faisceau quotient $\mathcal{M}(\varphi, A)/G$ n'est pas autre chose qu'un sous-faisceau de $\mathcal{M}(\varphi, A)$ qui soit principal sous G. Ceci dit :

Définition. — *On appelle truc avec structure de type* (φ, G) *dans* $\mathcal{C}_X$ *la donnée d'un* $A \in \mathcal{C}_X$ *localement isomorphe à* φ *et d'une section* f *du quotient* $\mathcal{M}(\varphi, A)/G$ *du faisceau de germes d'isomorphismes de* φ *sur* A *par* G *opérant à droite, i.e. d'un sous-faisceau* P *de* $\mathcal{M}(\varphi, A)$ *stable et principal sous* G*.* G *est appelé le faisceau structural de* A*, et si aucune ambiguïté sur* φ *n'est à craindre, on dira simplement que* A *est un truc à faisceau structural* G *(*P *est appelé le faisceau principal associé à* A*).*

Ça signifie donc que pour tout $x \in X$, on se donne parmi les germes d'isomorphismes de φ sur A, une classe privilégiée de tels isomorphismes définie à un germe d'automorphisme permis de φ en x près, et ceci de façon variant continûment avec x ; ou encore que pour tout ouvert $U \subset X$, on se donne un ensemble d'isomorphismes dits "permis" de $\varphi|U$ sur $A|U$, de telle façon que (i) si f est permis, alors g est permis si et seulement si $g^{-1}f$ est un automorphisme permis de $\varphi|U$; (ii) si (U_i) est un recouvrement de U par des ouverts non vides U_i, f permis équivaut à $f|U_i$ permis pour tout i ; (iii) tout point a un voisinage ouvert sur lequel existe un isomorphisme permis de $\varphi|U$ sur $A|U$.

La notion de *restriction* d'un truc avec faisceau structural G à un ouvert ainsi que la notion d'*isomorphisme* d'un tel truc sur un autre est évidente, les trucs avec faisceau structural sur les ouverts de X forment alors encore une catégorie locale sur X.

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est la catégorie locale des germes de fibrés, donc φ un fibré sur X avec faisceau de groupes d'opérateurs G, on obtient la notion de *fibré à faisceau structural*.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie locale sur X. Une "espèce de structure locale" sur $\mathcal{C}$ doit impliquer, en tout état de cause ; pour tout ouvert non vide $U \subset X$ et tout $A \in \mathcal{C}_U$ un ensemble $T_U(A)$ (*l'ensemble des structures d'espèce* T sur A) ; pour des isomorphismes $A \longrightarrow B$ dans $\mathcal{C}_U$, une notion de *transport de structure* de telle façon que T_U devienne un foncteur sur la catégorie $(C_U)_\circ$, déduite de C_U en restreignant les morphismes à être des isomorphismes ; pour tout ouvert non vide $V \subset U$ une notion de *restriction d'une structure d'espèce* T sur A à $A|V$ définissant une application de $T_U(A)$ dans $T_V(A|V)$ qui devra être fonctorielle et satisfaire une condition évidente de transitivité. Ce qui précède peut aussi s'exprimer en disant que pour $A \in \mathcal{C}_U$ donné, les $T_V(A|V)$ (V ouvert non vide $\subset U$) forment un préfaisceau $T(A)$ sur U, dépendant fonctoriellement de A. Si de plus on exige que pour se donner une structure d'espèce T sur A, il suffit de se donner des structures d'espèce T sur les U_i d'un recouvrement ouvert (U_i) de U de façon à satisfaire à la condition de cohérence évidente, ceci signifie que $T(A)$ est même un faisceau. On est ainsi conduit à *définir* une *espèce de structure locale* sur $\mathcal{C}$ comme un foncteur local de $\mathcal{C}_\circ$ (catégorie locale déduite de $\mathcal{C}$ en restreignant les morphismes à être des isomorphismes) dans la catégorie locale des faisceaux d'ensembles. (Si par exemple C est la catégorie locale des germes de fibrés sur X, et si $T_\circ$ est une espèce de structure sur la catégorie des ensembles - cf n°2 - on peut définir T comme l'espèce de structure locale consistant à se donner une structure d'espèce $T_\circ$ sur chaque fibre de l'espace fibré A ; bien entendu on imposera en général des axiomes supplémentaires, exprimant que la structure mise sur une fibre varie continûment avec cette dernière).

