Archives
Grothendieck Sept 59

§ 2 . Morphismes affines .

Les résultats de ce paragraphe sont les contreparties "globales" de ceux du chap. I, § 1 ; ils ne sont donc pas essentiellement nouveaux et fournissent simplement un langage commode pour la suite.

1 . Compléments sur les images directes de faisceaux de modules .

Soient X un S-préschéma , $f : X \to S$ son morphisme structural ; on sait (chap. 0, § 2, n°5) que l'image directe $f_*(\mathcal{O}_X)$ est une $\mathcal{O}_S$-Algèbre , que nous noterons $\underline{A}(X)$; de même , pour tout faisceau algébrique F sur X , nous écrirons $\underline{A}(F)$ l'image directe $f_*(F)$, qui est un $\underline{A}(X)$-Module (et non seulement un $\mathcal{O}_S$-Module) .

Soient Y un second S-préschéma , $g : Y \to S$ son morphisme structural , $u : X \to Y$ un S-morphisme ; on a donc le diagramme commutatif

(1)
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

On a par définition $u=(\psi,\theta)$, où $\theta : \mathcal{O}_Y \to u_*(\mathcal{O}_X) = \psi_*(\mathcal{O}_X)$ est un homomorphisme de faisceaux d'anneaux : on en déduit (chap. 0, § 2, n°5) un homomorphisme de $\mathcal{O}_S$-Algèbres $g_*(\theta) : g_*(\mathcal{O}_Y) \to g_*(u_*(\mathcal{O}_X))$, et comme $g_*(u_*(\mathcal{O}_X)) = f_*(\mathcal{O}_X)$ d'après (1) , on obtient ainsi un homomorphisme $\underline{A}(u) : \underline{A}(Y) \to \underline{A}(X)$ de $\mathcal{O}_S$-Algèbres .

Soient maintenant F un faisceau algébrique sur X , G un faisceau algébrique sur Y , et $v : G \to u_*(F)$ un homomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-Modules : $g_*(v) : g_*(G) \to g_*(u_*(F)) = f_*(F)$ est alors non seulement un homomorphisme de $\mathcal{O}_S$-Modules , que nous noterons $\underline{A}(v)$, mais encore le couple $(\underline{A}(u), \underline{A}(v))$ constitue un di-homomorphisme du $\underline{A}(Y)$-Module $\underline{A}(G)$ dans le $\underline{A}(X)$-Module $\underline{A}(F)$.

Le préschéma S étant fixé , on peut considérer les couples (X,F) , où X est un S-préschéma et F un faisceau algébrique sur X , comme formant une catégorie , en définissant un morphisme $(X,F) \to (Y,G)$ comme un couple (u,v) , où $u : X \to Y$ est un S-morphisme et $v : G \to u_*(F)$ un $\mathcal{O}_Y$-homomorphisme . On peut alors dire que $(\underline{A}(X), \underline{A}(F))$ est un fonc-

<u>teur contravariant</u> à valeurs dans la catégorie dont les objets sont les couples formés d'une O_S-Algèbre et d'un Module sur cette Algèbre et les morphismes les di-homomorphismes.

Dans ce qui suit, nous dirons pour abréger que le S-préschéma X est <u>adéquat</u> (ou S-adéquat) lorsque pour tout faisceau quasi-cohérent F sur X, son image directe $\underline{A}(F)$ est un faisceau quasi-cohérent sur S ; en particulier $\underline{A}(X)$ est alors un faisceau quasi-cohérent sur S. On a vu au § 1, n°1, cor. de la prop.1, des conditions suffisantes pour que X soit S-adéquat.

<u>Proposition 1. - Soient</u> Y <u>un préschéma</u>, $\underline{B}$ <u>une</u> O_Y-<u>Algèbre qui un faisceau quasi-cohérent de</u> O_Y-<u>Modules</u> ; $\underline{B}$ <u>définit sur</u> Y <u>une structure d'espace annelé</u> $(Y,\underline{B})$, <u>et tout</u> $\underline{B}$-<u>Module est muni d'une structure de</u> O_Y-<u>Module. Pour qu'un</u> $\underline{B}$-<u>Module</u> F <u>soit un faisceau quasi-cohérent sur l'espace annelé</u> $(Y,\underline{B})$, <u>il faut et il suffit que</u> F <u>soit quasi-cohérent sur le préschéma</u> (Y,O_Y).

La condition est nécessaire : en effet, si F est quasi-cohérent sur $(Y,\underline{B})$, comme la question est locale, on peut supposer que F, c'est le conoyau d'un $\underline{B}$-homomorphisme $\underline{B}^{(I)} \to \underline{B}^{(J)}$; comme cet homomorphisme est aussi un O_Y-homomorphisme de O_Y-Modules, et que $\underline{B}^{(I)}$ et $\underline{B}^{(J)}$ sont quasi-cohérents sur (Y,O_Y), puisqu'il en est ainsi de $\underline{B}$ (I,1,3,cor.4 du th.1), F est quasi-cohérent sur (Y,O_Y) (I,1,3, cor.4 du th.1).

La condition est suffisante ; on peut en effet se borner au cas où Y est un schéma affine d'anneau A ; alors on a $\underline{B}=\tilde{B}$, où B est une A-algèbre. En effet, la donnée d'une structure de O_Y-Algèbre sur un O_Y-Module revient à la donnée d'un O_Y-homomorphisme $f : \underline{B} \otimes_{O_Y} \underline{B} \to \underline{B}$ satisfaisant aux conditions d'associativité et de commutativité qui se traduisent par la commutativité des diagrammes

$$\begin{tikzcd} \underline{B}\otimes\underline{B}\otimes\underline{B} \arrow[r, "f\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes f"'] & \underline{B}\otimes\underline{B} \arrow[d, "f"] \\ \underline{B}\otimes\underline{B} \arrow[r, "f"'] & \underline{B} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \underline{B}\otimes\underline{B} \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "\sigma"'] & \\ & \underline{B} \\ \underline{B}\otimes\underline{B} \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

où σ est la symétrie $b\otimes b' \to b'\otimes b$ en chaque point de Y. Notre assertion résulte alors des propriétés fonctorielles de $M \to \tilde{M}$ (I,1,3).

De même, on a $F=\tilde{M}$, où M est un A-module, et la donnée d'une structure de ~~XXXX~~ $\underline{B}$-Module sur F revient à la donnée d'un O_Y-homomorphisme g : $\underline{B} \otimes_{O_Y} \tilde{M} \to \tilde{M}$, avec commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \underline{B}\otimes\underline{B}\otimes\tilde{M} \arrow[r, "1\otimes g"] \arrow[d, "f\otimes 1"'] & \underline{B}\otimes\tilde{M} \arrow[d, "g"] \\ \underline{B}\otimes\tilde{M} \arrow[r, "g"'] & \tilde{M} \end{tikzcd}$$

Donc M est muni d'une structure de ~~XXXXXXX~~ B-module ; on en conclut que M (en tant que B-module) est isomorphe au conoyau d'un B-homomorphisme $B^{(I)} \to B^{(J)}$; en tant que A-module, il est aussi isomorphe au conoyau de cet homomorphisme, donc F est isomorphe au conoyau de l'homomorphisme $\underline{B}^{(I)} \to \underline{B}^{(J)}$, ~~et~~ non seulement en tant que O_Y-Module, mais aussi en tant que $\underline{B}$-Module ; d'où la proposition.

Proposition 2 .- Soient Y un préschéma localement noethérien, $\underline{B}$ une O_Y-algèbre qui est un faisceau quasi-cohérent de O_Y-modules. On suppose que pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage V de y dans Y tel que $\Gamma(V,\underline{B})$ soit une algèbre de type fini sur $\Gamma(V,O_Y)$. Alors $\underline{B}$ est un faisceau cohérent d'anneaux (FAC, I, 2, 15).

On peut de nouveau se limiter au cas où Y est un schéma affine d'anneau noethérien A ; on a vu dans la ~~XXXX~~ démonstration de la prop. 1 que $\underline{B}=\tilde{B}$, où B est une A-algèbre. L'hypothèse permet en outre de supposer que B est une A-algèbre de type fini, et par suite est un ~~XXXX~~ anneau noethérien. Cela étant, il faut prouver que le ~~X~~noyau d'un $\underline{B}$-homomorphisme $\underline{B}^n \to \underline{B}$ est un $\underline{B}$-Module de type fini ; ce noyau est isomorphe à $\tilde{N}$, où N est le noyau de l'homomorphisme correspondant $B^n \to B$; mais comme cet homomorphisme est non seulement un A-homomorphisme, mais aussi un B-homomorphisme, N est un B-sous-module de ~~X~~ B^n, donc un B-module de type fini, ce qui achève la démonstration.

Corollaire .- Sous les hypothèses de la prop. 2, pour qu'un $\underline{B}$-Module $\underline{M}$ soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit un O_Y-Module quasi-cohérent ~~et~~ et un $\underline{B}$-Module de type fini. S'il en est ainsi, et si $\underline{N}$ est un ~~XXXXX~~ sous-$\underline{B}$-Module ou un $\underline{B}$-Module quotient de $\underline{M}$, pour que $\underline{N}$ soit un $\underline{B}$-Module cohérent, il faut et il suffit qu'il soit un

O_Y-module quasi-cohérent .

Les conditions sur $\underline{M}$ sont évidemment nécessaires , compte tenu de la prop.1 ; montrons qu'elles sont suffisantes . On peut se limiter au cas où Y est affine d'anneau noethérien A et où il existe un B-homomorphisme $\underline{B}^n \to \underline{M} \to 0$. On a alors $\underline{B}=\tilde{B}$, $\underline{M}=\tilde{M}$, où B est une A-algèbre de type fini et M un B-module de type fini ; le noyau P de l'homomorphisme $B^n \to M$ est un sous-module de B^n , donc est de type fini . On en conclut que $\underline{M}$ est le conoyau d'un B-homomorphisme $\underline{B}^n \to \underline{B}^n$, et est donc cohérent puisque $\underline{B}$ est un faisceau cohérent d'anneaux (FAC,I,2,15 prop.7). Le même raisonnement montre qu'un sous-B-module de M est de type fini , d'où la seconde partie du corollaire .

2 . Préschémas affines sur un préschéma .

Définition 1 .- On dit qu'un S-préschéma X est affine au-dessus de S s'il existe un recouvrement (S_α) de S par des ouverts affines tels que , pourtout α , le préschéma induit par X sur l'ensemble ouvert $f^{-1}(S_\alpha)$ (f morphisme structural de X) soit affine .

Exemple .- Tout sous-préschéma fermé de S est un S-préschéma affine au-dessus de S (I,3,2,cor.2 de la prop.4).

Remarque .- Un préschéma X affine au-dessus de S n'est pas nécessairement un schéma affine , comme le montre l'exemple X=S . D'autre part, si un schéma affine X est un S-préschéma,il n'est pas nécessairement affine au-dessus de S . Rappelons toutefois que si S est un schéma , un S-préschéma qui est un schéma affine est affine au-dessus de S (I,3,7,cor.3 de la prop.22).

Proposition 3 .- Tout S-préschéma qui est affine au-dessus de S est séparé au-dessus de S .

Cela résulte aussitôt de (I,3,6,cor.2 de la prop.20)et de (I,3,6, prop.19).

Proposition 4 .- Soient X un S-préschéma affine au-dessus de S , f le morphisme structural X $\to$S . Pour tout ouvert U $\subset$ S , $f^{-1}(U)$ est affine au-dessus de U .

Par définition , on est ramené au cas où S est affine et X affine ; alors f est de la forme $({}^a\varphi,\tilde{\varphi})$, où φ est un homomorphisme $A\to B$, en désignant par A et B les anneaux de S et X respectivement . Comme les $D(g)$, où $g\in A$, forment une base de S , on est ramené au cas où $U=D(g)$; mais on sait alors que $f^{-1}(U)=D(\varphi(g))$ (I,1,2,prop.5), d'où la proposition .

<u>Proposition 5 .- Un</u> S-<u>préschéma</u> X <u>qui est affine au-dessus de</u> S <u>est</u> S-<u>adéquat</u> (n°1) .

Cela résulte de la définition et du cor.de la prop.1 du § 1,n°1,compte tenu de la prop.3 .

En particulier , le faisceau d'algèbres $\underline{A}(X)$ (n°1) est alors quasi-cohérent sur S .

<u>Proposition 6 .- Soient</u> X,Y <u>deux</u> S-<u>préschémas ; on suppose</u> X <u>affine au-dessus de</u> S <u>et</u> Y S-<u>adéquat</u> (n°1) . <u>Alors l'application</u> $u\to\underline{A}(u)$ <u>de l'ensemble</u> $\mathrm{Hom}_S(Y,X)$ <u>dans l'ensemble</u> $\mathrm{Hom}(\underline{A}(X),\underline{A}(Y))$ (n°1) <u>est bijective</u> .

Soit (S_α) un recouvrement de S par des ouverts affines tels que $f^{-1}(S_\alpha)$ soit affine (f morphisme structural $X\to S$) . Si g est le morphisme structural $Y\to S$, pour tout S-morphisme $u : Y\to X$, la restriction u_α de u à $g^{-1}(S_\alpha)$ est un S_α-morphisme $g^{-1}(S_\alpha)\to f^{-1}(S_\alpha)$. Inversement , si pour tout α , v_α est un S_α-morphisme $g^{-1}(S_\alpha)\to f^{-1}(S_\alpha)$, tel que les restrictions de v_α et v_β à $g^{-1}(S_\alpha\cap S_\beta)$ coïncident , les v_α sont les restrictions aux S_α d'un S-morphisme $Y\to X$. Cela étant , il y a correspondance biunivoque entre les S_α-morphismes $g^{-1}(S_\alpha)\to$ $\to f^{-1}(S_\alpha)$ et les homomorphismes de $\Gamma(S_\alpha,O_S)$-algèbres $\Gamma(f^{-1}(S_\alpha),\mathcal{O}_X)\to\Gamma(g^{-1}(S_\alpha),\mathcal{O}_Y)$ (I,2,2,prop.3) . Par définition , on a $\Gamma(f^{-1}(S_\alpha),\mathcal{O}_X)=\Gamma(S_\alpha,\underline{A}(X))$ et $\Gamma(g^{-1}(S_\alpha),\mathcal{O}_Y)=\Gamma(S_\alpha,\underline{A}(Y))$; comme $\underline{A}(X)$ et $\underline{A}(Y)$ sont des O_S-modules quasi-cohérents (en vertu de l'hypothèse et de la prop.5) , à tout $\Gamma(S,O_S)$ homomorphisme $\Gamma(S_\alpha,\underline{A}(X)) \to \Gamma(S_\alpha,\underline{A}(Y))$ correspond canoniquement un homomorphisme de O_S-Modules $\underline{A}(X)|S_\alpha \to \underline{A}(Y)|S_\alpha$ et réciproquement (I,1,3,cor.2 du th.1) ; en outre , comme la propriété d'être un homomorphisme d'anneaux se traduit par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(S_\alpha,\underline{A}(X)) \otimes_{\Gamma(S_\alpha,O_S)} \Gamma(S_\alpha,\underline{A}(X)) & \to & \Gamma(S_\alpha,\underline{A}(Y)) \otimes_{\Gamma(S_\alpha,O_S)} \Gamma(S_\alpha,\underline{A}(Y)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Gamma(S_\alpha,\underline{A}(X)) & \longrightarrow & \Gamma(S_\alpha,\underline{A}(Y))
\end{array}$$

les homomorphismes correspondants de O_S-Modules rendent le diagramme correspondant commutatif (I,1,2,cor.6 du th.1) et par suite sont des homomorphismes de O_S-Algèbres . Il y a donc correspondance biunivoque entre les S-morphismes $Y \to X$ et les familles (w_α) d'homomorphismes de O_S-Algèbres $\underline{A}(X)|S_\alpha \to \underline{A}(Y)|S_\alpha$ telles que w_α et w_β coïncident dans $S_\alpha \cap S_\beta$; mais ces familles correspondent biunivoquement aux homomorphismes de S-Algèbres $\underline{A}(X) \to \underline{A}(Y)$, ce qui achève la démonstration .

<u>Corollaire .- Soient</u> X,Y <u>deux</u> S-<u>préschémas qui sont affines au-dessus de</u> S . <u>Alors l'application</u> $u \to \underline{A}(u)$ <u>de</u> $\mathrm{Hom}_S(Y,X)$ <u>dans</u> $\mathrm{Hom}(\underline{A}(X),\underline{A}(Y))$ <u>est bijective , et pour que u soit un isomorphisme , il faut et il suffit que</u> $\underline{A}(u)$ <u>le soit</u> .

Cela résulte des prop.5 et 6 .

<u>3 . Préschéma affine au-dessus de S associé à une O_S-Algèbre .</u>

<u>Proposition 7 .- Pour toute</u> O_S-<u>Algèbre quasi-cohérente</u> $\underline{B}$, <u>il existe un préschéma</u> X <u>affine au-dessus de</u> S , <u>et un seul à un</u> S-<u>isomorphisme près , tel que</u> $\underline{A}(X)=\underline{B}$.

