K-Theory 3: 199–204, 1989

Rapport au comité Fields sur les travaux de A. Grothendieck

par JEAN-PIERRE SERRE (1965)★

Le présent rapport est limité à trois thèmes: evt, Riemann–Roch, schémas. Pour aller plus vite, j'ai laissé de côté les travaux de géométrie algébrique [10, 12–14] et d'algèbre homologique [7–9]; il me faut tout de même mentionner la grande influence qu'a eu [8] sur le développement de la théorie.

1. EVT (Espaces Vectoriels Topologiques) – période: 1952–1955

L'une des idées directrices★★ de Grothendieck dans ce domaine a été d' "expliquer" les phénomènes d'evt rencontrés par L. Schwartz en théorie des Distributions. Dans le travail [2], il montre que la catégorie des (LF), introduite par Dieudonné-Schwartz, possède quantité de propriétés pathologiques; parmi les résultats positifs qu'il obtient, on peut citer le théorème disant que le bidual d'un espace de Fréchet est un espace de Fréchet (ce n'est nullement trivial), et l'introduction de deux nouveaux types d'espaces, les espaces (DF) et les espaces "de Schwartz".

C'est dans la thèse [1] que sont faits les progrès décisifs. Il y définit deux produits tensoriels complétés $E \hat{\otimes}_\varepsilon F$ et $E \hat{\otimes}_\pi F$ d'evt E et F. Ces deux produits tensoriels, distincts en général, coïncident lorsque E appartient à une nouvelle catégorie d'evt, celle des *espaces nucléaires.* Il montre que cette catégorie possède des propriétés de stabilité remarquables. De plus la plupart des espaces fonctionnels que l'on rencontre en théorie des distributions sont nucléaires; ce fait constitue une forme particulièrement commode du "théorème des noyaux" de Schwartz.

Parmi les idées nouvelles introduites par Grothendieck en théorie des evt, on peut citer:

(a) La technique des espaces de Banach E_V et E_A associés à un evt E et à un voisinage de 0 convexe V (resp. à une partie bornée convexe A) de E.

(b) L'utilisation des espaces L^p et $C(K)$ dans la théorie générale des evt (notamment pour l'étude des applications intégrales ou nucléaires).

★*Editor's note* (June 1989): Professor Serre was a member of the Fields Committee in 185–1966. The current article is his original report of 1965 to the committee concerning the work of A. Grothendieck. Professor Grothendieck received a Fields Medal in 1966, together with Michael Atiyah, Paul Cohen and Stephen Smale.

★★Cette première partie du rapport a été rédigée avec l'aide de J. Dieudonné.

(c) L'application des produits tensoriels complétés à une "formule de Künneth" vectorielle-topologique (cf. séminaire Schwartz 53–54, séminaire consacré d'ailleurs entièrement à la thèse de Grothendieck). Cette formule permet de ramener certains problèmes de dimension > 1 à ceux de dimension 1. Cette technique a été utilisée par Grothendieck lui-même (trivialité de la d''-cohomologie locale) et par R. Bott (Annals, 1957).

(d) Les résultats "fins" de la théorie métrique des produits tensoriels d'espaces de Banach, exposés dans [3].

2. Le Théorème de Riemann–Roch – période: 1957

En 1957, on connaissait (depuis déjà quelques années) un "théorème de Riemann-Roch" pour les variétés algébriques complexes: si X est une telle variété, supposée projective et non singulière, et si F est un faisceau analytique localement libre sur X, la caractéristique d'Euler–Poincaré $\chi(X, F)$ de X relativement à F est égale à un certain polynôme en les invariants numériques de F et de X (classes de Chern). La démonstration de ce théorème, due à Hirzebruch, utilisait des moyens essentiellement transcendants, et en particulier la *théorie du cobordisme* de Thom. On se demandait (avec perplexité) comment l'algébriser (ce qui était nécessaire pour la transporter en caractéristique p).