Cette définition posée, soit $\varphi \in \mathcal{C}_X$, et soit $C(\varphi)$ la sous-catégorie locale de $\mathcal{C}$ formée des trucs $A \in \mathcal{C}_U$ localement isomorphes à φ, avec comme morphismes les *isomorphismes* dans $\mathcal{C}$. On peut alors préciser, par des considérations analogues à celles du n°2, les espèces de structures locales qu'on peut mettre sur $C(\varphi)$. On trouve en particulier ceci : Soit T une espèce de structure locale sur C, supposons $\varphi \in \mathcal{C}_X$ muni d'une structure $t \in T_X(\varphi)$ d'espèce T, soit G le faisceau des germes d'automorphismes de φ muni de t ; alors pour un $B \in \mathcal{C}_X$, il revient au même de se donner sur B une structure d'espèce T pour laquelle B soit localement isomorphe à (φ, t), ou de se donner sur B une structure de type (φ, G) à faisceau structural G. D'ailleurs, *tout* sous-faisceau de groupes G de $\operatorname{Aut}\varphi$ peut évidemment être obtenu comme le faisceau des germes d'automorphismes pour une structure convenable d'espèce convenable.

10. Fibrés associés.

Soient $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux catégories locales sur X, φ un truc dans C_X muni d'un sous-faisceau G de $\underline{\mathrm{Aut}}\varphi$, ψ un truc de C'_X muni d'un sous-faisceau H de $\underline{\mathrm{Aut}}\psi$; donnons nous un homomorphisme u de G dans H. Soit A un truc dans C_X avec structure de type (φ, G), on va lui faire correspondre canoniquement un truc dans C'_X avec structure de type (ψ, H), noté ψ^A, et appelé *le truc associé* à A (et à la représentation u de G dans le sous-faisceau H de $\underline{\mathrm{Aut}}\psi$). Pour ceci, soit $((U_i, f_i))$ l'ensemble de tous les isomorphismes permis

$f_i : \varphi|U_i \longrightarrow A|U_i$ sur des ouverts U_i, et soit $f_{ij} = (f_i|U_i \cap U_j)^{-1}(f_j|U_i \cap U_j)$ les (f_{ij}) satisfont aux conditions de cohérence (ii) du n°2, donc il en est de même de leurs transformés $u(f_{ij})$, qui définissent donc (d'après l'axiome de recollement des morceaux) un truc ψ^A dans C'_X. De plus, du fait que ces changements de carte sont dans G', ψ^A est muni de façon naturelle d'une structure de type (ψ', H), ce qui achève la définition. Il se peut qu'on fasse seulement opérer G dans ψ, i.e. qu'on se donne un homomorphisme u de G dans $\underline{\mathrm{Aut}}\psi$, sans expliciter un sous-faisceau H de $\underline{\mathrm{Aut}}\psi$; Dans ce cas, ψ^A sera considère comme admettant le faisceau structural $u(G)$. — Un cas important est celui ou $C = C'$, $\varphi = \psi$ et G étant un sous-faisceau de G', u l'application d'injection. Alors ψ^A s'identifie à A, à cela près qu'il est muni de faisceau structural G' au lieu de G : opération *d'extension du faisceau structural*. En particulier, supposons que φ soit muni d'une structure de nature locale (au sens précis expliqué au n° 9) *invariante* sous G, i.e. telle que G soit contenu dans le faisceau G' des germes d'automorphismes de φ laissant cette structure invariante ; alors tout truc A à faisceau structural G est canoniquement muni (par extension de faisceau structural) du faisceau structural G', c'est-à-dire (loc. cité) d'une structure de nature local de l'espèce envisagée sur φ. Par exemple, si C est la catégorie des germes de fibrés, et si on se donne sur φ une structure de group-bundle invariante sous G, alors tout fibré à faisceau structural G est en même temps un group-bundle.

Comportements fonctoriels. Revenons au notations du début de ce numéro, considérons un isomorphisme φ de A sur un truc A' dans C_X à faisceau structural G (isomorphisme respectant le faisceau structural), cela définit évidemment un isomorphisme $\psi^A \longrightarrow \psi^{A'}$. La même chose peut se dire sur tout ouvert $U \subset X$. Par suite, on peut considérer $A \longrightarrow \psi^A$ comme un *foncteur local* de la catégorie locale $C(\varphi, G)$ dans la catégorie locale $C'(\psi, H)$ où si on veut faire abstraction de H, à valeurs dans la catégorie locale C'. Si maintenant on se donne dans C'_X un autre truc ψ' et une représentation u' de G dans $\underline{\mathrm{Aut}}\psi'$, et enfin un morphisme φ de ψ dans ψ' permutant aux opérations de G, on constate (compte tenu de la détermination des morphismes entre trucs définis par recollement des morceaux) qu'il lui est associé un morphisme de ψ^A dans ${\psi'}^A$, qui est fonctoriel appelé homomorphisme *associé* à φ. La même chose valant sur tout ouvert non vide de X, φ définit donc un homomorphisme du foncteur local $A \longrightarrow \psi^A$ dans le foncteur local $A \longrightarrow {\psi'}^A$. Propriété de transitivité évidente si on compose deux G-homomorphismes tels que φ. — Réciproquement, supposons donné un foncteur local F de $C(\varphi, G)$ dans C', alors on peut voir sans difficulté que F est canoniquement isomorphe au foncteur local défini par un certain truc $\psi \in C'_X$ muni du faisceau d'opérateurs G; on pose $\psi = F(\varphi)$, dans lequel G opère puisque G opère dans φ et F est un foncteur local. En résumé, *on a trouvé tous les foncteurs locaux de $C(\varphi, G)$* dans C', *ils s'identifient aux $\psi \in C'_X$ munis de G comme faisceau d'opérateurs*, un tel ψ définissant le foncteur $A \longrightarrow \psi^A$. De plus, dans cette interprétation, les homomorphismes d'un foncteur local dans un autre correspondent aux G-homomorphismes entre trucs ψ avec faisceau d'opérateurs G, la composition des homomorphismes de foncteurs locaux étant la composition des G-homomorphismes). On retrouve ainsi l'idée intuitive des fibrés associés, ce sont les fibrés qui peuvent "se définir en termes intrinsèques à partir de la donné du fibré A muni de sa structure de type (φ, G)".