Pour tout ouvert affine $U \subset S$, soit X_U le préschéma $\mathrm{Spec}(\Gamma(U,\underline{B}))$; comme $\Gamma(U,\underline{B})$ est une $\Gamma(S,O_S)$-algèbre , X_U est un S-préschéma (I,?,3) ; comme $\underline{B}$ est quasi-cohérent , la O_S-Algèbre $\underline{A}(X_U)$ s'identifie à

$\underline{B}|U$ (I,1,3,th.1 et I,1,6) . Soit V un second ouvert affine de S , et soit $X_{U,V}$ le préschéma induit par X_U sur l'image réciproque de $U\cap V$ par le morphisme structural $f_U : X_U \to S$; $X_{U,V}$ et $X_{V,U}$ sont affines sur $U\cap V$ (n°2, prop.4) , et par définition , $\underline{A}(X_{U,V})$ et $\underline{A}(X_{V,U})$ s'identifient canoniquement à $\underline{B}|(U\cap V)$. Donc (n°2, prop.6) , il y a un S-isomorphisme canonique $\theta_{U,V} : X_{V,U} \to X_{U,V}$; en outre , si W est un troisième ouvert affine de S , et si on désigne par $\theta'_{U,V}$, $\theta'_{V,W}$ et $\theta'_{W,U}$ les restrictions de $\theta_{U,V}$, $\theta_{V,W}$ et $\theta_{W,U}$ aux images réciproques de $U\cap V\cap W$ dans X_V, X_W et X_U respectivement par les morphismes structuraux , on a $\theta'_{U,V}\circ\theta'_{V,W}\circ\theta'_{W,U}=1$. Il existe donc un préschéma X , un recouvrement (T_U) de X par des ouverts affines , et pour chaque U un isomorphisme φ_U de X_U sur le préschéma induit T_U , de sorte que φ_U applique $f_U^{-1}(U\cap V)$ sur $T_U\cap T_V$ et que l'on ait $\theta_{U,V}=\varphi_U^{-1}\circ\varphi_V$ (I,3,8) . Le morphisme $f_U\circ\varphi_U^{-1}$ fait de T_U un S-préschéma , et les morphismes g_U et g_V coïncident dans $T_U\cap T_V$, donc X est un S-préschéma . Il est clair que X est affine au-dessus de S et que $\underline{A}(T_U)=\underline{B}|U$, donc $\underline{A}(X)=\underline{B}$. L'unicité à isomorphisme près résulte aussitôt de la prop.6 du n°2 .

On dit que le préschéma X ainsi défini est <u>associé à la O_S-Algèbre $\underline{B}$</u> .

<u>Corollaire 1- Soit</u> X <u>un préschéma affine au-dessus de</u> S , f : X → S <u>le morphisme structural . Pour tout ouvert affine</u> $U\subset S$, <u>le préschéma induit sur</u> $f^{-1}(U)$ <u>est un schéma affine</u> .

Comme on peut supposer X associé à une O_S-Algèbre , le corollaire résulte de la construction de X décrite dans la démonstration précédente .

<u>Corollaire 2 .- Si</u> S <u>est un schéma affine , tout préschéma affine au-dessus de</u> S <u>est un schéma affine</u> .

<u>Corollaire 3 .- Soient</u> X <u>un préschéma affine au-dessus de</u> S , X'

un préschéma affine au-dessus de X ; alors X' est affine au-dessus de S .

On est aussitôt ramené à démontrer que si on suppose en outre que S est un schéma affine , alors X' est un schéma affine ; mais cela résulte du cor.2 .

Soit X un préschéma affine au-dessus de S . Pour définir un préschéma X' affine au-dessus de X , il revient au même , d'après le cor.3 de la prop.7 , de se donner un préschéma X' affine au-dessus de S , et un S-morphisme (g) X' → X ; en d'autres termes (prop.7) , cela revient à se donner une O_S-Algèbre quasi-cohérente B'=$\underline{A}$(X') et un homomorphisme $\underline{A}$(X) → B' de O_S-Algèbres (que l'on peut envisager aussi comme définissant sur B' une structure de B-Algèbre) . D'ailleurs , si f est le morphisme structural X → S , on a $B'=f_*(g_*(O_{X'}))$, puisque $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$.

4 . Faisceaux quasi-cohérents sur un préschéma affine au-dessus de S.

Nous laissons au lecteur les démonstrations des propositions suivantes , qui sont tout à fait analogues à celles des prop.6 et 7 respectivement :

Proposition 8 .- Soient X,Y deux S-préschémas ; on suppose X affine au-dessus de S , et Y S-adéquat (n°1) . Soit F (resp. G) un O_X-Module (resp. un O_Y-Module) quasi-cohérent . Alors l'application (u,v) → → ($\underline{A}$(u), $\underline{A}$(v)) de l'ensemble des morphismes (Y,G) → (X,F) dans l'ensemble des di-homomorphismes ($\underline{A}$(X), $\underline{A}$(F)) → ($\underline{A}$(Y), $\underline{A}$(G)) (n°1) est bijective .

Proposition 9 .- Pour tout couple (B,M) formé d'une O_S-Algèbre quasi-cohérente B et d'un B-Module M quasi-cohérent (en tant que O_S-Module ou en tant que B-Module , ce qui est équivalent (n°1, prop. 1)) , il existe un couple (X,F) formé d'un préschéma X affine au-dessus de S et d'un O_X-Module quasi-cohérent F , tels que $\underline{A}$(X)=B et $\underline{A}$(F)=M ; en outre ce couple est unique à un isomorphisme près .

Lemme 1 .- Soient $\underline{B}$ une O_S-Algèbre quasi-cohérente, $\underline{M}$, $\underline{N}$ deux $\underline{B}$-Modules quasi-cohérents. Alors le $\underline{B}$-Module $\underline{M}\otimes_{\underline{B}}\underline{N}$ est quasi-cohérent. Il en est de même du $\underline{B}$-Module $\underline{Hom}_{\underline{B}}(\underline{M},\underline{N})$ lorsque pour tout $s\in S$, il existe un voisinage U de s et deux entiers p,q tels que $\underline{M}|U$ soit isomorphe au conoyau d'un $(\underline{B}|U)$-homomorphisme $(\underline{B}|U)^p \to (\underline{B}|U)^q$.

En vertu de la prop.1 du n°1, il revient au même de prouver que $\underline{M}\otimes_{\underline{B}}\underline{N}$ et $\underline{Hom}_{\underline{B}}(\underline{M},\underline{N})$ sont quasi-cohérents en tant que O_S-Modules. On peut donc supposer S affine d'anneau A, avec $\underline{B}=\tilde{B}$, $\underline{M}=\tilde{M}$, $\underline{N}=\tilde{N}$, où B est une A-algèbre, M et N des B-modules. Si φ est l'homomorphisme $A\to B$, on voit en raisonnant comme dans I,1,3, cor.6 du th.1, que tout revient à prouver que, pour tout élément $f\in A$, si on pose $f'=\varphi(f)$, le A_f-module $((M\otimes_B N)_{[\varphi]})_f$ est isomorphe à $(M_{f'}\otimes_{B_{f'}} N_{f'})_{[\varphi f]}$, et (lorsque M est conoyau d'un homomorphisme $B^p\to B^q$) que $((Hom_B(M,N))_{[\varphi]})_f$ est isomorphe à $(Hom_{B_{f'}}(M_{f'},N_{f'}))_{[\varphi f]}$; mais cela a été vu au chap.0, § 1, n°5.7

Proposition 10 .- Soient Y un préschéma affine au-dessus de S, X,X' deux préschémas affines au-dessus de Y (donc aussi au-dessus de S (cor.3 de la prop.7)). Soient $\underline{B}$, $\underline{A}$, $\underline{A}'$ les O_S-Algèbres correspondant à Y,X et X' respectivement. Alors $X\times_Y X'$ est affine au-dessus de Y (donc de S), et la O_S-Algèbre correspondante est $\underline{A}\otimes_{\underline{B}}\underline{A}'$.

En vertu du lemme 1, $\underline{A}\otimes_{\underline{B}}\underline{A}'$ est une O_S-Algèbre quasi-cohérente, donc correspond à un préschéma Z affine au-dessus de S (n°3, prop.7) ; en outre, les $\underline{B}$-homomorphismes $\underline{A}\to \underline{A}\otimes_{\underline{B}}\underline{A}'$ et $\underline{A}'\to \underline{A}\otimes_{\underline{B}}\underline{A}'$ correspondent à des Y-morphismes $Z\to X$ et $Z\to X'$ /(prop 6). Pour voir que le triplet formé de Z et de ces deux morphismes est un produit $X\times_Y X'$, on peut se borner au cas où S est un schéma affine d'anneau C (I,2,4, lemme 4). Mais alors Y,X et X' sont des schémas affines (n°3, cor.2 de la prop.7) dont les anneaux B,A,A' sont des C-algèbres telles que $\underline{B}=\tilde{B}$, $\underline{A}=\tilde{A}$, $\underline{A}'=\tilde{A}'$. La démonstration du lemme 1 montre alors que $\underline{A}\otimes_{\underline{B}}\underline{A}'=(A\otimes_B A')^{\sim}$, donc l'anneau du schéma affine Z s'identifie à $A\otimes_B A'$, et les morphismes $Z\to X$, $Z\to X'$ sont les morphismes $\check{u},\check{v}$ correspondant aux homomorphismes $u': A\to A\otimes_B A'$, $v': A'\to A\otimes_B A'$. La proposition résulte alors de I,2,4,prop.6 .

Corollaire .- Soit F (resp. F') un O_X-module (resp. un $O_{X'}$-module) quasi-cohérent ; on a $\underline{A}(F\otimes_Y F')=\underline{A}(F)\otimes_{\underline{A}(Y)}\underline{A}(F')$.

On sait que $F\otimes_Y F'$ est quasi-cohérent sur $X\times_Y X'$ (§ 1,n°1); on se ramène aussitôt au cas où S (et par suite $Y,X,X',X\times_Y X'$) sont des schémas affines , et où ~~XXXXXXXXXXXXXXXXXXX~~ $F=\tilde{M}$, $F'=\tilde{M}'$, M (resp. M') étant un A-module (resp. un A'-module) , avec les notations de la démonstration de la prop.10 . Alors $F\otimes_Y F'$ s'identifie au faisceau associé au $(A\otimes_B A')$-module $M\otimes_B M'$ (§ 1,n°1,prop.7) , d'où ~~XX~~ le corollaire.

En particulier , lorsque $X=X'=Y$ (X étant affine au-dessus de S , on voit que si F,G sont deux O_X-modules quasi-cohérents , on a $\underline{A}(F\otimes_{O_X} G)=\underline{A}(F)\otimes_{\underline{A}(X)}\underline{A}(G)$. Si de plus pour tout $x\in X$, il y a un voisinage V de x et deux entiers p,q tels que F|V soit isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $O_X^p|V\to O_X^q|V$, on voit comme dans la démonstration du lemme 1 que $\underline{A}(\underline{\mathrm{Hom}}_X(F,G))=\underline{\mathrm{Hom}}_{\underline{A}(X)}(\underline{A}(F),\underline{A}(G))$.

5 . Changement du préschéma de base .

Proposition 11 .- Soit X un préschéma affine au-dessus de S . Pour toute extension $g: S'\to S$ du préschéma de base , $X'=X^{S'}=X\times_S S'$ est affine au-dessus de S' . On a en outre $\underline{A}(X')=g^*(\underline{A}(X))$.

Pour démontrer la ~~XXXXXXX~~ proposition , on peut se limiter au cas où S et S' sont affines ; ~~XXXX~~ il suffit alors de prouver que X' est un schéma affine . Mais alors X est un schéma affine , et si A,A' et B sont les anneaux de S,S' et X respectivement , on sait que X' est alors un schéma affine d'anneau $A'\otimes_A B$ (I,2,4,prop.6) ; en outre ,on a alors $\underline{A}(X)=\tilde{B}$, et $g^*(\tilde{B})$ est le $\tilde{A}'$-module associé à $A'\otimes_A B$ (I,1,6, prop.8) .

Corollaire 1 .- Sous les hypothèses de la prop.11 , soit f le morphisme structural $X\to S$, f',g' les projections $X'\to S'$, $X'\to X$, de sorte

Archives
Grothendieck - Sept 89

que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ S & \xleftarrow[g]{} & S' \end{array}$$

est commutatif. Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module quasi-cohérent $\mathcal{F}$, il existe un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_{S'}$-Modules

$$u : g^*(f_*(\mathcal{F})) \simeq f'_*(g'^*(\mathcal{F})) .$$

On sait (chap.0, § 2, n°5) que pour définir un homomorphisme $g^*(f_*(\mathcal{F})) \to f'_*(g'^*(\mathcal{F}))$, il revient au même de définir un homomorphisme $f_*(\mathcal{F}) \to g_*(f'_*(g'^*(\mathcal{F}))) = f_*(g'_*(g'^*(\mathcal{F})))$; on prendra l'homomorphisme $f_*(\lambda)$, où λ est l'homomorphisme canonique $\mathcal{F} \to g'_*(g'^*(\mathcal{F}))$ (loc. cit.). Pour prouver qu'il s'agit d'un isomorphisme, on peut, comme dans la prop. 11, se ramener au cas où S et S' sont affines ; on a alors $\mathcal{F} = \tilde{M}$, où M est un B-module, et on constate aussitôt que $g^*(f_*(\mathcal{F}))$ et $f'_*(g'^*(\mathcal{F}))$ sont tous deux égaux au $\mathcal{O}_{S'}$-Module associé au A'-module $A' \otimes_A M$ (M considéré comme A-module), et que u est l'homomorphisme associé à l'identité.

Remarque. - On se gardera de croire que le cor. 1 soit vrai lorsque X n'est pas supposé affine au-dessus de S, même lorsque $S' = \mathrm{Spec}(\mathcal{K}(s))$ ($s \in S$), et que $S' \to S$ est le morphisme canonique (I, 2, 2) - auquel cas X' n'est autre que la fibre $f^{-1}(s)$ (I, 2, 7, prop. 17). En d'autres termes, lorsque X n'est pas affine au-dessus de S, l'opération "image directe de faisceaux quasi-cohérents" ne permute pas à l'opération de "passage aux fibres". Nous verrons cependant au chap. III (§ , n°) un résultat dans ce sens, de nature "asymptotique", valable pour les faisceaux cohérents sur X lorsque f est propre et S noethérien.

Corollaire 2. - Soient X un S-préschéma, S' un préschéma affine au-dessus de S ; alors $X' = X^{S'}$ est un préschéma affine au-dessus de X. Lorsque $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S' = \mathrm{Spec}(A')$ sont affines, X' est associé à la $\mathcal{O}_X$-Algèbre $\mathcal{O}_X \otimes_A A'$ (A et A' étant identifiés à des faisceaux simples sur X).

Il suffit d'intervertir les rôles de X et de S' dans la prop.11 .

6 . Morphismes affines .

Nous dirons qu'un morphisme $f : X \to Y$ de préschémas est affine s'il définit X comme préschéma affine au-dessus de Y . Les propriétés des préschémas affines au-dessus d'un autre se traduisent comme suit dans cette terminologie :

Proposition 12 .- (i) Une immersion fermée est affine .

(ii) Le composé de deux morphismes affines est affine .

(iii) Si $f : X \to Y$ est un S-morphisme affine , $f^{S'} : X^{S'} \to Y^{S'}$ est affine pour toute extension $S' \to S$ de la base .

(iv) Si $f : X \to Y$ et $g : X' \to Y'$ sont deux S-morphismes affines , $f \times_S g : X \times_S X' \to Y \times_S Y'$ est affine .

(v) Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont deux morphismes tels que $g \circ f$ soit affine et g séparé , alors f est affine .

En effet , (i) n'est autre que l'Exemple suivant la déf.1 du n°2 , et (ii) le cor.3 de la prop.7 du n°3 ; (iii) découle de la prop.11 du n°5 , puisque $X^{S'}$ s'identifie au produit $X \times_Y Y^{S'}$ (I,2,5,cor.2 de la prop.9) ; (iv) se déduit de (iii) en factorisant $f \times_S g$ de la façon habituelle $X \times_S X' \to Y \times_S X' \to Y \times_S Y'$, et appliquant (ii) . Enfin , pour démontrer (v) , on peut se ramener au cas où Z est un schéma affine ; alors X est un schéma affine et comme Y est un schéma , (v) n'est autre que la propriété déjà signalée en Remarque suivant la déf.1 du n°2 , que l'on peut aussi énoncer comme

Corollaire .- Si X est un schéma affine et Y un schéma , tout morphisme $X \to Y$ est affine .

7 . Préschémas entiers sur un autre .

Etant donné un anneau A, rappelons qu'une A-algèbre B est dite entière sur A si tout élément de B est racine dans B d'un polynôme unitaire à coefficients dans A ; il revient au même de dire que tout élément de B est contenu dans une sous-algèbre de B qui est un A-module de type fini. Lorsqu'il en est ainsi, la sous-algèbre de B engendré par une partie finie de B est un A-module de type fini ; pour que B soit une algèbre entière et de type fini sur A, il faut et il suffit donc que B soit un A-module de type fini. On notera que dans tout ceci, on ne suppose pas que l'homomorphisme A B définissant la structure de A-algèbre soit injectif.

<u>Définition 2.- Soient</u> X <u>un</u> S-<u>préschéma</u>, f : X→S ~~son~~ <u>morphisme structural. On dit que</u> X <u>est entier au-dessus de</u> S, <u>ou que f est un morphisme entier, s'il existe un recouvrement</u> (S_α) <u>de</u> S <u>par des ouverts affines tels que pour tout</u> α, <u>le préschéma induit</u> $f^{-1}(S_\alpha)$ <u>soit un schéma affine dont l'anneau</u> B_α <u>est une algèbre</u> ~~XXXX~~ <u>entière sur l'anneau</u> A_α <u>de</u> S_α. <u>On dit que</u> X <u>est entier fini</u> (ou simplement <u>fini</u>) <u>au-dessus de</u> S, <u>ou que f est un morphisme entier fini</u> (ou simplement <u>fini</u>) <u>si</u> X <u>est entier sur</u> S <u>et de type fini sur</u> S.