Or, Grothendieck fait bien plus. Il démontre par voie algébrique un énoncé qui, même sur $\mathbf{C}$, va plus loin que l'énoncé rappelé plus haut. Il introduit tout d'abord la notion, nouvelle à l'époque, de "groupe K" (appelé par d'autres "groupe de Grothendieck"): si X est une variété algébrique, $K(X)$ est le groupe engendré par les classes de faisceaux cohérents sur X, une extension étant identifiée à une somme; en d'autres termes, $K(X)$ est le groupe universel par lequel se factorisent toutes les fonctions additives de faisceaux cohérents. Si $f: X \to Y$ est un morphisme propre de variétés algébriques, on définit (par une somme alternée d'images directes supérieures) une application $f_!: K(X) \to K(Y)$. D'autre part, le caractère de Chern $\mathrm{ch}: K(X) \to H^*(X, \mathbf{Q})$ est défini si X est non singulière (ceci ne vaut que si le corps de base est $\mathbf{C}$ – si l'on veut procéder plus algébriquement, il faut remplacer la cohomologie par l'anneau des classes de cycles). Ceci étant, la formule de Riemann–Roch s'écrit maintenant:

$$f_*(\mathrm{ch}(x) \cdot T(X)) = \mathrm{ch}(f_!(x)) \cdot T(Y), \quad x \in K(X), \tag{RR}$$

où $T(X)$ et $T(Y)$ désignent les "classes de Todd" de X et Y (supposées projectives et non singulières – en fait, Grothendieck a maintenant des cas plus généraux). On retrouve l'énoncé de Hirzebruch en prenant pour Y un espace réduit à un point.

La démonstration★ de (RR) n'a pas été publiée par Grothendieck lui-même: il la

★ *Editor's note* (June 1989): Grothendieck's 1957 manuscript *Classes de faisceaux et théorème de Riemann–Roch* was published in *Théorie des intersections et théorème de Riemann–Roch*, Lecture Notes in Mathematics 225 (1972), pp. 20–77.

réservait pour le Chapitre XI des "Eléments"... Elle est reproduite dans [11]. A côté de difficultés techniques considérables, elle contient deux idées, totalement originales, qui ont eu une grande influence:

(a) La plupart des notions, ou théorèmes, relatifs aux variétés doivent être étendus aux *morphismes*. Ainsi, pour prendre des exemples élémentaires, la notion d'espace compact correspond à celle d'application propre; celle de variété non singulière à celle de morphisme lisse; etc.

(b) La construction de "*groupes K*" permet de concentrer l'essentiel des propriétés d'une catégorie assez compliquée en un objet algébrique, groupe ou anneau, de taille raisonnable. Cette idée a beaucoup frappé topologues et algébristes, qui se sont empressés de l'utiliser pour leurs problèmes; qu'il me suffise de mentionner à ce sujet la "K-théorie" de Atiyah–Hirzebruch et les travaux de Swan sur les représentations des groupes finis.

3. Théorie des schémas – période: depuis 1957

C'est le sujet qui l'occupe, à peu près exclusivement, depuis huit ans. Il a publié:

(a) Un traité général de géométrie algébrique, les "Eléments" [16], écrit avec la collaboration de J. Dieudonné. Ce traité n'est pas achevé: 6 fascicules ont paru, plusieurs autres sont en préparation.

(b) Des séminaires [17–21] contenant une quantité de résultats nouveaux, certains devant d'ailleurs prendre place ultérieurement dans les Eléments.

L'ensemble représente près de 3000 pages. C'est une masse impressionnante, où l'on trouve à la fois des définitions, des résultats triviaux, des idées originales, des théorèmes difficiles. Je vais me borner à en discuter les points les plus saillants.

(i) *Nécessité de l'introduction des schémas*

Elle avait été reconnue avant Grothendieck, et des tentatives partielles avaient été faites, notamment par Nagata et Kaehler. Il s'agissait, *grosso modo*, de débarrasser la géométrie algébrique des hypothèses parasites qui l'encombraient: corps de base, irréductibilité, conditions de finitude. Une telle extension était nécessaire, par exemple pour l'étude des problèmes diophantiens (où l'anneau de base naturel est $\mathbf{Z}$ et non un corps), ou pour celle des variations de structure (un schéma de modules pouvant parfaitement avoir des éléments nilpotents), ou encore pour l'étude des propriétés différentielles (les "points proches" se définissant de la façon la plus commode à l'aide d'algèbres à éléments nilpotents).