11. Faisceau principal associé. Restriction du faisceau structural.

Considérons le cas où $\varphi = G$, G opérant sur φ par la représentation régulière gauche ($\mathcal{C}$ = catégorie locale des germes de fibrés). On voit alors facilement que la notion de fibré de type (φ, G) est identique à celle de fibré principal sous G opérant à droite (voir n° 8) : cela résulte par exemple en vertu de n° 9 du fait que G opérant à gauche sur φ est le faisceau des germes d'automorphismes de φ considéré comme muni de G opérant par la représentation régulière droite. Donnons-nous maintenant une représentation injective de G dans un $\underline{\mathrm{Aut}}\varphi$ ($\varphi \in \mathcal{C}_X$, $\mathcal{C}$ étant de nouveau une catégorie locale quelconque) et désignons par ψ, G muni du faisceau d'opérateurs à gauche G. Si A est un truc dans $\mathcal{C}_X$ avec structure de type (φ, G) le fibré associé, relativement à la représentation donnée de G par germes d'automorphimses de ψ, est donc un fibré principal sous G opérant à droite ; ce n'est d'ailleurs autre que le faisceau principal associé défini au n° 9 (car en vertu des considérations du n° 10 il suffit de le vérifier pour $A = \varphi$, où c'est trivial).

Soit maintenant G' un sous-faisceau de G, et cherchons les structures de type (φ, G') sur A donnant la structure donnée par extension du faisceau structural à G. Cela revient à trouver les sections de $J\mathcal{F}(\varphi, A)/G'$ dont l'image dans $J\mathcal{F}(\varphi, A)/G$ est la section donnée définissant à ce dernier, on trouve donc immédiatement que *les structures sur A obtenues par restriction du faisceau structural à G' correspondent canoniquement aux sections du quotient P/G'*, P étant le faisceau principal associé. En particulier, existence d'une restriction du faisceau structural = existence d'une section d P/G'.

Remarques. On n'insistera pas ici sur la façon dont les notions générales esquissées ci-dessus se précisent pour obtenir les diverses notions de fibrés avec *groupe structurel* Γ (le faisceau structural étant alors un faisceau de germes d'applications de X dans le groupe Γ) ; fibré topologique (ou différentiable etc) avec groupe structural. Alors le faisceau principal associé est un sous-faisceau du faisceau des germes de sections du *fibré principal associé* usuel. Mais nous signalerons ici que le développement donné plus bas de la suite exacte de cohomologie amène à "tordre" certains faisceaux, et par suite, même si on part d'un bon groupe structural Γ, à tordre le group-bundle constant $X \times \Gamma$ de façon à obtenir un group-bundle localement constant mais en général non constant ; on a alors à classer les espaces fibrés à "groupe structural tordu", i.e. variable avec le point (et formant lui-même un fibré localement constant sur X). Il est peut-être même indiqué, dans le paragraphe consacré à la classification *topologique* des fibrés à groupe structural, de prendre en considération le cas tordu. Alors les espaces classifiants des groupes Γ_x $(x \in X)$ fermeraient un fibré sur X, dont les classes de sections (mod. homotopie) donneraient la classification cherchée.