Il est clair que si X est entier au-dessus de S, il est affine au-dessus de S. Pour qu'un préschéma X affine au-dessus de S soit entier (resp. entier fini) ~~XXX~~ au-dessus de S, il faut et il suffit que ~~XXX~~ la O_S-algèbre quasi-cohérente associée $\underline{A}(X)$ soit telle qu'avec les notations de la déf.2, ~~XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX~~ $\Gamma(S_\alpha, \underline{A}(X))$ soit une algèbre entière (resp. entière et de type fini) sur $\Gamma(S_\alpha, O_S)$. Une O_S-Algèbre quasi-cohérente ayant cette propriété est dite <u>entière</u> (resp. <u>entière finie</u>, ou simplement <u>finie</u>) sur O_S si elle possède cette propriété. Se donner un préschéma entier (resp. fini) au-dessus de S revient donc à se donner une O_S-Algèbre quasi-cohérente entière (resp. finie) sur O_S. On notera ~~XXX~~ qu'une O_S-Algèbre quasi-cohérente ~~XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX~~ est finie si et seulement si c'est un O_S-<u>module de type fini</u>.

<u>Proposition 13.- Soit</u> S <u>un préschéma localement noethérien</u>~~t~~. <u>Pour</u> qu'un préschéma X affine ~~XXXXX~~ au-dessus de S soit fini au-dessus de

S , <u>il faut et il suffit que la O_S-algèbre $\underline{A}(X)$ soit cohérente</u> .

D'après la remarque précédente , tout revient à remarquer que si S est localement noethérien , les O_S-modules quasi-cohérents de type fini ne sont autres que les O_S-modules cohérents , ce qui résulte de I,1,5,th.3 .

<u>Proposition 14 .- Soient</u> X <u>un préschéma entier</u> (resp. <u>fini) au-dessus de</u> S , f: X→S <u>le morphisme structural . Alors , pour tout ouvert affine</u> U S , <u>d'anneau</u> A , $f^{-1}(U)$ <u>est un schéma affine dont l'anneau</u> B <u>est une</u> A<u>-algèbre entière</u> (resp. <u>finie) sur</u> A .

On sait déjà (n°3, cor.1 de la prop.7) que $f^{-1}(U)$ est affine . Soit φ l'homomorphisme A B ; par hypothèse , il existe un recouvrement fini de U par des ouverts $D(g_i)$ $(g_i \in A)$ tels que , si on pose $h_i=\varphi(g_i)$, B_{h_i} soit une algèbre entière (resp. finie) sur A_{g_i} . Considérons d'abord le cas où on suppose toutes les B_{h_i} <u>finies</u> sur les A_{g_i} ; autrement dit , en tant que A_{g_i}-module , chaque B_{h_i} admet un système de générateurs fini , qu'on peut supposer de la forme (b_{ij}/h_i^n) , n étant le même pour tous les indices i . Montrons que les b_{ij} forment un système de générateurs de B en tant que A-module . En effet , soit B' le sous-A-module de B engendré par ces éléments . Soit b un élément de B . Par hypothèse , pour chaque i , il existe des $a_{ij} \in A$ et un entier m (qu'on peut supposer indépendant de i) tels que , dans B_{h_i} , on ait $b/1=(\sum_j a_{ij}b_{ij})/h_i^m$; cela entraîne qu'il existe un entier $r \geq m$ tel que pour tout i , on ait $h_i^r b \in B'$. Or , comme les $D(g_i^r)= =D(g_i)$ recouvrent U , l'idéal de A engendré par les g_i^r est égal à A , autrement dit il existe des éléments $a_i \in A$ tels que $\sum_i a_i g_i^r=1$; comme $g_i^r.b=h_i^r b$ par définition , on a $b=\sum_i (a_i g_i^r).b=\sum_i a_i.(h_i^r b)$ B' , d'où notre assertion .

Supposons seulement maintenant chaque B_{h_i} entière sur A_{g_i} . Pour tout $b \in B$, soit C la sous-algèbre de B engendrée par b . Comme , pour tout i , C_{h_i} est l'algèbre sur A_{g_i} engendrée par b/1 dans B_{h_i} , C_{h_i} est par hypothèse un A_{g_i}-module de type fihi , donc le raisonnement précédent prouve que C est un A-module de type fini , ce qui achève la démonstration .

Corollaire .- Si X est un préschéma entier (resp. fini) au-dessus de S , alors , pour tout ouvert $U \subset S$, $f^{-1}(U)$ est entier (resp. fini) au-dessus de U .

Cela résulte de la prop.14 et du faitque les ouverts affines forment une base de S .

Proposition 15 .- (i) Une immersion fermée est finie (et a fortiori entière) .

(ii) Le composé de deux morphismes finis (resp. entiers) est fini (resp. entier) .

(iii) Si $f : X \to Y$ est un S-morphisme fini (resp. entier) , $f^{S'} : X^{S'} \to Y^{S'}$ est fini (resp. entier) pour toute extension $S' \to S$ de la base .

(iv) Si $f : X \to Y$ et $g : X' \to Y'$ sont deux S-morphismes finis (resp. entiers) , il en est de même de $f \times_S g : X \times_S X' \to Y \times_S Y'$.

(v) Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont deux morphismes tels que $g \circ f$ soit fini (resp. entier) et g séparé , alors f est fini (resp. entier) .

Pour démontrer qu'une immersion fermée $X \to S$ est finie , on peut se borner au cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$,et tout revient à remarquer alors qu'un anneau quotient A/I est un A-module monogène . Pour démontrer que le composé de deux morphismes finis (resp. entiers) $X \to Y$,$Y \to Z$ est fini (resp. entier) , on peut encore supposer Z (et par suite X,Y) affines et alors l'assertion équivaut à dire que si B est une A-algèbre finie (resp. entière) , et C une B-algèbre finie (resp. entière) , alors C est une A-algèbre finie (resp. entière). Pour démontrer (iii) ,on peut se borner au cas où S=Y , puisque $X^{S'}$ s'identifie à $X \times_Y Y^{S'}$; on peut en outre supposer $S = \mathrm{Spec}(A)$,$S' = \mathrm{Spec}(A')$; alors X est affine d'anneau B , $X^{S'}$ est affine d'anneau $A' \otimes_A B$, et tout revient à remarquer que si B est une A-algèbre finie (resp. entière), $A'\otimes_A B$ est une A'-algèbre finie (resp. entière). (iv) se déduit de (ii) et (iii) en factorisant : $X\times_S X' \to Y\times_S X' \to Y\times_S Y'$. Enfin, (v) résulte de (i), (ii) et (iv) de la façon habituelle : on factorise $f : X \xrightarrow{\Gamma_f} X\times_Z Y \xrightarrow{p_2} Y$, p_2 s'identifiant à $(g\circ f)\times_Z 1_Y$; d'après (iv), p_2 est fini (resp. entier), et comme Γ_f est une immersion fermée (I,3,7,prop.22), il résulte de (i) que Γ_f est un morphisme fini ; on conclut à l'aide de (ii).

Remarque .- L'hypothèse que g est séparé est essentielle pour la validité de (v) : en effet, si Y n'est pas séparé sur Z, l'identité 1_Y est le morphisme composé $Y \xrightarrow{\Delta_Y} Y\times_Z Y \xrightarrow{p_1} Y$, mais Δ_Y n'est pas un morphisme entier, comme il résulte de la prop.16 qui suit.

Proposition 16 .- Si $f : X \to Y$ est un morphisme entier, pour toute partie fermée Z de X, f(Z) est fermé dans Y.

Comme pour toute partie fermée Z de X, il existe un sous-préschéma de X ayant pour support Z (I,3,4,prop.9), il résulte de la prop.15, (i) et (ii) qu'on peut se borner à prouver que f(X) est fermé dans Y. En vertu de la prop.15 (vi), on peut supposer X et Y réduits ; en outre, si T est le sous-préschéma fermé réduit de Y ayant pour espace de base $\overline{f(X)}$ (I,3,4,prop.9), on sait que f se factorise en $X \xrightarrow{g} T \xrightarrow{j} Y$, où j est le morphisme d'injection (I,3,4, cor. de la prop. 9), et comme j est séparé (I,3,6,prop.16), il résulte de la prop.15 (v) que g est un morphisme entier. On peut donc supposer que f(X) est dense dans Y. Enfin, la question étant locale sur Y, on peut se borner au cas où Y est un spectre premier Spec(A). Alors Y=Spec(B), où B est une A-algèbre entière sur A ; en outre, l'hypothèse que f(X) est dense dans Y et que A n'a pas d'élément nilpotent (I,3,4,prop.8) entraîne que l'homomorphisme $\varphi : A \to B$ est injectif (I,1,2,cor.4 de la prop.5

Dire que dans ces conditions $f(X)=Y$ signifie que tout idéal premier de A est la trace sur A d'un idéal premier de B, ce qui n'est autre que le premier th. de Cohen-Seidenberg (Bourbaki, Alg. comm., chap. V, §)

8. Fibré vectoriel associé à un faisceau de modules.

Soient A un anneau, E un A-module. Rappelons qu'on appelle algèbre symétrique sur E et qu'on note $\underline{S}(E)$ l'algèbre quotient de l'algèbre tensorielle $\underline{T}(E)$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $x\otimes y-y\otimes x$, où x,y parcourent E. L'algèbre $\underline{S}(E)$ est solution du problème universel suivant : si σ est l'application canonique $E\to\underline{S}(E)$ (obtenue par composition de E $T(E)$ et de l'application canonique $\underline{T}(E)\to\underline{S}(E)$), toute application A-linéaire $E\to B$, où B est une A-algèbre commutative, se factorise en $E\xrightarrow{\sigma}\underline{S}(E)\xrightarrow{g}B$, où g est un A-homomorphisme d'algèbres. On déduit aussitôt de cette caractérisation que pour deux A-modules E,F, on a $\underline{S}(E\oplus F)=\underline{S}(E)\otimes\underline{S}(F)$ à un isomorphisme canonique près ; en outre $\underline{S}(E)$ est un foncteur covariant de la catégorie des A-modules dans celle des A-algèbres. Par abus de langage, un produit $\sigma(x_1)\sigma(x_2)\ldots\sigma(x_n)$, où les $x_i\in E$, se note souvent $x_1x_2\ldots x_n$ si aucune confusion n'en résulte. L'algèbre $\underline{S}(E)$ est graduée de façon évidente ; l'algèbre $\underline{S}(A)$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre de polynômes à une indéterminée $A[T]$, l'algèbre $\underline{S}(A^n)$ à l'algèbre de polynômes à n indéterminées $A[T_1,\ldots,T_n]$.

Soit φ un homomorphisme d'anneaux $A\to B$. Si F est un B-module, l'application canonique $F\to\underline{S}(F)$ donne une application canonique $F_{[\varphi]}\to\underline{S}(F)_{[\varphi]}$ qui se factorise donc en $F_{[\varphi]}\longrightarrow\underline{S}(F_{[\varphi]})\longrightarrow\underline{S}(F)_{[\varphi]}$; on notera que l'homomorphisme canonique $\underline{S}(F_{[\varphi]})\to\underline{S}(F)_{[\varphi]}$ n'est pas bijectif en général. Si E est un A-module, tout di-homomorphisme $E\to F$ (c'est-à-dire tout homomorphisme $E\to F_{[\varphi]}$) donne donc canoniquement un homomorphisme d'algèbres $\underline{S}(E)\to\underline{S}(F_{[\varphi]})\to\underline{S}(F)_{[\varphi]}$, c'est-à-dire un di-homomorphisme d'algèbres $\underline{S}(E)\to\underline{S}(F)$. Avec les mêmes notations, il résulte aussitôt des définitions et de la propriété analogue pour $\underline{T}(E)$

que pour tout A-module E , $\underline{S}(E\otimes_A B)$ s'identifie canoniquement à l'algèbre $\underline{S}(E)\otimes_A B$.

Enfin , soit R une partie multiplicative de A ; appliquant ce qui précède à l'anneau $B=R^{-1}A$, et se rappelant que $R^{-1}E=E\otimes_A R^{-1}A$, on voit que ~~XXXX~~ l'on a $\underline{S}(R^{-1}E)=R^{-1}\underline{S}(E)$ à un isomorphisme canonique près En outre , si $R'\supset R$ est une seconde partie multiplicative de A , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R^{-1}E & \longrightarrow & \underline{S}(R^{-1}E) \\ \downarrow & & \downarrow \\ R'^{-1}E & \rightarrow & \underline{S}(R'^{-1}E) \end{array}$$

est commutatif .

Cela étant , considérons maintenant un <u>espace annelé</u> $(S,\underline{A})$ ~~XXXX~~ , et soit $\underline{E}$ un ~~XX~~ $\underline{A}$-Module sur ~~XX~~ S . Si , à tout ouvert $U\subset S$, on associe le $\Gamma(U,\underline{A})$-module ~~XXXXXX~~ $\underline{S}(\Gamma(U,\underline{E}))$, on définit ainsi (vu le caractère fonctoriel de $\underline{S}$) un préfaisceau d'algèbres ; on dit que le faisceau associé , que l'on note $\underline{S}(\underline{E})$, est ~~XXXXXXXXXX~~ la <u>$\underline{A}$-Algèbre symétrique</u> du $\underline{A}$-Module $\underline{E}$; il résulte aussitôt de ce qui précède que $\underline{S}(\underline{E})$ est solution d'un problème universel : tout ~~XXXXXXX~~ homomorphisme de $\underline{A}$-Modules $\underline{E}\to\underline{B}$, où $\underline{B}$ est une $\underline{A}$-Algèbre , se factorise en $\underline{E}\to\underline{S}(\underline{E})\to\underline{B}$, la seconde flèche étant un homomorphisme de $\underline{A}$-Algèbres . Il y a donc correspondance biunivoque entre homomorphismes de $\underline{A}$-Modules $\underline{E}\to\underline{B}$ et homomorphismes de $\underline{A}$-Algèbres $\underline{S}(\underline{E})\to\underline{B}$. En particulier , tout homomorphisme ~~XXX~~ $u:\underline{E}\to\underline{F}$ de $\underline{A}$-Modules définit un homomorphisme $\underline{S}(u):\underline{S}(\underline{E})\to\underline{S}(\underline{F})$ de $\underline{A}$-algèbres , et $\underline{S}(\underline{E})$ est donc un foncteur covariant . Si $\underline{E},\underline{F}$ sont deux $\underline{A}$-Modules , $\underline{S}(\underline{E}\oplus\underline{F})$ s'identifie canoniquement à $\underline{S}(\underline{E})\otimes_{\underline{A}}\underline{S}(\underline{F})$, comme le montre la considération des préfaisceaux correspondants .

Soit $(T,\underline{B})$ un second espace annelé , f un morphisme $(S,\underline{A})\to(T,\underline{B})$. Si $\underline{F}$ est un $\underline{B}$-Module , $\underline{S}(f^*(\underline{F}))$ s'identifie à $f^*(\underline{S}(\underline{F}))$; en effet , si $f=(\psi,\theta)$ ~~XXXXXXXXXX ouvert de S , XXXXXXXXXX~~

~~voisinage ouvert de s , S , une section de $\underline{S}(f^*(E))$~~

~~sur U s'identifie au voisinage de chaque point de~~

on a $\underline{S}(f^*(\underline{F}))=\underline{S}(\psi^*(\underline{F})\otimes_{\psi^*(\underline{B})}\underline{A})=\underline{S}(\psi^*(\underline{F}))\otimes_{\psi^*(\underline{B})}\underline{A}$; pour tout ouvert U de S et toute section u de $\underline{S}(\psi^*(\underline{E}))$ au-dessus de U , u coïncide , dans un voisinage V de chaque point $s\in U$, avec un élément de $S(\Gamma(V,\psi^*(\underline{E})))$; par suite , il y a un voisinage W de $\psi(s)$ dans T , une section u' de $\underline{S}(\underline{F})$ au-dessus de W , et un voisinage $V'\subset V\cap\psi^{-1}(W)$ de s tels que u coïncide avec $u'\circ\psi$ au-dessus de V', d'où notre assertion .

On notera enfin que $\underline{S}(\underline{E})$ est somme directe infinie des $\underline{S}_n(\underline{E})$, où le faisceau de modules $\underline{S}_n(\underline{E})$ est associé au préfaisceau des ~~U~~ $S_n(\Gamma(U,\underline{E}))$.

<u>Proposition 18 .- Soient</u> A <u>un anneau</u> , S=Spec(A) <u>son spectre premier</u>, <u>E le O_S-Module associé à un A-module</u> M ; <u>alors la O_S-Algèbre</u> $\underline{S}(\underline{E})$ <u>est associée à la A-algèbre</u> $S(M)$.

En effet , pour tout $f\in A$, $\underline{S}(M_f)=(\underline{S}(M))_f$, et la proposition résulte donc des définitions .

<u>Corollaire .- Si</u> S <u>est un préschéma</u> , $\underline{E}$ <u>un O_S-Module quasi-cohérent</u>, <u>la O_S-Algèbre $\underline{S}(\underline{E})$ est quasi-cohérente . Si en outre</u> S <u>est localement noethérien , et si $\underline{E}$ est cohérent , alors chacun des O_S-Modules $\underline{S}_n(\underline{E})$ est cohérent</u> .