Toutefois, exactement comme pour la théorie des Distributions de Schwartz, il fallait donner une base solide à la théorie; même la *définition* à adopter n'était pas claire, celles de Nagata et de Kaehler étant insuffisantes. Il fallait aussi développer suffisamment de propriétés des schémas pour que l'on puisse s'en servir; cela revenait à reprendre tous les fondements de la géométrie algébrique. C'est le rôle des "Eléments".

(ii) *Résultats techniques*

Les Eléments et les Séminaires en contiennent une quantité considérable. Parmi les plus intéressants, je citerai:

(a) Ceux relatifs aux morphismes *plats* (correspondant à la notion topologique de fibration), aux morphismes *lisses* (fibré à fibres non singulières), aux morphismes *étales* (revêtements non ramifiés). Voir [16], Chap. III et Chap. IV.

(b) La théorie des anneaux *excellents* ([16], Chap. IV), où Grothendieck reprend en les précisant des résultats de Zariski et Nagata.

(c) La forme cohomologique du "théorème des fonctions holomorphes" de Zariski ([16], Chap. III).

(d) L'étude de la cohomologie relative et de ses relations avec la notion de profondeur [19].

(iii) *La notion de foncteur représentable*

Elle remplace celle, plus limitée, de "problème universel". Grothendieck s'en sert de façon systématique (et il a été le premier à la faire). Comme il l'a mis en évidence, la plupart des constructions que l'on fait en géométrie algébrique reviennent à montrer qu'un certain foncteur est représentable (ce qui est souvent fort difficile). Exemples: schéma formel de modules, schéma de Hilbert, schéma de Picard.

D'ailleurs, même si un foncteur n'est pas représentable, Grothendieck montre que l'on peut "faire comme si" il l'était: ainsi, on peut définir l'algèbre de Lie d'un foncteur en groupes [21], etc.

(iv) *"Descente" et "Sites"*

La notion de "recollement", familière aux topologues, peut s'appliquer en géométrie algébrique, grâce à la topologie de Zariski. Toutefois la rigidité de cette topologie diminue quelque peu son utilité. C'est ainsi qu'un "revêtement", au sens algébrique du terme, n'est pas localement trivial pour la topologie de Zariski. Pour remédier à cet état de choses, Grothendieck a introduit (cf. [17]) la notion générale de *descente* (par rapport à une famille de morphismes); la "descente fidèlement plate" est particulièrement utile en théorie des schémas: elle englobe comme cas particulier la descente galoisienne classique, ainsi que la descente radicielle utilisée notamment par Cartier.

Poussant cette idée plus loin, Grothendieck introduit la notion de "Topos", ou "Site", qui généralise celle d'espace topologique. L'étude approfondie de la cohomologie correspondante est en cours depuis 2 ou 3 ans (en collaboration avec M. Artin). Elle a déjà abouti à des résultats substantiels: théorèmes de finitude et de dualité, formule de Lefschetz (Verdier), rationalité des fonctions L des variétés sur les corps finis, équations fonctionnelles. Le moment est proche où toutes les ressources de la topologie algébrique classique pourront être appliquées aux variétés de caractéristique p.

(v) *La notion de schéma formel* (cf. [16], Chap. III ainsi que [17]).

C'est l'une des idées les plus originales de Grothendieck. Elle permet de traiter en même temps des situations aussi différentes en apparence que les suivantes:

(a) La suite des voisinages normaux d'ordre $1, 2, \ldots$ d'une variété plongée dans une autre.