12. Le foncteur $\mathrm{H}^1(X, G)$ et son interprétation.

Soit G un faisceau de groupes sur X. On a défini $\mathrm{H}^0(X, G)$, qui est ici un groupe, et un foncteur en G (groupe des sections de G sur X). Nous allons définir $\mathrm{H}^1(X, G)$. Pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)$ de X, on considère les groupes de cochaînes de U à coefficients dans G

$$C^p(\mathcal{U}, G) = \prod \mathrm{H}^0(U_{i_0 i_1 \ldots i_p}, G)$$

où on pose $U_{i_0 i_1 \ldots i_p} = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p}$. Le produit étant étendu aux $(i_0, \ldots, i_p) \in I^{p+1}$ tels que $U_{i_0 i_1 \ldots i_p} \neq \varnothing$ (ou bien en convenant que $\mathrm{H}^0(\varnothing, G)$ est le groupe réduit à un élément). Une 1-cochaine est un cocycle si

$$g_{ik} = g_{ij} g_{jk} \quad \text{sur} \quad U_{ijk}$$

pour tout triple (i, j, k) tel que $U_{ijk} \neq \varnothing$. L'ensemble des 1-cocycles (qui en général n'est pas un sous-groupe) est noté $Z^1(\mathcal{U}, G)$. On fait opérer $C^0(\mathcal{U}, G)$ dans $C^1(\mathcal{U}, G)$ en définissant, pour $g^0 = (g_i) \in C^0(\mathcal{U}, G)$, l'opération $D(g^0)$ dans $C^1(\mathcal{U}, G)$ par

$$(D(g^0) g^1)_{ij} = g_i g_{ij} g_j^{-1}$$

pour tout $g^1 = (g_{ij}) \in C^1(\mathcal{U}, G)$. D est une représentation du groupe $C^0(\mathcal{U}, G)$ par des permutations de l'ensemble $C^1(\mathcal{U}, G)$, et on voit aussitôt que $Z^1(\mathcal{U}, G)$ est stable sous cette représentation. On peut alors considérer l'ensemble des orbites, et poser

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{U}, G) = Z^1(\mathcal{U}, G)/D(C^0(\mathcal{U}, G))$$

$\mathrm{H}^1(\mathcal{U}, G)$ est un ensemble, mais pas un groupe si G n'est pas abélien. Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement plus fin que $\mathcal{U}$, on définit comme d'habitude une application canonique $\mathrm{H}^1(\mathcal{U}, G) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathcal{U}, G)$, ce qui permet de passer à la limite inductive et de poser

$$\mathrm{H}^1(X, G) = \varinjlim \mathrm{H}^1(\mathcal{U}, G)$$

D'ailleurs, on constate que les applications $\mathrm{H}^1(\mathcal{U}, G) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathcal{U}, G)$ sont injectives, donc les $\mathrm{H}^1(\mathcal{U}, G)$ sont des sous-ensembles de $\mathrm{H}^1(X, G)$. Bien entendu, chaque $\mathrm{H}^1(\mathcal{U}, G)$ peut être regardé comme un foncteur en G, (à valeurs dans le catégorie des ensembles), d'où s'ensuit que $\mathrm{H}^1(X, G)$ est lui-même un foncteur en G.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie locale sur X, $\varphi \in C_X$ et G un sous-faisceau de groupes de $\underline{\mathrm{Aut}}\varphi$. Si $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert de X, alors les trucs $E \in C_X$ avec structure de type (φ, G) qui sont tels que sur chaque U_i, $E|U_i$ soit isomorphe (avec son faisceau structural) au "fibré trivial" $\varphi|U_i$, sont exactement ceux isomorphisme près, qui peuvent s'obtenir par recollement des morceaux à partir de changement de cartes (f_{ij}), où $f_{ij} \in \mathrm{H}^0(U_{ij}, G)$ (cf. n° 4). D'ailleurs, pour que ce recollement soit possible, il faut et il suffit que (f_{ij}) soit un *cocyle* ; et pour que deux tels trucs avec structure de type (φ, G) définis par des cocycles (f_{ij}) et (f'_{ij}), soient isomorphes, il faut et il suffit qu'on puisse trouver des $g_i \in \mathrm{H}^0(U_i, G)$ tels que $f'_{ij} g_j = g_i f_{ij}$ i.e. que (f'_{ij}) soit transformée de (f_{ij}) par la cochaine (g_i). Ainsi on trouve une correspondance canonique entre les classes de structures de type (φ, G) qui sont "triviales" sur les $U_i \in \mathcal{U}$, et les éléments de $\mathrm{H}^1(\mathcal{U}, G)$, donc aussi entre les classes de structure de type (φ, G) et les éléments de $\mathrm{H}^1(X, G)$ (en particulier, φ n'intervient plus dans la classification, mais seulement le faisceau de groupes G). De plus, si on a un faisceau de groupes d'opérateurs p du faisceau de groupes G dans H, considérons un truc $A \in C_X$ avec structure de type (φ, G) et le $\psi^A \in C'_X$ avec structure de type (ψ, H) associé, soient $c \in \mathrm{H}^1(X, G)$ et $c' \in \mathrm{H}^1(X, H)$ les classes correspondantes, alors $c' = pc$. Compatibilité analogue pour la notion de restriction de A à un ouvert U (qui correspond à l'application évidente de restriction $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(U, G)$). À vrai dire, ceci est un cas particulier d'un fait plus général relatif à la donnée d'une application continue d'un espace X' dans un espace X, et un foncteur local (compatible avec f) d'une catégorie locale $\mathcal{C}$ sur X dans une catégorie locale $\mathcal{C}'$ sur X'. Si à $\varphi \in C_X$ correspond $\varphi' \in C'_X$, alors le faisceau de groupes G image réciproque par f un faisceau de groupes $G\underline{\mathrm{Aut}}\varphi$ opère dans φ' et si alors A est dans C_X et muni d'une structure de type (φ, G), alors son "image réciproque" $A' \in C'_X$, se trouve muni canoniquement d'une structure de type (φ', G'), dont la classe $c' \in \mathrm{H}^1(X', G')$ est l'image de $c \in \mathrm{H}^1(X, G)$ par l'application naturelle $f^* : \mathrm{H}^1(X, G) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X', G')$ associée à f.