La première assertion est conséquence immédiate de la prop.18 et de I,1,4,th.2 ; la seconde résulte de ce que si E est un A-module de type fini , $\underline{S}_n(E)$ est un A-module de type fini ; on applique alors I,1,5,th.3 .

<u>Définition 3 .- Soit $\underline{E}$ un O_S-Module quasi-cohérent . On appelle fibré vectoriel défini par $\underline{E}$ et on note $\underline{V}(\underline{E})$ le préschéma affine au-dessus de S associé (n°3) à la O_S-Algèbre $\underline{S}(\underline{E})$</u> .

En vertu de la prop.6 du n°2 , pour tout S-préschéma <u>adéquat</u> , il y a correspondance biunivoque canonique entre les S-morphismes $X\to\underline{V}(\underline{E})$ et les O_S-homomorphismes d'<u>algèbres</u> $\underline{S}(\underline{E})\to\underline{A}(X)$, et par suite aussi entre ces morphismes et les O_S-homomorphismes de Module

$\underline{E}\to \mathcal{A}(X)=f_*(O_X)$ (f morphisme structural $X\to S$) . En particulier :

1° Prenons pour X un sous-préschéma induit par S sur un <u>ouvert</u> $U\subset S$ Alors , si p est le morphisme structural $\underline{V}(\underline{E})\to S$, un S-morphisme $u : U\to \underline{V}(\underline{E})$ est par définition un morphisme tel que $p\circ u=1_U$, autrement dit une <u>section</u> du morphisme p au-dessus de U , ou , comme nous dirons encore , une S-<u>section</u> de $\underline{V}(\underline{E})$ au-dessus de U . D'après ce qu'on vient de voir , ces S-sections correspondent biunivoquement aux homomorphismes de O_S-Module $\underline{E}\to j_*(O_S|U)$, ou , ce qui revient au même (chap.0,§ 2,n°5) aux O_S-homomorphismes $j^*(\underline{E})=\underline{E}|U \to O_S|U$ (j injection canonique $U\to S$). En d'autres termes , <u>le faisceau des germes de S-sections de $\underline{V}(\underline{E})$ s'identifie canoniquement au faisceau $\underline{Hom}_{O_S}(\underline{E},O_S)$</u> (qu'on peut appeler le <u>dual</u> du fais-ceau $\underline{E}$).

2° Prenons pour X le spectre $\{\xi\}$ d'un corps K ; le morphisme structural $f : X\to S$ correspond donc à un monomorphisme $\kappa(s)\to K$, où $s=f(\xi)$ (I,2,2,cor. de la prop.5); les S-morphismes $\{\xi\}\to \underline{V}(\underline{E})$ ne sont donc autres que les <u>points géométriques de $\underline{V}(\underline{E})$ à valeurs dans l'extension K de</u> $\kappa(s)$, points qui sont localisés aux points de la fibre $p^{-1}(s)$ L'ensemble de ces points , qu'on peut encore appeler <u>fibre géométrique rationnelle sur</u> K de $\underline{V}(\underline{E})$ <u>au-dessus du point s</u> , s'identifie d'après ce qui précède à l'ensemble des O_S-homomorphismes $\underline{E}\to f_*(O_X)$, ou , (chap.0,§ 2,n°5) ce qui revient au même , à l'ensemble des O_X-homomorphismes $f^*(\underline{E})\to O_X=K$. Mais on a par définition $f^*(\underline{E})=\underline{E}_s\otimes_{O_s}K = \underline{E}^s\otimes_{\kappa(s)}K$, en posant $\underline{E}^s=\underline{E}_s/m_s\underline{E}_s$, m_s étant l'idéal maximal de O_s ; la fibre géométrique de $\underline{V}(\underline{E})$ au-dessus de s s'identifie donc au <u>dual</u> du K-<u>espace vectoriel</u> $\underline{E}^s\otimes_{\kappa(s)}K$; si $\underline{E}^s$ ou K est de dimension finie sur $\kappa(s)$, ce dual s'identifie aussi à $(\underline{E}^s)'\otimes_{\kappa(s)}K$, où $(\underline{E}^s)'$ est le dual du $\kappa(s)$-espace vectoriel $\underline{E}^s$.

<u>Proposition 19</u> .- (i) <u>$\underline{V}(\underline{E})$ est un foncteur contravariant de la catégorie des O_S-Modules quasi-cohérents dans la catégorie des S-préschémas affines au-dessus de</u> S .

(ii) *Si* $\underline{E}$ *est un* O_S*-Module de type fini*, $\underline{V}(\underline{E})$ *est de type fini sur* S

(iii) *Si* $\underline{E}$ *et* F *sont deux* O_S*-Modules*, $\underline{V}(\underline{E} \oplus \underline{F})$ *s'identifie canoniquement à* $\underline{V}(\underline{E}) \times_S \underline{V}(\underline{F})$.

(iv) *Soient* $g : S' \to S$ *un morphisme ; pour tout* O_S*-Module* $\underline{E}$, $\underline{V}(g^*(\underline{E}))$ *s'identifie canoniquement à* $(\underline{V}(\underline{E}))^{S'} = \underline{V}(\underline{E}) \times_S S'$.

(i) est conséquence immédiate de la prop. 6 du n°2, compte tenu de ce que tout homomorphisme $E \to F$ de O_S-Modules définit canoniquement un homomorphisme $\underline{S}(\underline{E}) \to \underline{S}(\underline{F})$ de O_S-Algèbres. (ii) découle aussitôt des définitions et du fait que $\underline{S}(E)$ est une A-algèbre de type fini si E est un A-module de type fini. Pour démontrer (iii), on peut supposer $S = \mathrm{Spec}(A)$, $\underline{E} = \widetilde{M}$, $\underline{F} = \widetilde{N}$, où M et N sont des A-modules ; l'assertion résulte alors de ce que $\underline{S}(M \oplus N) = \underline{S}(M) \otimes_A \underline{S}(N)$. De même, pour démontrer (iv), on peut supposer S, S' affines, soit $S = \mathrm{Spec}(A)$, $S' = \mathrm{Spec}(A')$, et $\underline{E} = \widetilde{M}$, M étant un A-module. Alors $g^*(\underline{E}) = \widetilde{N}$, où $N = M \otimes_A A'$ (I, 1, 6, prop. 8), et le résultat découle de ce que $\underline{S}(N) = \underline{S}(M) \otimes_A A'$.

Si on prend en particulier $\underline{E} = O_S$, le préschéma $\underline{V}(O_S)$, qu'on note aussi Λ_S, est appelé le *préschéma structural* au-dessus de S ; c'est le préschéma affine au-dessus de S associé à la O_S-Algèbre $\underline{S}(O_S)$, qui s'identifie à la O_S-Algèbre $O_S[T] = O_S \otimes_{\underline{Z}} \underline{Z}[T]$, où T est une indéterminée, $\underline{Z}$ et $\underline{Z}[T]$ des faisceaux simples sur S. Comme on l'a vu ci-dessus, le faisceau des germes de S-sections de Λ_S s'identifie à O_S lui-même. Pour tout morphisme $g : S' \to S$, on a $g^*(O_S) = O_{S'}$, donc $\Lambda_{S'}$ s'identifie canoniquement à $(\Lambda_S)^{S'} = \Lambda_S \times_S S'$ en vertu de la prop. 19.

Archives Grothendieck, sept 89

§ 3 . Spectres premiers homogènes .

1 . Généralités sur les anneaux gradués .

Notations .-

Soit S un anneau gradué , à degrés positifs ; on désignera par S_n la partie de S formée des éléments homogènes de degré n ($n \geq 0$) , par S_+ la somme (directe) des S_n tels que n 0 ; on a $1 \in S_0$, S_+ est un idéal gradué de S et S_0 un sous-anneau de S . Pour tout élément homogène f de degré $d>0$, on désigne par $S_{(f)}$ le sous-anneau $(S_f)_0$ de l'anneau (évidemment gradué) des fractions S_f , formé des éléments homogènes de degré 0 : tout élément de $S_{(f)}$ est donc de la forme x/f^n avec $x \in S_{nd}$ ($n>0$).

Soit M un module gradué (à degrés positifs ou négatifs) sur S ; on désignera par M_n le sous-module de M formé des éléments de degré n. Avec les mêmes hypothèses sur f , on désigne par $M_{(f)}$ le sous-module $(M_f)_0$ du module (évidemment gradué) de fractions M_f , formé des éléments homogènes de degré 0 ; les éléments de $M_{(f)}$ sont donc de la forme z/f^n avec $z \in M_{nd}$ ($n>0$) . Il est clair que $M_{(f)}$ est un $S_{(f)}$-module .

On notera que pour tout entier $k>0$, l'anneau $S_{(f)}$ et le module $M_{(f)}$ sont entièrement déterminés par la connaissance des éléments des modules S_{knd} et M_{knd} , car si $x \in S_{nd}$, on a $x/f^n = (xf^{(k-1)n})/f^{kn}$ et de même dans $M_{(f)}$.

Lemme 1 .- Soient d,d' deux entiers >0 , $f \in S_d$, $g \in S_{d'}$. Il existe alors un isomorphisme canonique d'anneaux

$$S_{(fg)} \xrightarrow{\sim} (S_{(f)})_{g^d/f^{d'}} \ ;$$

si on identifie ces deux anneaux , il existe un isomorphisme canonique de modules

$$M_{(fg)} \xrightarrow{\sim} (M_{(f)})_{g^d/f^{d'}} \quad .$$

En effet , les éléments de $S_{(fg)}$ sont de la forme $x/(fg)^{ndd'}$, où $x \in S_{ndd'(d+d')}$, n étant un entier arbitraire >0 ; à cet élément on fait correspondre l'élément $(x/f^{nd'(d+d')})/(g^d/f^{d'})^{nd'}$ de l'anneau

$(S_{(f)})_{g^d/f^{d'}}$. Cette application est bien définie ; en effet s'il existe $k \geq 0$ tel que $(fg)^k x=0$ dans S , on a aussi $(g^d/f^{d'})^k(x/f^{nd'(d+d')})=0$ dans $S_{(f)}$, car cet élément est égal à $(fg)^{kd}x/f^{(k+nd')(d+d')}=0$ par hypothèse . Réciproquement , comme tout élément de $(S_{(f)})_{g^d/f^{d'}}$ s'écrit $(x/f^{nd'(d+d')})/(g^d/f^{d'})^{nd'}$ pour un n convenable et un $x \in S_{ndd'(d+d')}$, on fait correspondre à cet élément l'élément $x/(fg)^{ndd''}$ de $S_{(fg)}$; on a encore une application bien définie , car si on a $(g^d/f^{d'})^k(x/f^{nd(d+d')})=0$, cela s'écrit $g^{kd}x/f^{kd'+nd(d+d')}=0$, donc il existe h tel que $f^h g^{kd}x=0$ dans S , et cela entraîne $(fg)^{h+kd}x=0$. On procède de la même façon pour M , et il est immédiat de vérifier que les applications ainsi définies sont des homomorphismes (resp. di-homomorphismes inverses l'une de l'autre .

Avec les mêmes notations et hypothèses , il est clair que l'homomorphisme canonique $S_f \rightarrow S_{fg}$, transfomant x/f^ken $g^k x/(fg)^k$ est de degré 0 , donc donne par restriction un homomorphisme canonique d'anneaux $S_{(f)} \rightarrow S_{(fg)}$. Le lemme 1 entraîne alors :

<u>Lemme 2 .- L'anneau</u> $S_{(fg)}$ (resp. <u>le module</u> $M_{(fg)}$) <u>est engendré par la réunion des images canoniques de</u> $S_{(f)}$ <u>et</u> $S_{(g)}$ (resp. <u>de</u> $M_{(f)}$ <u>et</u> $M_{(g)}$).

Il suffit en effet de voir que $1/(g^d/f^{d'})=f^{d+d'}/(fg)^d$ appartient à l'image canonique de $S_{(g)}$, ce qui est évident par définition .

Pour tout entier $d>0$, nous désignerons par $S^{(d)}$ l'anneau gradué somme directe des S_{nd} $(n \geq 0)$, par $M^{(d)}$ le $S^{(d)}$-module gradué somme directe des M_{nd} $(n \in \underline{Z})$.

<u>Proposition 1 .- Soit d un entier</u> >0 , <u>et soit</u> $f \in S_d$. <u>Alors il existe un isomorphisme canonique d'anneaux</u> $S_{(f)} \simeq S^{(d)}/(f-1)S^{(d)}$; <u>si on identifie ces deux anneaux , il existe un isomorphisme canonique de</u>

$M_{(f)} \simeq$ <u>modules</u> $M^{(d)}/(f-1)M^{(d)}$.

Le premier de ces isomorphismes se définit en faisant correspondre à x/f^n, où $x \in S_{nd}$, l'élément $\bar{x}$, classe de x mod. $(f-1)S^{(d)}$; cette application est bien définie, car si $f^h x=0$, on peut écrire $x = (1-f^h)x = -(f-1)(f^{h-1}+f^{h-2}+\dots+1)x \in (f-1)S^{(d)}$. On remarque d'autre part que , si $x \in S_{nd}$ est tel que $x=(f-1)y$ avec $y=y_{hd}+y_{(h+1)d}+\dots+y_{kd}$, $y_{jd} \in S_{jd}$, $y_{hd} \neq 0$, on a nécessairement $h=n$ et $x=-y_{hd}$, ainsi que les relations $y_{(j+1)d}=fy_{jd}$ pour $h \leq j \leq k-1$, $fy_{kd}=0$, ce qui donne finalement $f^{k-n}x=0$; à toute classe $\bar{x}$ mod. $(f-1)S^{(d)}$ d'un élément $x \in S_{nd}$ on peut donc faire correspondre l'élément x/f^n de $S_{(f)}$, car la remarque qui précède prouve que cette application est bien définie. Il est immédiat que les deux applications ainsi définies sont des homomorphismes d'anneaux, inverses l'une de l'autre. On procède exactement de même pour M.

Soit T une partie multiplicative de S_+, formée d'éléments homogènes ; $T_0=T \cup \{1\}$ est alors une partie multiplicative de S ; l'anneau $T_0^{-1}S$ est encore gradué de façon évidente (les éléments de T_0 étant homogènes), et on désigne par $S_{(T)}$ le sous-anneau de $T_0^{-1}S$ formé des éléments de degré 0 ; ce sont donc les éléments de la forme x/h, où $h \in T$ et x est homogène de degré égal à celui de h. On sait que $T_0^{-1}S$ s'identifie canoniquement à la limite inductive des anneaux S_f, où f parcourt T (pour les homomorphismes canoniques $S_f \to S_g$, où g est un multiple de f) ; comme cette identification respecte les degrés, elle identifie $S_{(T)}$ à la limite inductive des $S_{(f)}$ pour $f \in T$. Pour tout S-module gradué M, on définit de même le sous-module $M_{(T)}$ (sur l'anneau $S_{(T)}$) formé des éléments de degré 0 de $T_0^{-1}M$, et on voit que c'est la limite inductive des $M_{(f)}$, où $f \in T$.

Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier gradué de S, qui est donc somme directe des sous-groupes $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p} \cap S_n$; supposons que $\mathfrak{p}$ ne contienne pas S_+. Alors si $f \in S_+$ n'appartient pas à $\mathfrak{p}$, la relation $f^n x \in \mathfrak{p}$ est équivalente à $x \in \mathfrak{p}$; en particulier $f^n x \in \mathfrak{p}_m$ pour $x \in S_{m-nd}$ équivaut à $x \in \mathfrak{p}_{m-nd}$, Proposition 2 .- Soit n_0 un entier >0 ; pour tout $n\geqslant n_0$, soit $\underline{p}_n$ un sous-groupe de S_n . Pour qu'il existe un idéal premier gradué $\underline{p}$ de S , ne contenant pas S_+ et tel que $\underline{p}\cap S_n=\underline{p}_n$ pour tout $n\geqslant n_0$; il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées : 1° $S_m\underline{p}_n\subset \underline{p}_{m+n}$ pour tout $m\geqslant 0$ et tout $n\geqslant n_0$; 2° pour $m\geqslant n_0$, $n\geqslant n_0$, $f\in S_m$, $g\in S_n$, la relation $fg\in \underline{p}_{m+n}$ entraîne $f\in\underline{p}_m$ ou $g\in\underline{p}_n$; 3° $\underline{p}_n\neq S_n$ pour un $n\geqslant n_0$ au moins . En outre l'idéal premier gradué $\underline{p}$ est alors unique .