(b) La donnée d'un système projectif (V_n) de schémas définis sur les entiers mod p^n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Un théorème (difficile) affirme que, sous certaines conditions de propreté, "formel" équivaut à "algébrique". On a là une méthode permettant de remonter de la caractéristique p à la caractéristique zéro. Grothendieck en a en particulier déduit la structure de la partie première à p du groupe fondamental d'une courbe algébrique, résolvant ainsi un problème classique.

[Voici ce qu'écrivait André Weil, dans "l'Avenir des Mathématiques" (1947) sur ce problème:

... avant d'aborder la détermination des extensions d'un corps de nombres algébriques par leurs propriétés locales, il conviendra peut-être de résoudre le problème analogue, déjà fort difficile, au sujet des fonctions algébriques d'une variable sur un corps de base fini, c'est-à-dire d'étendre à ces fonctions les théorèmes d'existence de Riemann. Pour ne citer qu'un cas particulier, le groupe modulaire, dont la structure détermine les corps de fonctions d'une variable complexe ramifiés en trois points seulement, joue-t-il le même rôle, tout au moins en ce qui concerne les extensions de degré premier à la caractéristique, quand le corps de base est fini? Il n'est pas impossible que toutes les questions de ce genre puissent se traiter par une méthode uniforme, qui permettrait, d'un résultat une fois établi (par exemple par voie topologique) pour la caractéristique 0, de déduire le résultat correspondant pour la caractéristique p; la découverte d'une tel principe constituerait un progrès de la plus grande importance...

On ne saurait mieux dire.]

Conclusion

Les travaux de Grothendieck sont certes difficiles à lire; cela tient à leur côté systématique, et aussi, tout simplement, à leur ampleur. Mais ils constituent une *oeuvre*, d'une puissance et d'une originalité dont il est peu d'exemples. Chaque année voit s'augmenter le nombre des branches des mathématiques qui subissent son influence; c'étaient d'abord la géométrie algébrique, puis la topologie et aussi la géométrie analytique; maintenant, la théorie des groupes de Lie; bientôt, la théorie des nombres.

Le comité Fields doit reconnaître cette oeuvre.

Principales publications de A. GROTHENDIECK

Espaces vectoriels topologiques

1. Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. *Memoirs Am. Math. Soc.*, n° 16, 1955.
2. Sur les espaces (F) et (DF). *Summa Bras. Math.*, 1954.
3. Résumé de la théorie métrique des espaces vectoriels topologiques. *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo*, 1953.
4. Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux. *Amer. J. Math.*, 1952.
5. Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$. *Canadian J. Math.*, 1953.
6. La théorie de Fredholm. *Bull. Soc. Math. France*, 1956.

Algèbre homologique, faisceaux

7. A general theory of fibre spaces with structure sheaf. Univ. Kansas, 1955.
8. Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. J.*, 1957.
9. Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux. *Bull. Soc. Math. France*, 1956.

Géométrie algébrique (schémas exclus)

10. Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann. *Amer. J. Math.*, 1957.
11. Le théorème de Riemann–Roch (rédigé par A. Borel et J-P. Serre). *Bull. Soc. Math. France*, 1958.
12. La théorie des classes de Chern. *Bull. Soc. Math. France*, 1958.
13. Sur une note de Mattuck–Tate. *J. Crelle*, 1958.
14. On the De Rham cohomology of algebraic varieties. A paraître.

Géométrie algébrique (schémas)

15. The cohomology theory of abstract algebraic varieties. *Proc. Int. Congress*, 1958.
16. Eléments de Géométrie Algébrique (rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné). *Publ. Math. IHES*, 1960–... (6 fascicules parus, totalisant 1000 pages).
17. Fondements de la Géométrie Algébrique. Extraits du sém. Bourbaki, 1962.
18. Séminaire de Géométrie Algébrique, IHES, 1961.
19. Séminaire de Géométrie Algébrique, IHES, 1962.
20. Séminaire de Géométrie Algébrique, IHES, 1963 (en collaboration avec M. Demazure).
21. Séminaire de Géométrie Algébrique, IHES, 1964.

Géométrie analytique

22. Techniques de construction en géométrie analytique. *Sém. H. Cartan*, **13**, 1960/61, exposés 7 à 17.