13. Les suites exactes de cohomologie.

Soit G un faisceau d'ensembles sur X, F un faisceau de groupes sur X opérant à droite sur G sans point fixes (donc G est principal au sens large sous F, cf. N°8), soit $H = G/F$ le faisceau d'ensembles quotient. On peut alors définir le "premier homomorphisme cobord"

$$\partial : \mathrm{H}^0(X, H) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, F)$$

par une formule bien connue ; on constate que la suite d'applications

$$\mathrm{H}^0(X, G) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, H) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, F)$$

est exacte, en ce sens que l'image du premier homomorphisme est identique au noyau du second (lequel est défini, grâce à l'existence d'un "élément neutre" dans $\mathrm{H}^1(X, F)$) ; on se rappellera d¿ailleurs que deux éléments de $\mathrm{H}^0(X, G)$ ont même image dans $\mathrm{H}^0(X, H)$ si et seulement s'ils sont transformées l'un de l'autre par un élément de $\mathrm{H}^0(X, F)$ (alors bien déterminé). Supposons maintenant que G soit aussi un faisceau de groupes et F un sous-faisceau de groupes opérant dans G par la représentation régulière droite. Alors on peut écrire la suite d'applications

(1)

$$e \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, F) \xrightarrow{i_0} \mathrm{H}^0(X, G) \xrightarrow{j_0} \mathrm{H}^0(X, H) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1(X, F) \xrightarrow{i_1} \mathrm{H}^1(X, G)$$

où i est un homomorphisme de groupes, et i_1 transforme élément neutre en élément neutre. Cette suite est encore exacte au sens précisé plus haut, et même au sens plus fort de suite exacte d'applications entre ensembles munis d'éléments neutres, dont certains peuvent être des groupes opérant sur l'ensemble suivant, auquel cas on exige en plus que deux éléments de ce dernier aient une même image dans le suivant si et seulement si ils sont transformés l'un de l'autre par un élément du groupe qui précède. Ici, $\mathrm{H}^0(X, F)$ et $\mathrm{H}^0(X, G)$ sont bien des groupes opérant sur l'ensemble suivant $\mathrm{H}^0(X, G)$ resp. $\mathrm{H}^0(X, H)$, et l'exactitude est valable en tenant compte de ces opérations. Quand F est distingué dans G, on peut compléter la suite (1) en lui adjoignant $\mathrm{H}^1(X, G) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, H)$ (car H est lui-même un faisceau de groupes), la suite reste exacte :

$$e \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, F) \xrightarrow{i_0} \mathrm{H}^0(X, G) \xrightarrow{j_0} \mathrm{H}^0(X, H)$$

$$(1') \qquad \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^1(X, F) \xrightarrow{i_1} \mathrm{H}^1(X, G) \xrightarrow{j_1} \mathrm{H}^1(X, H)$$

D'ailleurs, $\mathrm{H}^0(X, G)$ est maintenant lui-même un groupe, il est possible de le faire opérer de façon naturelle dans dans $\mathrm{H}^1(X, F)$, i.e. de définir une représentation p de $\mathrm{H}^0(X, H)$ par des permutations de $\mathrm{H}^1(X, F)$, de telle façon que deux éléments de $\mathrm{H}^1(X, F)$ aient même image dans $\mathrm{H}^1(X, G)$ si et seulement s'ils sont congrus par une opération de $\mathrm{H}^0(X, H)$; en d'autres termes, la suite (1) reste exacte si on tient compte de la représentation p. (N.B. p et ∂ sont liés par la formule $\partial n = p(h^{-1})$, e pour $h \in \mathrm{H}^0(X, H)$; d'ailleurs, si $g \in \mathrm{H}^0(X, G)$, on a $p(j_0 g) = \sigma(g)$. où $\sigma(g)$ est la permutation de $\mathrm{H}^1(X, F)$ défini grâce à l'automorphisme du faisceau F défini par g par automorphisme intérieur).