En effet , si $\underline{p}\not\supset S_+$, il existe au moins un $k>0$ tel que $\underline{p}\cap S_k\neq S_k$, puisque $\underline{p}$ est gradué ; si $f\in S_k$ n'appartient pas à $\underline{p}$, la relation $\underline{p}\cap S_n=S_n$ entraîne $\underline{p}\cap S_{n-mk}=S_{n-mk}$ d'après les remarques précédentes ; donc si $\underline{p}\cap S_n=S_n$ à partir d'une certaine valeur de n , on aurait, nécessairement $\underline{p}\supset S_+$. Les conditions de l'énoncé sont donc nécessaires. Inversement , si elles sont satisfaites , et si pour un entier $d\geqslant n_0$ $f\in S_d$ n'appartient pas à $\underline{p}$, alors , si $\underline{p}$ existe , $\underline{p}_m$, pour $m<n_0$, est nécessairement égal à l'ensemble des $x\in S_m$ tels que $f^rx\in \underline{p}_{m+rd}$ pour presque tout r . Cela prouve déjà que si $\underline{p}$ existe , il est unique . Reste à montrer que si on définit les $\underline{p}_m$ pour $m<n_0$ par la condition précédente , $\underline{p}=\sum_{n\geq 0}^{\infty}\underline{p}_n$ est un idéal premier . Notons d'abord qu'en vertu des hypothèses , pour $m\geqslant n_0$, $\underline{p}_m$ est aussi défini comme l'ensemble des $x\in S_m$ tels que $f^rx\in \underline{p}_{m+rd}$ pour r assez grand. Cela étant si $g\in S_n$, $x\in\underline{p}_m$, on a $f^rgx\in \underline{p}_{m+n+rd}$ pour r assez grand , et par suite $gx\in\underline{p}_{m+n}$. D'autre part , si $x\in S_m$, $y\in S_n$ sont tels que $xy\in \underline{p}_{m+n}$ et $y\notin\underline{p}_n$, alors $f^ry\notin \underline{p}_{n+rd}$ pour r assez grand ; d'autre part , pour r assez grand , $f^{2r}xy\in\underline{p}_{m+n+2rd}$, donc on en conclut $f^rx\in\underline{p}_{m+rd}$ pour r assez grand, donc $x\in\underline{p}_m$, ce qui achève la démonstration .

Nous dirons qu'une partie $\underline{J}$ de S_+ est un idéal de S_+ si c'est l'intersection un idéal de S ; on dit que c'est un idéal premier gradué de S_+ s'il est l'intersection de S_+ et d'un idéal premier gradué de S ne contenant pas S_+ (cet idéal premier étant d'ailleurs unique d'après la prop. 2). Si $\underline{J}$ est un idéal de S_+, la racine de $\underline{J}$ dans S_+ est l'ensemble des éléments de S_+ dont une puissance appartient à $\underline{J}$, autrement dit c'est l'ensemble $\underline{r}_+(\underline{J})=\underline{r}(\underline{J})\cap S_+$.

Si $\underline{p}$ est un idéal premier gradué de S_+, on désignera par $S_{(\underline{p})}$ et $M_{(\underline{p})}$ l'anneau $S_{(T)}$ et le module $M_{(T)}$, où T désigne l'ensemble des éléments homogènes de S_+ qui n'appartiennent pas à $\underline{p}$.

2. Spectre premier homogène d'un anneau gradué.

Etant donné un anneau gradué S, on appelle spectre premier homogène de S et on désigne par $\mathrm{Proj}(S)$ l'ensemble des idéaux premiers gradués de S_+, ou, ce qui revient au même, l'ensemble des idéaux premiers gradués de S ne contenant pas S_+ ; nous allons définir sur $X=\mathrm{Proj}(S)$ une structure de schéma.

Pour toute partie E de S, soit $V_+(E)$ l'ensemble des idéaux premiers gradués de S ne contenant pas S_+ et contenant E ; c'est donc la partie $V(E)\cap \mathrm{Proj}(S)$ de $\mathrm{Spec}(S)$. De I, 1, 1, prop. 1 on déduit donc :

(1) $$V_+(0)=X=\mathrm{Proj}(S) \quad , \quad V_+(S)=V_+(S_+)=\emptyset$$

(2) $$V_+(\bigcup_\lambda E_\lambda)=\bigcap_\lambda V_+(E_\lambda)$$

(3) $$V_+(EE')=V_+(E)\cup V_+(E') .$$

On ne change pas $V_+(E)$ en remplaçant E par l'idéal gradué engendré par E ; en outre, si $\underline{J}$ est un idéal gradué de S, il résulte du n°1, que l'on a

(4) $$V_+(\underline{J})=V_+\Big(\bigcup_{q\geq n} \underline{J}\cap S_q\Big)$$

pour tout $n>0$: car si $\underline{p}\in X$ contient les éléments homogènes de $\underline{J}$ de degré $\geq n$, comme par hypothèse il existe un f homogène non contenu dans $\underline{p}$, pour tout $x\in \underline{J}\cap S_n$, on a $f^r x\in \underline{J}\cap S_{n+rd}$ pour tout $r>0$ (si $f\in S_d$), donc $f^r x\in \underline{p}_{n+rd}$ pour r assez grand, d'où $x\in \underline{p}_n$. Enfin, on a

(5) $$V_+(\underline{J})=V_+(\underline{r}(\underline{J})) .$$

Par définition, les $V_+(E)$ sont les parties fermées de $X=\mathrm{Proj}(S)$ pour la topologie induite par la topologie spectrale de $\mathrm{Spec}(S)$, et qu'on appellera encore <u>topologie spectrale</u> sur $\mathrm{Proj}(S)$. On pose, pour tout $f\in S$

(6) $$D_+(f)=D(f)\cap \mathrm{Proj}(S)=\mathrm{Proj}(S)-V_+(f)$$

et on a par suite (I,1,1,formule (3))

(7) $$D_+(fg)=D_+(f)\cap D_+(g)\ .$$

<u>Proposition 3. — Lorsque f parcourt l'ensemble des éléments homogènes de S_+, les $D_+(f)$ forment une base de la topologie de</u> $X=\mathrm{Proj}(S)$.

On a vu en effet ci-dessus que toute partie fermée de X est intersection d'ensembles de la forme $V_+(f)$, où f est homogène de degré >0.

Soit f un élément homogène de S_+, de degré $d>0$; pour tout idéal premier gradué $\underline{p}$ de S, ne contenant pas f, on sait que l'ensemble des x/f^n, où $x\in \underline{p}$ et $x\in S_{nd}$ est un idéal premier de l'anneau de fractions S_f ; sa trace sur $(S_f)_0=S_{(f)}$ est donc un idéal premier de cet anneau, que nous désignerons par $\psi_f(\underline{p})$; c'est donc l'ensemble des x/f^n, où $x\in\underline{p}\cap S_{nd}$, $n>0$. On a ainsi défini une application $\psi_f : D_+(f)\to \mathrm{Spec}(S_{(f)})$; si $g\in S_{d'}$ est un second élément homogène de S_+, on a un diagramme commutatif

(8) $$\begin{tikzcd} D_+(f) \arrow[r, "\psi_f"] & \mathrm{Spec}(S_{(f)}) \\ D_+(fg) \arrow[u] \arrow[r, "\psi_{fg}"'] & \mathrm{Spec}(S_{(fg)}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de gauche est l'inclusion, et celle de droite est l'application ${}^a\omega_{fg,f}$ déduite de l'homomorphisme canonique $\omega=\omega_{fg,f} : S_{(f)}\to S_{(fg)}$; en effet, si $x/f^n\in \omega^{-1}(\psi_{fg}(\underline{p}))$, où $fg\notin \underline{p}$, on a par définition $g^n x/(fg)^n\in \psi_{fg}(\underline{p})$, donc $g^n x\in\underline{p}$, et par suite $x\in\underline{p}$, et la réciproque est évidente.

<u>Proposition 4. — L'application ψ_f est un homéomorphisme de $D_+(f)$ sur</u> $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$.

En premier lieu, ψ_f est continue ; car si $h\in S_{nd}$ est tel que

$h/f^n \notin \varphi_f(\underline{p})$, on a par définition $h \notin \underline{p}$, et réciproquement, donc $\varphi_f^{-1}(D(h/f^n)) = D_+(hf)$, et notre assertion résulte de la formule (7) ; en outre, les $D_+(hf)$, où h parcourt les ensembles S_{nd}, forment une base de la topologie de $D_+(f)$ en vertu de la prop. 3 et de la formule (7) ; ce qui précède prouve donc, compte tenu de l'axiome (T_0), valable dans $D_+(f)$ et $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$, que φ_f est injective et que l'application inverse $\varphi_f(D_+(f)) \to D_+(f)$ est continue. Enfin, pour voir que φ_f est surjective, on remarque que, si $\underline{q}_0$ est un idéal premier de $S_{(f)}$, et si, pour tout $n>0$, on désigne par $\underline{p}_n$ l'ensemble des $x \in S_n$ tels que $x^d/f^n \in \underline{q}_0$, les $\underline{p}_n$ vérifient les conditions de la prop. 2 (en effet, si $x \in S_n, y \in S_n$ sont tels que $x^d/f^n \in \underline{q}_0$ et $y^d/f^n \in \underline{q}_0$, on a $(x+y)^{2d}/f^{2n} \in \underline{q}_0$, d'où $(x+y)^d/f^n \in \underline{q}_0$ puisque $\underline{q}_0$ est premier). Si $\underline{p}$ est l'idéal premier gradué de S ainsi défini, on a bien $\varphi_f(\underline{p}) = \underline{q}_0$, car si $x \in S_{nd}$ les relations $x/f^n \in \underline{q}_0$ et $x^d/f^{nd} \in \underline{q}_0$ sont équivalentes.

<u>Corollaire 1 .- Pour que $D_+(f)=\emptyset$, il faut et il suffit que f soit nilpotent</u>.

En effet, pour que $\mathrm{Spec}(S_{(f)})=\emptyset$, il faut et il suffit que $S_{(f)}$ soit réduit à 0, ou encore que $f/f=0$ dans S_f, ce qui signifie que f est nilpotent.

<u>Corollaire 2 .- Soit E un sous-groupe gradué de S_+. Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) $V_+(E)=X$.

b) <u>Tout élément de E est nilpotent</u>.

c) <u>Les composantes homogènes de tout élément de E sont nilpotentes</u>.

Il est clair que c) entraîne b) et que b) entraîne a). Si $\underline{J}$ est l'idéal gradué de S engendré par E, a) équivaut à $V_+(\underline{J}) = X$; a fortiori a) entraîne que tout élément homogène $f \in E \subset \underline{J}$ est tel que $V_+(f)=X$, donc f est nilpotent en vertu du cor. 1.

Corollaire 3 .- Si $\underline{J}$ est un idéal gradué de S_+, $\underline{r}_+(\underline{J})$ est l'intersection des idéaux premiers gradués de S_+ contenant $\underline{J}$.

En considérant l'anneau gradué $S/\underline{J}$, on peut se ramener au cas où $\underline{J}=(0)$. Il faut montrer que si $f\in S_+$ n'est pas nilpotent , il y a un idéal premier gradué ne contenant pas f ; or , une au moins des composantes homogènes de f n'est pas nilpotente , et on est ainsi ramené au cas où f est homogène ; l'assertion résulte alors du cor.1 .

Pour toute partie Y de X , soit $\underline{j}_+(Y)$ l'ensemble des $f\in S_+$ tels que $Y\subset V_+(f)$; il revient au même de dire que $\underline{j}_+(Y)=\underline{j}(Y)\cap S_+$; $\underline{j}_+(Y)$ est donc un idéal de S_+ , égal à sa racine dans S_+ .

Proposition 5 .- a) Pour toute partie E de S_+, $\underline{j}_+(V_+(E))$ est la racine de l'idéal gradué de S_+ engendré par E .

b) Pour toute partie Y de X , $V_+(\underline{j}_+(Y))=\overline{Y}$, adhérence de Y dans X .

a) Si $\underline{J}$ est l'idéal gradué de S_+ engendré par E , on a $V_+(E)=V_+(\underline{J})$, et l'assertion résulte alors du cor.3 de la prop.4 .

b) Comme $V_+(\underline{J})=\bigcap_{f\in J} V_+(f)$, la relation $Y\subset V_+(\underline{J})$ entraîne $Y\subset V_+(f)$ pour tout $f\in\underline{J}$, et par suite $\underline{J}\supset\underline{j}_+(Y)$, d'où $V_+(\underline{j}_+(Y))\subset V_+(\underline{J})$, ce qui prouve b) par définition des ensembles fermés .

Corollaire 1 .-Les parties fermées Y de X=Proj(S) et les idéaux gradués $\underline{J}$ de S_+ égaux à leur racine dans S_+ se correspondent biunivoquement par les applications décroissantes $Y\to\underline{j}_+(Y)$, $\underline{J}\to V_+(\underline{J})$; à la réunion $Y_1\cup Y_2$ de deux parties fermées correspond $\underline{j}_+(Y_1)\cap\underline{j}_+(Y_2)$, et à l'intersection d'une famille quelconque (Y_λ) de parties fermées correspond la racine dans S_+ de la somme des $\underline{j}_+(Y_\lambda)$.

Corollaire 2 .- Soit $\underline{J}$ un idéal gradué dans S_+ ; pour que $V_+(\underline{J})=\emptyset$, il faut et il suffit que tout élément de S_+ ait une puissance dans $\underline{J}$.

Ce dernier corollaire s'exprime aussi sous la forme équivalente :

Corollaire 3 .- Soit (f_α) une famille d'éléments homogènes de S_+ . Pour que les $D_+(f_\alpha)$ forment un recouvrement de X=Proj(S) , il faut et il suffit que tout élément de S_+ ait une puissance dans l'idéal engendré par les f .

Corollaire 4 .- Soient (f_α) une famille d'éléments homogènes de S_+, f un élément de S_+. Les relations suivantes sont équivalentes : (i) $D_+(f)\subset\bigcup_\alpha D_+(f_\alpha)$; (ii) $\bigcap_\alpha V_+(f_\alpha)\subset V_+(f)$; (iii) une puissance de f appartient à l'idéal engendré par les f_α .

Corollaire 5 .- Pour que X=Proj(S) soit vide, il faut et il suffit que tout élément de S_+ soit nilpotent .

Corollaire 6 .- Dans la correspondance biunivoque décrite dansle cor. 1, aux parties fermées irréductibles de X correspondent les idéaux premiers gradués dans S_+ .

En effet, si $Y=Y_1\cup Y_2$, où Y_1 et Y_2 sont fermés et distincts de Y, on a $\underline{j}_+(Y)=\underline{j}_+(Y_1)\cap\underline{j}_+(Y_2)$, les idéaux $\underline{j}_+(Y_1)$ et $\underline{j}_+(Y_2)$ étant distincts de $\underline{j}_+(Y)$, donc $\underline{j}_+(Y)$ n'est pas premier. Inversement, si $\underline{J}$ est un idéal gradué non premier de S_+, il existe deux éléments f,g de S_+ tels que $f\notin\underline{J}$, $g\notin\underline{J}$, $fg\in\underline{J}$; alors $V_+(f)\not\supset V_+(\underline{J})$, $V_+(g)\not\supset V_+(\underline{J})$ mais $V_+(\underline{J})\subset V_+(f)\cup V_+(g)$ par (3) ; on en conclut que $V_+(\underline{J})$ est réunion des ensembles fermés $V_+(f)\cap V_+(\underline{J})$ et $V_+(g)\cap V_+(\underline{J})$, qui sont distincts de $V_+(\underline{J})$.

Soient f,g deux éléments homogènes de S_+ ; considérons les schémas affines $Y_f=\mathrm{Spec}(S_{(f)})$, $Y_g=\mathrm{Spec}(S_{(g)})$ et $Y_{fg}=\mathrm{Spec}(S_{(fg)})$. En vertu du lemme 1, le morphisme $w_{fg,f}=({}^a\omega_{fg,f},\tilde{\omega}_{fg,f})$ de Y_{fg} dans Y_f, correspondant à l'homomorphisme canonique $\omega_{fg,f} : S_{(f)}\quad S_{(fg)}$, est une immersion ouverte (I,1,3,prop.6). Au moyen de l'homéomorphisme réciproque de $\psi_f : D_+(f)\rightarrow Y_f$ (prop.4), on peut transporter à $D_+(f)$ la structure de schéma affine de Y_f ; en vertu de la commutativité du diagramme (8), le schéma affine $D_+(fg)$ s'identifie alors au schéma induit sur l'ensemble ouvert $D_+(fg)$ de l'espace de base par le schéma $D_+(f)$. Il est clair alors, (compte tenu de la prop.3) que X=Proj(S) est muni d'une unique structure de préschéma, dont la restriction à chaque $D_+(f)$ est le préschéma qui vient d'être défini. En outre :

Proposition 6 .- Le préschéma Proj(S) est un schéma .

Il suffit (I,3,6,prop.20) de montrer que quels que soient f,g homogènes dans S_+ , $D_+(f)\cap D_+(g)=D_+(fg)$ est affine et que son anneau est engendré par les images canoniques des anneaux de $D_+(f)$ et $D_+(g)$; le premier point est évident par définition , et le second résulte de ce que $S_{(fg)}$ est engendré par les images canoniques de $S_{(f)}$ et $S_{(g)}$ (n°1 lemme 2) .

Lorsqu'on parlera du spectre premier homogène Proj(S) comme d'un schéma , il s'agira toujours de la structure qui vient d'être définie .

Proposition 7 .- Si l'anneau S est intègre , le schéma Proj(S) est réduit et son espace de base est irréductible .

Comme (0) est alors un idéal premier gradué , l'irréductibilité de l'espace de base Proj(S) résulte du cor.6 de la prop.5 . D'autre part pour f homogène dans S_+ , S_f , et a fortiori $S_{(f)}$, n'a pas d'élément nilpotent , donc $D_+(f)$ est un schéma réduit ; il en est de même de X=Proj(S) (I,3,4, déf.5) .

Etant donné un anneau commutatif A , rappelons qu'on dit qu'un anneau gradué S est une A-algèbre graduée s'il est muni d'une structure de A-algèbre telle que chacun des sous-groupes S_n $(n\geqslant 0)$ soit un A-module ; il suffit d'ailleurs pour cela que S_0 soit une A-algèbre, autrement dit on définit sur S une structure de A-algèbre graduée en définissant une structure de A-algèbre sur S_0 , et en définissant pour $\alpha\in A$, $x\in S_n$, $\alpha.x=(\alpha.1)x$.

Proposition 8 .- Supposons que S soit une A-algèbre graduée . Alors sur X=Proj(S) , le faisceau O_X est un faisceau de A-algèbres (A étant considéré comme faisceau simple sur X) ; en d'autres termes , X est un schéma au-dessus de Y=Spec(A) .

Il suffit de noter que pour tout f homogène dans S_+ , $S_{(f)}$ est une algèbre sur A , et que le diagramme

$$\begin{tikzcd} S_{(f)} \arrow[rr] & & S_{(fg)} \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

est commutatif pour f,g homogènes dans S_+ .

<u>Remarque</u> .- Soit d un entier >0 ; le sous-anneau $S^{(d)}$ de S peut être considéré comme anneau gradué en prenant S_{nd} comme ensemble des éléments homogènes de degré n dans cet anneau . L'application $\underline{p} \to \underline{p} \cap S^{(d)}$ est une <u>bijection</u> de l'ensemble Proj(S) sur Proj($S^{(d)}$) . En effet , supposons donné un idéal premier gradué $\underline{p}' \in$ Proj($S^{(d)}$) , et posons $\underline{p}_{nd}= \underline{p}' \cap S_{nd}$. Pour tout n , définissons $\underline{p}_n$ comme l'ensemble des $x \in S_n$ tels que $x^d \in \underline{p}_{nd}$; si $x \in \underline{p}_n$, $y \in \underline{p}_n$, on a $(x+y)^{2d} \in \underline{p}_{2nd}$, donc $(x+y)^d \in \underline{p}_{nd}$ puisque $\underline{p}'$ est un idéal premier . On en conclut aussitôt que les $\underline{p}_n$ vérifient les conditions de la prop.2 du n°1 , et par suite il existe un seul idéal premier $\underline{p} \in$ Proj(S) tel que $\underline{p} \cap S^{(d)} = \underline{p}'$. De plus , comme pour tout f homogène dans S_+ , on a $V_+(f)=V_+(f^d)$, on voit que Proj(S) et Proj($S^{(d)}$) s'identifient en tant qu'<u>espaces topologiques</u> ; enfin , $S_{(f)}$ et $S_{(f^d)}$ s'identifient également en vertu du lemme 1 du n°1 , donc Proj(S) et Proj($S^{(d)}$) s'identifient en tant que <u>schémas</u> .

Désignons par S' l'anneau dont le groupe additif est la somme directe de $\underline{Z}$ et de S_+ la multiplication dans S_+ étant la même que dans l'anneau S , et le produit $n.x$ pour $x \in S_+$, $n \in \underline{N}$ étant la somme de n termes égaux à x ; il est clair que S' est un anneau gradué avec $S'_0 = \underline{Z}$ et $S'_n = S_n$ pour $n>0$. Si à tout idéal premier $\underline{p} \in$ Proj(S) on fait correspondre l'idéal premier $\underline{p}' \in$ Proj(S') tel que $\underline{p}'_n = \underline{p}_n$ pour tout $n>0$ (prop.2,n°1) , on voit aussitôt qu'on définit un isomorphisme canonique identifiant les schémas Proj(S) et Proj(S').

De même, si S est une A-algèbre graduée, on peut remplacer S par l'algèbre graduée $S_A^!$ somme directe de A et des S_n ($n>0$) avec $(S_A^!)_0=A$ et $(S_A^!)_n=S_n$, et on voit comme ci-dessus que les schémas Proj(S) et Proj($S_A^!$) s'identifient canoniquement.

3. Faisceau associé à un module gradué.

Soit M un S-module gradué. Pour tout f homogène dans S_+, $M_{(f)}$ est un $S_{(f)}$-module, et il lui correspond donc un faisceau quasi-cohérent associé (I,1,3) $(M_{(f)})^\sim$ de modules sur le schéma affine Spec($S_{(f)}$), identifié à $D_+(f)$.

Proposition 9.— Il existe sur X=Proj(S) un O_X-module quasi-cohérent $\tilde{M}$ et un seul tel que pour tout f homogène dans S_+ on ait $\Gamma(D_+(f),\tilde{M})=M_{(f)}$, l'homomorphisme de restriction $\Gamma(D_+(f),\tilde{M})\to\Gamma(D_+(fg),\tilde{M})$ pour f,g homogènes dans S_+, étant l'homomorphisme canonique $M_{(f)}\to M_{(fg)}$ (n°1).

En effet, la restriction à $D_+(fg)$ du faisceau $(M_{(f)})^\sim$ sur $D_+(f)$ s'identifie canoniquement (n°1, lemme 1) au faisceau associé au module $(M_{(f)})_{g^d/f^{d'}}$, puisque $D_+(fg)$ s'identifie au spectre premier de $(S_{(f)})_{g^d/f^{d'}}$ (I,1,3,prop.6); mais d'après le lemme 1 du n°1, on voit que la restriction à $D_+(fg)$ de $(M_{(f)})^\sim$ s'identifie canoniquement à $(M_{(fg)})^\sim$; on en conclut qu'il existe un isomorphisme $\theta_{g,f}$ de la restriction à $D_+(fg)$ du faisceau $(M_{(f)})^\sim$ sur la restriction à $D_+(fg)$ du faisceau $(M_{(g)})^\sim$; en outre, si h est un troisième élément homogène de S_+, on a $\theta_{g,f}\theta_{f,h}\theta_{h,g}=1$ dans $D_+(fgh)$. On en conclut (FAC,I,1,4) qu'il existe sur X un O_X-module F et pour chaque f homogène dans S_+ un isomorphisme η_f de $F|D_+(f)$ sur $(M_{(f)})^\sim$, tels que $\theta_{g,f}=\eta_g\circ\eta_f^{-1}$. Si alors on considère le faisceau G associé au préfaisceau formé des $G(D_+(f))=M_{(f)}$, avec les homomorphismes canoniques $M_{(f)}\to M_{(fg)}$ comme homomorphismes de restriction, ce qui précède prouve que F et G sont isomorphes, et par suite (compte tenu de I,1,3,th.1) que $\Gamma(G,D_+(f))$ s'identifie canoniquement à $M_{(f)}$ pour tout f homogène dans S_+. C'est ce faisceau G qu'on désignera par $\tilde{M}$.

Définition 1.- On dit que le faisceau $\tilde{M}$ défini dans la prop.9 est le faisceau associé au S-module gradué M.

Rappelons que les S-modules gradués) forment une catégorie lorsqu'on restreint les homomorphismes de modules gradués) à ceux qui sont de degré 0. Avec cette convention :

Proposition 10.- Le foncteur $M\to\tilde{M}$ est un foncteur covariant additif exact de la catégorie des S-modules gradués dans la catégorie des O_X-modules ~~gradués~~, qui commute aux limites inductives et aux sommes directes.

En effet, ces propriétés étant locales, il suffit de les vérifier sur les faisceaux $\tilde{M}|D_+(f)=M_{(f)})$. Or les foncteurs $M\to M_f$, $M_f\to(M_f)_0=M_{(f)}$ et $M_{(f)}\to(M_{(f)})^\sim$ ont tous trois les propriétés d'exactitude et de permutabilité aux limites inductives et sommes directes (I,1,3,cor.3 et 4 du th.1) ; d'où la proposition.

Proposition 11.- Pour tout $\mathfrak{p}\in X=\mathrm{Proj}(S)$, on a $\tilde{M}_{\mathfrak{p}}=M_{(\mathfrak{p})}$.

On a en effet $\tilde{M}_{\mathfrak{p}}=\varinjlim\Gamma(D_+(f),\tilde{M})$, où f parcourt les éléments homogènes de $S_+-(\mathfrak{p}\cap S_+)$; comme $\Gamma(D_+(f),\tilde{M})=M_{(f)}$, la proposition résulte de la définition de $M_{(\mathfrak{p})}$ (n°1).

Proposition 12.- On suppose S_+ engendré par l'ensemble S_1 des éléments homogènes de degré 1. Pour que $\tilde{M}=0$, il faut et il suffit que pour tout $z\in M$ et tout $f\in S_+$, il existe une puissance de f annulant z.

En effet, la condition $\tilde{M}=0$ équivaut à $M_{(f)}=0$ pour tout f homogène dans S_+, et la condition est donc suffisante (sans hypothèse sur S_+). Inversement, si $M_{(f)}=0$ pour tout $f\in S_1$, pour tout z homogène dans M il existe par définition une puissance f^n telle que $f^nz=0$. L'hypothèse sur S_+ entraîne alors que cette condition est aussi nétisfaite pour tout $f \; S_+$, d'où la proposition .

Si M est un S-module gradué , n un entier rationnel , nous désignerons par $M(n)$ le S-module gradué défini par $(M(n))_k = M_{n+k}$ pour tout $k \in \underline{Z}$. On définit ainsi en particulier , pour tout $n \in \underline{Z}$, un S-module gradué $S(n)$ (dans la définition duquel il faut prendre $S_m = (0)$ pour $m<0$) . On dit qu'un S-module gradué M est libre s'il est isomorphe , en tant que module gradué , à une somme directe de modules de la forme $S(n)$; il revient au même de dire que M admet une base sur S formée d'éléments homogènes .

Proposition 13 .- Soient d un entier >0 , $f \in S_d$. Alors les faisceaux $(S(nd))^{\sim} | D_+(f)$ et $O_X | D_+(f)$ sont isomorphes pour tout $n \in \underline{Z}$.

En effet , la multiplication par l'élément inversible $(f^n/1)^n$ est une bijection de S_f sur lui-même , donc une bijection de $S_{(f)} = (S_f)_{(0)}$ sur $(S_f)_{nd} = (S_f(nd))_0 = (S(nd)_f)_0 = S(nd)_{(f)}$; les $S_{(f)}$-modules $S_{(f)}$ et $S(nd)_{(f)}$ sont par suite isomorphes , d'où la proposition.

Corollaire 1 .- Le faisceau $(S(nd))^{\sim}$ est un faisceau inversible (§ 1, n°3) sur l'ensemble ouvert $\bigcup_{f \in S_d} D_+(f)$.

Corollaire 2 .- Si S_+ est engendré par l'ensemble S_1 des éléments homogènes de rang 1 , les faisceaux $(S(n))^{\sim}$ sont inversibles pour tout $n \; Z$.

Il suffit d'appliquer le cor. 1 avec d=1 , en remarquant que l'hypothèse entraîne que $X = \bigcup_{f \in S_1} D_+(f)$.

Nous poserons dans ce qui suit

(9) $$O_X(n) = (S(n))^{\sim} \quad \text{pour tout } n \in \underline{Z} ,$$

et pour tout faisceau algébrique F sur une partie ouverte U de X ,

(10) $$F(n) = F \otimes_{O_X|U} (O_X(n)|U) \quad \text{pour tout } n \in \underline{Z} .$$

Soient M, N deux S-modules gradués ; rappelons que $M \otimes_S N$ est un S-module gradué par la définition

$\rho \; \psi_{mn}$ $$(M \otimes_S N)_q = \sum_{m+n=q} \rho(M_m \otimes_S N_n)$$

où ψ_{mn} est le produit tensoriel des injections $M_m \to M$, $N_n \to N$. Pour tout $f \in S_d$ $(d>0)$, on définit un homomorphisme canonique fonctoriel de $S_{(f)}$-modules

(11) $$\lambda_f : M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} \to (M \otimes_S N)_{(f)}$$

en composant l'homomorphisme $M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} \to M_f \otimes_{S_f} N_f$ (provenant des injections $M_{(f)} \to M_f$, $N_{(f)} \to N_f$ et $S_{(f)} \to S_f$) et l'isomorphisme canonique $M_f \otimes_{S_f} N_f \to (M \otimes_S N)_f$ (chap. 0, § 1, n°3) et en notant que ce dernier conserve les degrés ; pour $x \in M_{md}$, $y \in N_{nd}$, on a donc

$$\lambda_f((x/f^m) \otimes (y/f^n)) = (x \otimes y)/f^{m+n} .$$

Il résulte aussitôt de cette définition que si $g \in S_{d'}$ $(d'>0)$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} M_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} N_{(f)} \arrow[r, "\lambda_f"] \arrow[d] & (M \otimes_S N)_{(f)} \arrow[d] \\ M_{(fg)} \otimes_{S_{(fg)}} N_{(fg)} \arrow[r, "\lambda_{fg}"] & (M \otimes_S N)_{(fg)} \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale de droite est l'homomorphisme canonique, et la flèche verticale de gauche provient des homomorphismes canoniques, est commutatif. On en conclut que les λ_f définissent un homomorphisme canonique fonctoriel de O_X-modules

(12) $$\lambda : \tilde{M} \otimes_{O_X} \tilde{N} \to (M \otimes_S N)^{\sim} .$$

Rappelons que $\mathrm{Hom}_S(M,N)$ désigne l'ensemble des homomorphismes (de tous les degrés) de modules gradués $M \to N$, et qu'il devient un S-module gradué lorsqu'on prend pour $(\mathrm{Hom}_S(M,N))_n$ l'ensemble des homomorphismes de degré n. Pour tout $f \in S_d$ $(d>0)$, on définit un homomorphisme canonique fonctoriel de $S_{(f)}$-modules

(13) $$\mu_f : (\mathrm{Hom}_S(M,N))_{(f)} \to \mathrm{Hom}_{S_{(f)}}(M_{(f)}, N_{(f)})$$

en faisant correspondre à u/f^n, où u est un homomorphisme de degré nd, l'homomorphisme $M_{(f)} \to N_{(f)}$ qui transforme x/f^m $(x \in M_{md})$ en $u(x)/f^{m+n}$. On a encore, pour $g \in S_{d'}$ $(d'>0)$, un diagramme commutatif

Archives Grothendieck Sept 59

$$\begin{array}{ccc}(\mathrm{Hom}_S(M,N))_{(f)} & \xrightarrow{\mu_f} & \mathrm{Hom}_{S_{(f)}}(M_{(f)},N_{(f)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathrm{Hom}_S(M,N))_{(fg)} & \xrightarrow{\mu_{fg}} & \mathrm{Hom}_{S_{(fg)}}(M_{(fg)},N_{(fg)})\end{array}$$

(la flèche de gauche étant l'homomorphisme canonique , celle de droite provenant des homomorphismes canoniques) . On en conclut que les μ_f définissent un homomorphisme canonique fonctoriel de O_X-modules

(14) $\quad \mu \ : \ (\mathrm{Hom}_S(M,N))^{\sim} \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_{O_X}(\tilde{M},\tilde{N})$.

Proposition 14 .- Supposons S_+ *engendré par* S_1 . *Alors* λ *est un isomorphisme ; il en est de même de* μ *si on suppose en outre que* M *soit le conoyau d'un homomorphisme d'un* S-*module gradué libre de rang fini dans un autre (ce qui sera le cas lorsque* S *est noethérien et* M *un* S-*module gradué de type fini)* .

Comme X est réunion des $D_+(f)$, où $f\in S_1$, on est ramené à prouver que λ_f et μ_f sont des isomorphismes , sous les hypothèses envisagées, lorsque f est homogène de degré 1 . Or , on définit alors une application $\underline{Z}$-bilinéaire $M_m\times N_n\to M_{(f)}\otimes_{S_{(f)}}N_{(f)}$ en faisant correspondre à (x,y) l'élément $(x/f^m)\otimes(y/f^n)$; ces applications définissent donc une application $\underline{Z}$-linéaire $M\otimes_{\underline{Z}}N\to M_{(f)}\otimes_{S_{(f)}}N_{(f)}$, et si $s\in S_h$, cette application transforme $(sx)\otimes y$ en $(s/f^h)((x/f^m)\otimes(y/f^n))$ (si $x\in M_m, y\in N_n$) . On en déduit donc uné di-homomorphisme $\rho_f : M\otimes_S N\to M_{(f)}\otimes_{S_{(f)}}N_{(f)}$ relatif à l'homomorphisme d'anneaux $S\to S_{(f)}$ qui transforme $s\in S_h$ en s/f^h . Supposons en outre que pour un élément $\sum_i(x_i\otimes y_i)$ de $M\otimes_S N$ (x_i, y_i homogènes) , on ait $f^r\sum_i(x_i\otimes y_i)=0$, autrement dit $\sum_i(f^r x_i\otimes y_i)=0$. Si x_i (resp. y_i) est de degré m_i (resp. n_i) , on en déduit $\sum_i(f^r x_i/f^{m_i+r})\otimes(y_i/f^{n_i})=0$, c'est-à-dire $\rho_f(\sum_i(x_i\otimes y_i))=0$. Par suite ρ_f se factorise en $M\otimes_S N\to(M\otimes_S N)_f\xrightarrow{\rho'_f}M_{(f)}\otimes_{S_{(f)}}N_{(f)}$; si λ'_f est la restriction de ρ'_f à $(M\otimes_S N)_{(f)}$, on vérifie aussitôt que λ_f et λ'_f sont des $S_{(f)}$-homomorphismes réciproques , d'où la première partie de la proposition.