Quand F est invariant et *abélien*, alors $\mathrm{H}^1(X, F)$ est lui-même un groupe abélien, et on peut préciser davantage les relations entre l'opérateur ∂ et la représentation p de $\mathrm{H}^0(X, H)$, si pour $c \in \mathrm{H}^1(X, F)$ on désigne par $T(c)$ l'opération de translation par c dans le groupe abélien $\mathrm{H}^1(X, F)$, on a pour $h \in \mathrm{H}^0(X, H)$

$$(2) \qquad p(h) = T(\partial(h^{-1}))\sigma(h)$$

où $\sigma(h)$ est l'automorphisme du groupe abélien $\mathrm{H}^1(X, F)$ défini par l'automorphisme (noté encore $\sigma(h)$) de la représentation de G par germes d'automorphismes de F obtenu comme suit. G opère sur lui-même par "automorphismes intérieurs", et par suite sur le sous-faisceau de groupes *invariant* F ; dans cette représentation de G par germes d'automorphismes de F, les $f \in F$ opérant trivialement puisque F est abélien, donc par passage au quotient on obtient une représentation de H par germes d'automorphismes de F, notée σ ; en particulier, pour tout section h de H, $\sigma(h)$ est un automorphisme du faisceau de groupes abéliens F. — La formule (2) montre que $p(h)$ est un automorphisme *affine* du groupe abélien $\mathrm{H}^1(X,F)$, l'automorphisme homogène associé étant $\sigma(h)$; elle implique que

$$(3) \qquad \partial'(hh') = \partial h + \sigma(h)\partial' h \quad ; \quad \partial' e = 0$$

(en posant $\partial'(h) = \partial(h^{-1})$ pour $h \in \mathrm{H}^0(X,H)$) ∂' est une 1-cochaine normalisée du groupe $\mathrm{H}^0(X,F)$ à coefficients dans le $\mathrm{H}^0(X,H)$-module $\mathrm{H}^1(X,F)$. En général, ∂ n'est donc pas un homomorphisme de groupes ; ce sera cependant le cas si σ est la représentation triviale de $\mathrm{H0}(X,H)$, à fortiori si la représentation σ de H est triviale, i.e. si F est dans le *centre* de G. Dans ce cas d'ailleurs, la formule (2) montrer que p est obtenu en composant l'homomorphisme $\partial' = \partial$ avec la représentation régulière de $\mathrm{H}^1(X,F)$; en particulier, deux éléments de $\mathrm{H}^1(X,F)$ ont même image dans $\mathrm{H}^1(X,G)$ si et seulement s'ils sont congrus mod le groupe $\partial(\mathrm{H}^0(X,H) \subset \mathrm{H}^1(X,F))$.

Quand F est dans le centre de G, on peut faire opérer $\mathrm{H}^1(X,F)$ sur l'ensemble $\mathrm{H}^1(X,G)$ de façon naturelle, et la suite (1') reste exacte compte tenu de cette structure supplémentaire, i.e. deux éléments de $\mathrm{H}^1(X,G)$ ont même image dans $\mathrm{H}^1(X,H)$ si et seulement si s'ils sont transformés l'un de l'autre par une opération de $\mathrm{H1}(X,F)$.

Quand F est dans le centre, on peut compléter la suite exacte (1') en lui adjoignant le "deuxième opérateur cobord"

$$\mathrm{H}^1(X,H) \longrightarrow \mathrm{H}^2(X,F)$$

(mais bien entendu, il ne peut être question de le définir dans le chap. 1 des fibrés, vu qu'il suppose connu la définition de la cohomologie de X à coefficients dans un faisceau de groupes abéliens). Cet opérateur est tout à fait utile, et mérite certainement de figurer dans Bourbaki (p. ex. dans un petit numéro spécial en théorie cohomologique des faisceaux). Il peut d'ailleurs se définir aussi en supposant seulement F abélien invariant dans G, mais alors il faut dans $\mathrm{H}^2(X,F)$ remplacer F par un faisceau obtenu en tordant F par une $c \longleftarrow \mathrm{H}^1(X,H)$ (voir le rapport Kansas pour des détails).

14. Où on tord les faisceaux structuraux.

Soit G un faisceau de groupes sur X, alors G opère sur lui-même comme faisceau de germes d'automorphismes par automorphismes intérieurs, désignons par $G(\sigma)$ le faisceau

G considéré comme faisceau de groupes muni du faisceau de germes d'automorphismes G. Si maintenant E est un fibré à faisceau structural G, on peut considérer le fibré associé $G(\sigma)^E$, qui est encore un faisceau de groupes ; de la caractérisation fonctorielle des fibrés associés (n° 10) résulte aussitôt que $G(\sigma)^E$ s'identifie au faisceau des germes d'automorphismes de E (E muni de sa structure à faisceau structural G). Soit φ le fibré à faisceau d'opérateurs G tel que E soit un fibré de type (φ, G), soit ψ un fibré (sans structure supplémentaire) localement isomorphe à φ ; alors on constate aussitôt qu'il revient au même de se donner sur ψ une structure de type (φ, G) ou une structure de type $(E, G(\sigma)^E)$. Cela implique que les ensembles $\mathrm{H}^1(X, G)$ et $\mathrm{H}^1(X, G(\sigma)^E)$ sont en correspondance biunivoque. D'ailleurs à l'élément neutre de deuxième correspond l'élément e du premier classe du fibré E à faisceau structural G.