Pour démontrer la seconde partie , supposons que M soit le conoyau d'un homomorphisme de modules gradués $P\to Q$, où P et Q sont des sommes directes d'un nombre fini de modules de la forme $S(n)$; utilisant l'exactitude à droite des foncteurs $L\to \mathrm{Hom}_S(L,N)$ et $M\to M_{(f)}$, on est aussitôt ramené à démontrer que μ_f est un isomorphisme lorsque $M=S(n)$. Or , pour tout z homogène dans N , soit u_z l'homomorphisme de $S(n)$ dans N tel que $u_z(1)=z$; on voit aussitôt que $\sigma : z\to u_z$ est un isomorphisme de degré 0 de $N(-n)$ sur $\mathrm{Hom}_S(S(n),N)$. Il lui correspond un isomorphisme $\sigma_f : (N(-n))_{(f)}\to (\mathrm{Hom}_S(S(n),N))_{(f)}$ Soit d'autre part σ'_f l'isomorphisme $N_{(f)}\to \mathrm{Hom}_{S_{(f)}}((S(n))_{(f)},N_{(f)})$ qui à tout $z'\in N_{(f)}$ fait correspondre l'homomorphisme $v_{z'}$, tel que $v_{z'}(s/f^k)=sz'/f^{n+k}$ ($s\in S_{n+k}=(S(n))_k$) ; on constate aisément que l'application composée

$$(N(-n))_{(f)}\xrightarrow{\sigma_f}(\mathrm{Hom}_S(S(n),N))_{(f)}\xrightarrow{\mu_f}\mathrm{Hom}_{S_{(f)}}((S(n))_{(f)},N_{(f)})\xrightarrow{\sigma'^{-1}_f}N_{(f)}$$

est l'isomorphisme $z/f^h\to z/f^{h-n}$ de $(N(-n))_{(f)}$ sur $N_{(f)}$; donc μ_f est un isomorphisme .

<u>Corollaire 1 .— Quels que soient m,n dans Z , on a</u>

(15) $$O_X(m)\otimes_{O_X}O_X(n)=O_X(m+n)$$

<u>à un isomorphisme canonique près</u> .

Cela résulte de la prop. 14 et de l'existence de l'isomorphisme canonique de degré 0 $S(m)\otimes_S S(n)\to S(m+n)$ qui à l'élément $1\otimes 1$ ($1\in (S(m))_{-m}$, $1\in (S(n))_{-n}$) fait correspondre l'élément $1\in (S(m+n))_{-(m+n)}$.

En particulier , pour tout $n \in Z$, on a

(15) $$O_X(n)=(O_X(1))^{\otimes n}$$

avec la convention introduite au § 1, n°3 , lorsque $n\leq 0$.

<u>Corollaire 2 .— Pour tout S-module gradué M et tout $n\in Z$, on a</u>

(16) $$(M(n))^{\sim}=\tilde{M}(n)$$

<u>à un isomorphisme canonique près</u> .

Cela résulte de la prop. 14 , des formules (9) et (10) , et de l'isomorphisme canonique de degré 0 , $M(n)\simeq M\otimes_S S(n)$ qui à tout $m\in (M(n))_h = M_{n+h}$ fait correspondre $m\otimes 1\in M_{n+h}\otimes (S(n))_{-n}\subset (M\otimes_S S(n))_h$, Dans toute la fin de ce n° , nous supposons S_+ engendré par l'ensemble S_1 des éléments homogènes de degré 1 , de sorte que $\mathcal{O}_X(1)$ est un faisceau inversible (cor.2 de la prop.13) . Pour tout $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{F}$, on posera (§ 1,n°3)

$$\Gamma_*(\mathcal{F})=\Gamma_*(\mathcal{O}_X(1),\mathcal{F})=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\Gamma(X,\mathcal{F}(n)) \ ; \tag{17}$$

rappelons en particulier que $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ est muni d'une structure d'anneau gradué (compte tenu de (15)) et $\Gamma_*(\mathcal{F})$ d'une structure de module gradué sur $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$.

Soit M un S-module gradué ; pour tout $f\in S_d$ $(d>0)$, $x\to x/1$ est un homomorphisme de groupes abéliens $M_0\to M_{(f)}$, et comme $M_{(f)}$ s'identifie canoniquement à $\Gamma(D_+(f),\widetilde{M})$, on obtient ainsi un homomorphisme de groupes abéliens $\alpha_0^f : M_0\to\Gamma(D_+(f),\widetilde{M})$. Il est clair que le diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \Gamma(D_+(f),\widetilde{M}) \arrow[d] \\ M_0 \arrow[ur, "\alpha_0^f"] \arrow[r, "\alpha_0^{fg}"'] & \Gamma(D_+(fg),\widetilde{M}) \end{tikzcd}$$

est commutatif pour tout $g\in S_{d'}$ $(d'>0)$; cela signifie que pour tout $x\in M_0$, les sections $\alpha_0^f(x)$ et $\alpha_0^g(x)$ coïncident dans $D_+(f)\cap D_+(g)$ et par suite il existe une section unique $\alpha_0(x)\in\Gamma(X,\widetilde{M})$ dont la restriction à chaque $D_+(f)$ est $\alpha_0^f(x)$. On a ainsi défini un homomorphisme de groupes abéliens $\alpha_0 : M_0\to\Gamma(X,\widetilde{M})$. Appliquant ce résultat au S-module gradué $M(n)$ $(n\in\mathbb{Z})$, on obtient pour chaque n un homomorphisme de groupes abéliens $\alpha_n : M_n=(M(n))_0\to\Gamma(X,\widetilde{M}(n))$ (compte tenu du cor.2 de la prop.14) ; d'où un homomorphisme (de degré 0) de groupes abéliens gradués :

$$\alpha : M\to\Gamma_*(\widetilde{M}) \tag{18}$$

qui dans chaque M_n coïncide avec α_n .

Si on prend en particulier $M=S$, on vérifie aussitôt (compte tenu de la définition de la multiplication dans $\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$) que $\alpha : S\to\Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ est un homomorphisme (de degré 0) d'anneaux gradués , et que pour tout S-module gradué M , (18) est un di-homomorphisme de modules gradués .

<u>Proposition 15 .- Pour tout</u> $f\in S_d$ $(d>0)$, $D_+(f)$ <u>est identique à l'ensemble des</u> $\underline{p}\in X$ <u>où la section</u> $\alpha_d(f)$ <u>de</u> $O_X(d)$ <u>ne s'annule pas</u> (§ 1,n°3)

Comme $X=\bigcup_{g\in S_1} D_+(g)$, il suffit de vérifier que , pour tout $g\in S_1$, l'ensemble des $\underline{p}\in D_+(g)$ où $\alpha_d(f)$ ne s'annule pas est identique à $D_+(fg)$. Or , la restriction de $\alpha_d(f)$ à $D_+(g)$ est la section correspondant à l'élément $f/1$ de $(S(d))_{(g)}$; par l'isomorphisme canonique $(S(d))_{(g)}\simeq S_{(g)}$ (prop.13) , cette section de $O_X(d)$ au-dessus de $D_+(g)$ s'identifie à la section de O_X au-dessus de $D_+(g)$ qui correspond à l'élément f/g^d de $S_{(g)}$; dire que cette section s'annule en $\underline{p}\in D_+(g)$ signifie que $f/g^d\in \underline{q}$, où $\underline{q}$ est l'idéal premier de $S_{(g)}$ correspondant à $\underline{p}$ (n°2,prop.4) ; par définition cela veut dire que $f\in \underline{p}$, d'où la proposition .

Soit maintenant F un O_X-Module , et posons $M=\Gamma_*(F)$; en vertu de l'existence de l'homomorphisme $\alpha : S\to\Gamma_*(O_X)$, M peut être considéré comme un S-module gradué . Pour tout $f\in S_d$ $(d>0)$, il résulte de la prop.15 que la restriction à $D_+(f)$ de la section $\alpha_d(f)$ de $O_X(d)$ est inversible ; il en est par suite de même de la restriction à $D_+(f)$ de la section $\alpha_d(f^n)$ de $O_X(nd)$, pour tout $n>0$. Soit alors

$f\,(n>0)$ $z\in M_{nd}=\Gamma(X,F(nd))$ /; s'il existe un entier $k\geq 0$ tel que la restriction à $D_+(f)$ de f^kz , c'est-à-dire la section $(z|D_+(f))(\alpha_d(f^k)|D_+(f))$ de $F((n+k)d)$ soit nulle , alors en raison de la remarque précédente , on a aussi $z|D_+(f)=0$. Cela montre qu'on définit un $S_{(f)}$-homomorphisme $\beta_f : M_{(f)}\to\Gamma(D_+(f),F)$ en faisant correspondre à l'élément z/f^n la section $(z|D_+(f))(\alpha_d(f^n)|D_+(f))^{-1}$ de F au-dessus de $D_+(f)$. On vérifie en outre aussitôt que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M_{(f)} \arrow[r, "\beta_f"] \arrow[d] & \Gamma(D_+(f),F) \arrow[d] \\ M_{(fg)} \arrow[r, "\beta_{fg}"'] & \Gamma(D_+(fg),F) \end{tikzcd}$$

est commutatif ($g \in S_{d'}, d'>0$) . Si l'on se rappelle que $M_{(f)}$ s'identifie canoniquement à $\Gamma(D_+(f),\widetilde{M})$ et que les $D_+(f)$ forment une base de la topologie de X (n°2, prop. 3) , on voit que les β_f proviennent d'un unique homomorphisme canonique de O_X-modules

(19) $$\beta \ ; \quad (\Gamma_*(F))^{\sim} \longrightarrow F$$

qui est évidemment fonctoriel .

4 . Conditions de finitude .

Lemme 3 .- Soit S un anneau gradué , à degrés positifs . Pour que S_+ soit un idéal de type fini , il faut et il suffit que S soit une S_o-algèbre de type fini .

Si S est une S_o-algèbre de type fini , on peut écrire $S=S_o[f_1,\ldots,f_n]$ où on peut supposer les f_i homogènes et de degrés >0 ; il est clair alors que les f_i forment un système de générateurs du S-module S_+ . Inversement , si S_+ , en tant que S-module , admet un système fini de générateurs g_j ($1\leq j\leq m$) , on peut supposer les g_j homogènes de degrés >0 ; montrons alors que $S=S_o[g_1,\ldots,g_m]$. En effet , il suffit de voir , par récurrence sur le degré d d'un élément homogène $f\in S_+$, que f est un polynôme par rapport aux g_j à coefficients dans S_o . Or, on a par hypothèse $f=\sum_j c_j g_j$, où $c_j \in S$, et dans cette relation , on peut évidemment remplacer c_j par sa composante homogène de degré $d-\deg(g_j)$; l'hypothèse de récurrence entraîne alors le résultat .

Lemme 4 .- Soit S un anneau gradué à degrés positifs , tel que S_+ soit un idéal de type fini . Dans ces conditions :

(i) les S_n ($n\geq 0$) sont des S_o-modules de type fini ;

(ii) pour tout S-module de type fini M , et tout $d>0$, $M^{(d)}$ est un $S^{(d)}$-module de type fini ;

(iii) pour tout $d>0$, $S^{(d)}$ est une S_o-algèbre de type fini ;

(iv) pour tout $n>0$, il existe un entier m_o tel que $S_m \subset S_+^n$ pour $m\geq m_o$.

Soit $(f_i)_{1\leq i\leq p}$ un système de générateurs homogènes de l'idéal S_+ , qui est

aussi un système de générateurs de la S_o-algèbre S (lemme 3) ; il est clair que si n_i est le degré de f_i, les produits $f_1^{r_1}\dots f_p^{r_p}$ tels que $\sum_{i=1}^{p} r_i n_i = md$ forment un système de générateurs du S_o-module S_d, d'où (i).
Soient x_j $(1 \leq j \leq m)$ des générateurs du S-module M, qu'on peut supposer homogènes, et désignons par m_j le degré de x_j ; tout élément de $M^{(d)}$ est par définition combinaison linéaire à coefficients dans S_o d'éléments de la forme $g^d f_1^{r_1}\dots f_p^{r_p} x_j$, où $r_i < d$ $(1 \leq i \leq p)$, et $m_j + \sum_{i=1}^{p} r_i n_i$ est un multiple de d ; il n'y a qu'un nombre fini de systèmes (r_i) vérifiant ces conditions, d'où (ii). De même tout élément de $S^{(d)}$ est une ~~XXXXXXX~~ combinaison linéaire à coefficients dans S_o de monômes dont chacun est produit d'un monôme par rapport aux f_i^d et d'un monôme $f_1^{r_1}\dots f_p^{r_p}$, où $r_i < d$ $(1 \leq i \leq p)$ et $\sum_{i=1}^{r} r_i n_i$ est un multiple de ~~XX~~ d ; ces derniers monômes (en nombre fini) et les f_i^d forment donc un système de générateurs de la S_o-algèbre $S^{(d)}$. Enfin, il n'y a qu'un nombre fini de systèmes (r_i) tels que $\sum_{i=1}^{r} r_i < n$, donc si m_o est le plus grande valeur des sommes $\sum_{i=1}^{r} r_i n_i$ pour ces systèmes, on voit que l'on a $S_m \subset S_+^n$ pour tout $m \geq m_o$.

<u>Proposition 16 .- (i) Si</u> S <u>est un anneau gradué noethérien</u>, X=Proj(S <u>est un schéma noethérien</u>.

(ii) <u>Si</u> S <u>est une</u> A<u>-algèbre graduée de type fini</u>, X=Proj(S) <u>est un schéma de type fini au-dessus de</u> Y=Spec(A).

(i) Si S est noethérien, l'idéal S_+ admet un système fini de générateurs homogènes f_i $(1 \leq i \leq p)$, donc (n°2, cor. 3 de la prop. 5), l'espace de base X est réunion des $D_+(f_i) = \mathrm{Spec}(S_{(f_i)})$, et tout revient à voir que chacun des $S_{(f_i)}$ est noethérien ; en vertu de la prop. 1 du ~~XX~~ n°1, on est ramené à prouver que les anneaux $S^{(d)}$ $(d > 0)$ sont noethériens. Or l'anneau $S_o \cong S/S_+$ est noethérien, et $S^{(d)}$ est une S_o-algèbre de type fini (lemme 4), d'où la ~~XXXXXXXXXXX~~ conclusion.
(ii) L'hypothèse entraîne que S_o est une A-algèbre de type fini, et S une S_o-algèbre de type fini, donc S_+ est un idéal de type fini

(lemme 3) ; comme dans [f1]) , on est ramené à prouver que les $S^{(d)}$ sont des A-algèbres de type fini (I,4,2,déf.2) ; mais cela résulte du lemme 4 et du fait que S_0 est une A-algèbre de type fini .

Nous considérerons dans ce qui suit les conditions de finitude suivantes pour un S-module gradué M :

(TF) <u>Il existe un entier n tel que le sous-module</u> $\bigoplus_{k \geqslant n} M_k$ <u>soit un S-module de type fini</u> .

(TN) <u>Il existe un entier n tel que</u> $M_k=0$ <u>pour</u> $k \geqslant n$.

<u>Proposition 17 .- Soient</u> S <u>un anneau gradué noethérien</u> , M <u>un</u> <u>S-module gradué</u> .

(i) <u>Si</u> M <u>vérifie la condition</u> (TF) , <u>le</u> O_X<u>-Module</u> $\tilde{M}$ <u>est cohérent</u> .

(ii) <u>Supposons que</u> M <u>vérifie</u> (TF) ; <u>pour que</u> $\tilde{M}=0$, <u>il faut et il suffit que</u> M <u>vérifie</u> (TN) .

La condition (TN) implique par définition $M_{(f)}=0$ pour tout f homogène dans S_+ , donc $\tilde{M}=0$. Si M vérifie (TF) , le sous-module gradué $M' = \bigoplus_{k \geqslant n} M_k$, qui est par hypothèse de type fini , est tel que M/M' satisfasse (TN) ; on a par suite $(M/M')^{\sim}=0$, et l'exactitude du foncteur $M \to \tilde{M}$ (n°3,prop.10) entraîne $\tilde{M}=\tilde{M}'$; pour prouver que $\tilde{M}$ est cohérent , on est donc ramené au cas où M est <u>de type fini</u> . La question étant locale , il suffit , puisque $S_{(f)}$ est noethérien (lemme 4 et n°1,prop.1) de prouver que $M_{(f)}$ est un $S_{(f)}$-module de type fini (I,1, 5,th.3) ; mais en vertu des lemmes 3 et 4 , $M^{(d)}$ est un $S^{(d)}$-module de type fini , et la prop.1 du n°1 établit alors notre assertion .

Supposons en outre que $\tilde{M}=0$ (M vérifiant (TF)) ; alors on a aussi $\tilde{M}'=0$ et la condition (TN) pour M' ~~XXXX~~ est identique à la condition (TN) pour M , donc pour prouver que $\tilde{M}=0$ implique que M vérifie (TN) , on peut encore se limiter au cas où M est engendré par un nombre fini d'éléments homogènes x_i ($1 \leq i \leq p$); soit d'autre part (f_j) $(1 \leq j \leq q)$ un système de générateurs homogènes de l'idéal S_+ . On a par hypothèse $M_{(f_j)}=0$ pour tout j , donc il existe un entier n tel que $f_j^n x_i=0$

quels que soient i et j . Soit n_j le degré de f_j , et soit m laplus grande valeur de $\sum_j r_j n_j$ pour les systèmes (r_j) en nombre fini tels que $\sum_j r_j \leq nq$; il est clair alors que si $k > n$ on a $S_k x_i = 0$ pour tout i ; si h est le plus grand des degrés des x_i , on en conclut que $M_k = 0$ pour $k > h+m$, ce qui termine la démonstration .