Soit maintenant F un sous-faisceau de groupes de G, alors F agit sur lui-même et sur G par automorphismes intérieurs, et ces opérations passent au quotient $H = G/F$ où F alors *trivialement* ; désignons maintenant par $F(\sigma)$, $G(\sigma)$, $H(\sigma)$ les faisceaux F, G, H considérés comme faisceaux avec faisceau de germes d'automorphismes F. Soit E un fibré à faisceau structural F, soit E' le faisceau associé à faisceau structural G. Tordant la suite exacte $e \longrightarrow F(\sigma) \longrightarrow G(\sigma) \longrightarrow H(\sigma) \longrightarrow e$ par E on obtient une suite exacte de faisceaux

$$e \longrightarrow F(\sigma)^E \longrightarrow G(\sigma)^E \longrightarrow H(\sigma)^E \longrightarrow e$$

Écrivons maintenant la suite exacte de cohomologie correspondante, en notant que $G(\sigma)^E$ est canoniquement isomorphe à $G(\sigma)^{E'}$ tel qu'il a été défini au début de ce n°, et qu'on a donc des identifications canoniques $\mathrm{H}^0(X, F(\sigma)^E) = \operatorname{Aut} E$, $\mathrm{H}^1(X, F(\sigma)^E) = \mathrm{H}^1(X, F)$, $\mathrm{H}^0(X, G(\sigma)^E) = \operatorname{Aut} E'$, $\mathrm{H}^1(X, G(\sigma)^E) = \mathrm{H}^1(X, G)$: $e \longrightarrow \operatorname{Aut} E \longrightarrow \operatorname{Aut} E' \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, H) \xrightarrow{\partial^E} \mathrm{H}^1(X, F) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, G)$. On notera que l'opérateur cobord $\mathrm{H}^0(X, H) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, F)$ obtenu a été noté ∂^E car il dépend de E de façon essentielle. La suite d'applications ci-dessus est exacte, pourvu qu'on prenne comme élément unité dans $\mathrm{H}^1(X, F)$ et $\mathrm{H}^1(X, G)$ la classe c de E resp. la classe c' de E'. On voit ainsi que l'ensemble des éléments de $\mathrm{H}^1(X, F)$ dont l'image dans $\mathrm{H}^1(X, G)$ est la même que celle de c, savoir c', est l'image de $\mathrm{H}^0(X, H)$ par ∂^E, i.e. s'identifie au quotient de $\mathrm{H}^0(X, H)$ par le groupe de permutations $\operatorname{Aut} E'$.

Supposons maintenant que F soit distingué dans G, alors faisant opérer G dans lui-même par automorphismes intérieurs, F est stable, et ces opérations passent au quotient, désignons maintenant par $F(\sigma)$, $G(\sigma)$ et $H(\sigma)$ les faisceaux de groupes F, G, H munis de G comme faisceau de germes d'automorphismes. Soit E' un fibré à faisceau structural G, E'' le fibré associé à faisceau structural H, on obtient alors une suite exacte de faisceaux de groupes

$$e \longrightarrow F(\sigma)^{E'} \longrightarrow G(\sigma)^{E'} \longrightarrow H(\sigma)^{E'} \longrightarrow e$$

d'ailleurs on a canoniquement $H(\sigma)^{E'} = H(\sigma)^{E''}$, où le deuxième membre a la signification expliquée au début de ce n°. Ceci permet donc d'interpréter les H^0 et H^1 de X à coefficients dans $G(\sigma)^{E'}$ et dans $H(\sigma)^{E'}$. Quant à $\mathrm{H}^0(X, F(\sigma)^{E'})$, c'est un sous-groupe distingué de $\mathrm{H}^0(X, G(\sigma)^{E'}) = \mathrm{Aut}\, E'$, dont les éléments seront appelés les *F-automorphismes* du fibré E' à faisceau structural G (F étant un sous-faisceau *distingué* quelconque de ce faisceau structural). (Exemple parmi les automorphismes d'un fibré orthogonal, on distingue ceux qui conservent l'orientation...). On obtient alors la suite exacte de cohomologie suivante : $e \longrightarrow \mathrm{Aut}_F(E') \longrightarrow \mathrm{Aut}\, E' \longrightarrow \mathrm{Aut}\, E'' \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, F(\sigma)^{E'}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, G) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, H)$ où $\mathrm{Aut}_F\, E'$ est le groupe des F-automorphismes de E', et où on prend comme éléments neutres dans $\mathrm{H}^1(X, G)$ et $\mathrm{H}^1(X, H)$, les classes c' et c'' de E' et E'' respectivement. Cette suite exacte permet donc d'identifier l'ensemble des éléments de $\mathrm{H}^1(X, G)$ ayant même image c'' que c' dans $\mathrm{H}^1(X, H)$ à l'ensemble quotient de $\mathrm{H}^1(X, F(\sigma)^{E'})$ par le groupe d'opérateurs $\mathrm{Aut}\, E''$.

Pour finir, remarquons que le cas où G est le produit semi-direct de F et de H mérite d'être considéré spécialement (ça n'a pas été fait dans le rapport Kansas). Alors pour tout $c'' \in \mathrm{H}^1(X, H)$ existe un $c' \in \mathrm{H}^1(X, G)$ et un seul dont l'image dans $\mathrm{H}^1(X, H)$ soit c'', et pour lequel on puisse réduire le faisceau structural à $H \subset G$, c' est l'image de c'' dans l'application $\mathrm{H}^1(X, H) \longrightarrow \mathrm{H}^1(X, G)$ déduite de l'immersion $H \longrightarrow G$. Soit maintenant E' un fibré quelconque de faisceau structural G, E'' le fibré associé de faisceau structural H, E'_0 le fibré associé à E'' et l'homomorphisme d'injection $H \longrightarrow G$, soient $c', c'_0 \in \mathrm{H}^1(X, G)$ les classes de E' et E'_0, et $c'' \in \mathrm{H}^1(X, H)$ la classe de E''. Appliquons ce qui précède à E'_0 (au lieu de E'), dont le fibré associé à faisceau H est d'ailleurs encore E''. L'ensemble des classes de fibrés à faisceau G dont l'image dans $\mathrm{H}^1(X, H)$ est c'' s'identifie au quotient de $\mathrm{H}^1(X, F(\sigma)^{E'_0})$ par le groupe de permutations $\mathrm{Aut}\, E''$. D'ailleurs, le faisceau $G(\sigma)^{E'_0}$ sera encore produit semi-direct des faisceaux $F(\sigma)^{E'_0}$ et $H(\sigma)^{E'_0}$, donc l'homomorphisme $\mathrm{H}^0(X, G(\sigma)^{E'_0}) \longrightarrow \mathrm{H}^0(X, H(\sigma)^{E'_0})$ est surjectif. Donc pour définir l'opération dans $\mathrm{H}^1(X, F(\sigma)^{E'_0})$ définie par une $u \in$

$\mathrm{H}^0(X, H(\sigma)^{E'_0}) = \mathrm{Aut}\, E''$, on relève d'abord u en une section de $G(\sigma)^{E'_0}$ en considérant u comme une section de ce dernier faisceau (grâce à l'immersion naturelle de $\mathrm{H}(\sigma)^{E'_0}$ dans $G(\sigma)^{E'_0}$), puis on considère l'automorphisme de $F(\sigma)^{E'_0}$ défini par u via automorphismes intérieurs, et la permutation correspondante dans $\mathrm{H}^1(X, F(\sigma)^{E'_0})$. En particulier, la classe c' du fibré de départ E' est donc définie par une trajectoire de $\mathrm{H}^1(X, F(\sigma)^{E'})$ sous le groupe $\mathrm{Aut}\, E''$. Cependant, on peut aller plus loin et définir *canoniquement* un fibré principal $\varphi(E')$ à faisceau structural $F(\sigma)^{E'_0}$, dont la classe $c = \varphi(c')$ a pour image c' : pour ceci, on fait opérer G sur F par "transformations affines", $\sigma(fh)f' = f\sigma(h)f'(\sigma(h)f' = hf'h^{-1})$ et on remarque que $F(\sigma)^{E'}$ peut être muni de façon naturelle d'une structure de faisceau principal sous $F(\sigma)^{E'_0}$. En particulier, on voit que dans E', on peut réduire le faisceau structural à H si et seulement si $\varphi(c')$ est l'élément neutre de $\mathrm{H}^1(X, F(\sigma)^{E'_0})$.

RÉFÉRENCES

[1] Grothendieck, Alexander — *A general theory of Fibre spaces with Structure Sheaf*. University of Kansas, Department of Mathematics. May, 1958 (National Science Foundation Research Project on Geometry of Function Space, Report no 4). Second Edition

[2] Chevalley, Claude — *Espaces fibrés*. Rédaction Bourbaki No. 215. Unpublished note. May, 1955. Fonds du secrétariat Bourbaki (ENS-ULM)