Corollaire .- Soit S un anneau gradué noethérien ; pour que $X = \mathrm{Proj}(S) = \emptyset$, il faut et il suffit qu'il existe n tel que $S_k = 0$ pour $k \geq n$ La condition $X = \emptyset$ est en effet équivalente à $O_X = S = 0$, et S est un S-module monogène .

Théorème 1 .- On suppose que S est noethérien et que S_+ est engendré par l'ensemble S_1 des éléments homogènes de degré 1 . Alors , pour tout O_X-Module quasi-cohérent F, l'homomorphisme canonique $\beta : (\Gamma_*(F))^\sim \to F$ (formule (19)) est un isomorphisme .

En effet , l'espace de base X est alors noethérien (prop.16) , et on a par suite , pour tout $f \in S_d$, un isomorphisme de $(\Gamma_*(F))_{(\alpha_d(f))}$ sur $\Gamma(D_+(f),F)$ (§ 1,n°4,cor.1 du th.2) , qui coïncide avec l'homomorphisme β_f défini au n°3 (grâce en particulier à la prop.15), puisque $(\Gamma_*(F))_{(f)}$ a été identifié à $(\Gamma_*(F))_{(\alpha_d(f))}$; cela démontre le théorème .

Remarque .- Le cor.1 du th.2 du § 1,n°4 est aussi valable si X est un schéma dont l'espace de base est quasi-compact : le th.1 est donc valable sous la seule hypothèse que S_+ est engendré par un nombre *fini* d'éléments $f_i \in S_1$, car alors X est réunion des $S_{(f_i)}$ qui sont quasi-compacts , et on sait d'autre part que X est un schéma (n°2,prop.6).

Corollaire 1 .- Tout faisceau quasi-cohérent F sur X est isomorphe à un faisceau de la forme $\tilde{M}$, où M est un S-module gradué .

Corollaire 2 .- Tout faisceau cohérent F sur X est isomorphe à un faisceau de la forme $\tilde{M}$, où M est un S-module gradué de type fini .

On peut supposer $F = \tilde{M}$ (cor.1).

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ un système de générateurs homogènes de M , et pour toute partie finie H de L , soit M_H le sous-module gradué de M engendré par les f_λ tels que $\lambda \in H$; il est clair que M est limite inductive de ses sous-modules M_H , donc F est limite inductive de ses sous-faisceaux $\tilde{M}_H$ (n°3, prop. 10) . Mais comme F est cohérent et X noethérien (prop. 16) , donc quasi-compact , il existe une partie finie H de L telle que $F = \tilde{M}_H$ (Chap. 0, § 2, n°) .

<u>Corollaire 3 .- Soit</u> F <u>un faisceau</u> ~~XXXXX~~<u>cohérent sur</u> X . <u>Il existe alors un entier</u> n_0 <u>tel que , pour tout</u> $n \geqslant n_0$, F(n) <u>soit isomorphe à un quotient d'un faisceau de la forme</u> O_X^k ($k > 0$ <u>dépendant de n</u>) .

En vertu du cor. 2 , on peut supposer $F = \tilde{M}$, où M est un S-module gradué engendré par un nombre fini d'éléments homogènes x_i ; si x_i est de degré m_i , M est donc quotient d'une somme directe finie de module $S(m_i)$; par suite (n°3, prop. 10) , on peut se borner au cas où $M = S(m)$ donc $F(n) = (S(m+n))^\sim$ (n°3, cor. 1 de la prop. 14) . On peut alors prendre $n_0 = -m$ si $m < 0$, $n_0 = 0$ si $m \geqslant 0$; en effet , on a alors $m+n \geqslant 0$ pour $n \geqslant n_0$, et l'idéal $S_{m+n} + S_{m+n+1} + \dots$ de S est de type fini , autrement dit il existe un entier k et un homomorphisme du S-module S^k sur cet idéal . Si on considère cet homomorphisme comme un homomorphisme $S^k \to S(m+n)$, on voit que son conoyau vérifie la condition (TN) , et on en conclut (prop. 17 et n°3, prop. 10) que l'homomorphisme correspondant $\tilde{S}^k \to (S(m+n))^\sim$ est <u>surjectif</u> .

<u>Corollaire 4 .- Soit</u> F <u>un faisceau cohérent sur</u> X . <u>Il existe un entier</u> n_0 <u>tel que pour tout</u> $n \geqslant n_0$, F <u>soit isomorphe à un quotient d'un faisceau</u> $(O_X(-n))^k$ (<u>k dépendant de n</u>) .

Cela résulte du cor. 3 ainsi que du n°3, cor. 1 de la prop. 14 .

<u>Corollaire 5 .- Soit</u> F <u>un faisceau cohérent sur</u> X . <u>Il existe un entier</u> n_0 <u>tel que pour</u> $n \geqslant n_0$, F(n) <u>soit engendré par un nombre fini de ses sections au-dessus de</u> X .

<u>5 . Comportements fonctoriels</u> .

Soient S, S' deux anneaux gradués à degrés positifs , φ : $S' \to S$ un homomorphisme d'anneaux gradués. Nous désignerons par $G(\varphi)$ la partie ouverte de $X=\mathrm{Proj}(S)$ complémentaire de $V_+(\varphi(S'_+))$; autrement dit, c'est la réunion des $D_+(f)$ où f parcourt l'ensemble des éléments homogènes de $\varphi(S'_+)$ (car l'intersection de S_n et de l'idéal gradué de S engendré par $\varphi(S'_+)$ est le S_0-module engendré par $\varphi(S'_n)$). La restriction à $G(\varphi)$ de l'application continue ${}^a\varphi$ de

/(I,1,3) Spec(S) dans Spec(S')/est donc une application continue de $G(\varphi)$ dans $\mathrm{Proj}(S')$, que nous noterons encore ${}^a\varphi$ par abus de langage. Si $f'\in S'_+$ et $f=\varphi(f')$, on a

(22) $$ {}^a\varphi^{-1}(D_+(f'))=D_+(f)$$

d'après la remarque précédente sur $G(\varphi)$, la formule (7) du n°2 et I,1,2, formule (5). D'autre part, l'homomorphisme φ définit canoniquement un homomorphisme $S'_{f'}\to S_f$ d'anneaux gradués, et par suite un homomorphisme $S'_{(f')}\to S_{(f)}$ par restriction aux éléments de degré 0; nous désignerons ce dernier homomorphisme par φ_f ; il lui correspond (I,1,5) un morphisme $({}^a\varphi_f,\widetilde{\varphi}_f)$: $\mathrm{Spec}(S_{(f)})\to\mathrm{Spec}(S'_{(f')})$ de schémas affines. Si on identifie canoniquement $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$ au schéma induit

/ Φ_f par $\mathrm{Proj}(S)$ sur $D_+(f)$ (n°2), on a défini un morphisme/$D_+(f)\to D_+(f')$, et ${}^a\varphi_f$ s'identifie à la restriction de ${}^a\varphi$ à $D_+(f)$. D'autre part, il est immédiat que si g' est un second élément homogène de S'_+, et $g=\varphi(g')$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} D_+(f) & \longrightarrow & D_+(f') \\ \uparrow & & \uparrow \\ D_+(fg) & \longrightarrow & D_+(f'g') \end{array}$$

est commutatif, en raison de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} S'_{(f')} & \xrightarrow{\varphi_f} & S_{(f)} \\ {\scriptstyle\omega_{f'g',f'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\omega_{fg,f}} \\ S'_{(f'g')} & \xrightarrow[\varphi_{fg}]{} & S_{(fg)} \end{array}$$

Par suite, compte tenu de la définition de $G(\varphi)$ et de la formule (7) du n°2 :

Proposition 18 .- Etant donné un homomorphisme φ : $S'\to S$ d'anneaux gradués, il existe un morphisme et un seul $({}^a\varphi,\tilde{\varphi})$ du préschéma induit $G(\varphi)$ dans $\mathrm{Proj}(S')$, tel que pour tout élément homogène $f'\in S'_+$, la restriction de ce morphisme à $D_+(f)$ (où $f=\varphi(f')$) coïncide avec le morphisme associé à l'homomorphisme φ_f : $S'_{(f')}\to S_{(f)}$.

Soient S'' un troisième anneau gradué à degrés positifs, φ' : $S''\to S'$ un homomorphisme d'anneaux gradués, et posons $\varphi''=\varphi\circ\varphi'$. En raison de (20) et de la formule ${}^a\varphi''=({}^a\varphi')\circ({}^a\varphi)$ on vérifie aussitôt que l'on a $G(\varphi'')\subset G(\varphi)$ et que, si Φ, Φ' et Φ'' sont les morphismes associés à φ, φ' et φ'', on a $\Phi''=\Phi'\circ(\Phi|G(\varphi''))$.

Supposons que S (resp. S') soit une A-algèbre graduée (resp. une A'-algèbre graduée), et soit ψ un homomorphisme $A'\to A$ tel que le diagramme

(23)
$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\psi} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xrightarrow[\varphi]{} & S \end{array}$$

soit commutatif. On peut alors considérer $G(\varphi)$ et $\mathrm{Proj}(S')$ comme des préschémas au-dessus de $\mathrm{Spec}(A)$ et $\mathrm{Spec}(A')$ respectivement ; si Φ et Ψ sont les morphismes correspondant respectivement à φ et ψ, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(\varphi) & \xrightarrow{\Phi} & \mathrm{Proj}(S') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(A) & \xrightarrow[\Psi]{} & \mathrm{Spec}(A') \end{array}$$

est alors commutatif : il suffit en effet de le démontrer pour la restriction de Φ à $D_+(f)$, où $f=\varphi(f')$, f' étant homogène dans S'_+ ; et alors cela résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{\psi} & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ S'_{(f')} & \xrightarrow[\varphi_f]{} & S_{(f)} \end{array}$$

Soient maintenant M un S-module gradué, et considérons le S'-module $M_{[\varphi]}$, qui est évidemment gradué. Soit f' homogène dans S'_+, et soit $f=\varphi(f')$; on sait (chap. 0, § 1, n°5) qu'il y a un isomorphisme canonique $(M_{[\varphi]})_{f'}\xrightarrow{\sim}(M_f)_{[\varphi_f]}$, et il est immédiat que cet isomorphisme conserve les degrés , donc il donne un isomorphisme canonique $(M_{[\varphi]})_{(f')} \simeq (M_{(f)})_{[\varphi_f]}$. Il correspond canoniquement à cet isomorphisme un isomorphisme du faisceau $(M_{[\varphi]})^{\sim}|D_+(f')$ sur le faisceau $(\Phi_f)_*(\widetilde{M}|D_+(f))$ (n°3 et I,1,6,prop.7) . En outre , si g' est un second élément homogène de S'_+ et $g=\varphi(g')$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (M_{[\varphi]})_{(f')} & \simeq & (M_{(f)})_{[\varphi_f]} \\ \downarrow & & \\ (M_{[\varphi]})_{(f'g')} & \simeq & (M_{(fg)})_{[\varphi_{fg}]} \end{array}$$

est commutatif , d'où on conclut aussitôt que l'isomorphisme $(M_{[\varphi]})^{\sim}|D_+(f'g') \simeq (\Phi_{fg})_*(\widetilde{M}|D_+(fg))$ est la restriction à $D_+(f'g')$ de $(M_{[\varphi]})^{\sim}|D_+(f') \simeq (\Phi_f)_*(\widetilde{M}|D_+(f))$. Comme Φ_f est la restriction à $D_+(f)$ du morphisme Φ , on voit donc , compte tenu de (22) :

<u>Proposition 19 .- Il existe un isomorphisme canonique fonctoriel du faisceau</u> $(M_{[\varphi]})^{\sim}$ <u>sur le faisceau image directe</u> $\Phi_*(\widetilde{M}|G(\varphi))$.

On en déduit aussitôt un isomorphisme canonique fonctoriel de l'ensemble des di-homomorphismes $M' \to M$ d'un S'-module gradué M' dans un S-module gradué M (correspondant à l'homomorphisme $\varphi : S' \to S$) , sur l'ensemble des $O_{X'}$-homomorphismes $\widetilde{M}' \to \Phi_*(\widetilde{M}|G(\varphi))$ (où on a posé $X'=\mathrm{Proj}(S')$) .

Soient A,A' deux anneaux , $\psi : A' \to A$ un homomorphisme d'anneaux , définissant un morphisme $\Psi : Y=\mathrm{Spec}(A) \to Y'=\mathrm{Spec}(A')$. Soit S' une A'-algèbre graduée à degrés positifs , et posons $S=S'\otimes_{A'}A$, qui est graduée de façon évidente ; $\varphi : s' \to s'\otimes 1$ est alors un homomorphisme d'anneaux gradués rendant commutatif le diagramme (23) . Comme ici $\varphi(S'_+)$ engendre S_+ , on a $G(\varphi)=\mathrm{Proj}(S)=X$; d'où , en posant $X'=\mathrm{Proj}(S')$, un diagramme commutatif

$$(24)\qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Phi} & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\Psi} & Y' \end{array}$$

Soit maintenant M' un S'-module gradué , et posons $M=M'\otimes_{A'}A$

qui est un S-module gradué de façon évident par les $M'_n \otimes_{A'} A$. Dans ces conditions :

<u>Proposition 20 .- Le diagramme</u> (29) <u>identifie le schéma</u> X <u>au produit</u> $X' \times_{Y'} Y$; <u>le faisceau</u> $\tilde{M}$ <u>s'identifie alors à</u> $\Phi^*(\tilde{M}') = \tilde{M}' \otimes_{Y'} O_Y$ (§ 1,n°1) .

La première assertion sera démontrée si on prouve que pour tout f' homogène dans S'_+ , on posant $f=\varphi(f')$, les restrictions de Φ et p à $D_+(f)$ identifient ce schéma au produit $D_+(f') \times_{Y'} Y$ (I,2,4,lemme 4); autrement dit , il suffit de prouver que $S_{(f)}$ s'identifie canoniquement à $S'_{(f')} \otimes_{A'} A$, ce qui est immédiat en vertu de l'existence de l'isomorphisme canonique $S_f \simeq S'_{f'} \otimes_{A'} A$ (chap.0,§ 1,n°5) conservant les degrés . De même , M_f s'identifie canoniquement à $M'_{f'} \otimes_{A'} A$ par un isomorphisme conservant les degrés (loc.cit.) , donc $M_{(f)}$ s'identifie canoniquement à $M'_{(f')} \otimes_{A'} A$, ce qui établit la seconde assertion.

<u>Proposition 21 .- Soit</u> S <u>un anneau gradué et soit</u> X=Proj(S) .

(i) <u>Si</u> $\varphi : S \to S'$ <u>est un homomorphisme surjectif d'anneaux gradués</u> , <u>le morphisme correspondant</u> Φ <u>est défini dans</u> Proj(S') <u>tout entier</u> <u>et est une immersion fermée dans</u> X .

(ii) <u>Supposons en outre</u> S <u>noethérien et engendré par l'ensemble</u> S_1 <u>des éléments homogènes de degré</u> 1 . <u>Soit</u> X' <u>un sous-préschéma fermé</u> <u>de</u> X , <u>défini par un faisceau cohérent</u> <u>J</u> <u>d'idéaux</u> . <u>Soit</u> I <u>l'idéal</u> <u>gradué</u> <u>de</u> S , <u>image réciproque de</u> $\Gamma_*(J)$ <u>par l'homomorphisme</u> $\alpha : S \to \Gamma_*(O_X)$ (n°3) , <u>et posons</u> S'=S/I . <u>Alors</u> X' <u>est le sous-préschéma associé à l'immersion fermée</u> Proj(S')$\to$X <u>correspondant à l'homomorphisme canonique</u> $S \to S'$.

(i) Comme $\varphi(S'_+)$ engendre S_+ , $G(\varphi)$=Proj(S') ; montrons que si I est le noyau de φ , Φ est une immersion fermée dont le sous-préschéma associé est défini par le faisceau $\tilde{I}$ (qui est cohérent puisque S est noethérien (n°4,prop.17)) . La question étant locale sur

X , soit $f \in S_+$ et posons $f' = \varphi(f)$; comme φ est un homomorphisme d'anneaux gradués , on vérifie aussitôt que $\varphi_{f'} : S_{(f)} \to S'_{(f')}$ est surjectif et que son noyau est $I_{(f)}$, d'où notre assertion (I,3,1).

(ii) D'après ce qui précède , on est ramené à prouver que l'homomorphisme de O_X-Modules $\tilde{I} \to O_X$ déduit de l'injection $I \to S$ est un isomorphisme de $\tilde{I}$ sur J . Or , en vertu du th.1 du n°4 et de son cor.2 , il existe un sous-S-module gradué de type fini I' de $\Gamma_*(J)$ tel que l'isomorphisme canonique $\beta : (\Gamma_*(J))^{\sim} \to J$ donne par restriction à $\tilde{I}'$ un isomorphisme $\tilde{I}' \to J$; d'autre part , comme I est de type fini , puisque S est noethérien , on peut supposer que $I' \supset \alpha(I)$. De même il existe un sous-S-module gradué T' de $\Gamma_*(O_X)$ tel que l'isomorphisme canonique $\beta : (\Gamma_*(O_X))^{\sim} \to O_X$, restreint à $\tilde{T}'$, donne un isomorphisme $\tilde{T}' \to O_X$; on peut en outre supposer que T' contient l'image $\alpha(S)$. Alors (n°3, Remarque) le morphisme $\tilde{S} \to \tilde{T}'$ est un isomorphisme . En vertu de la prop.10 du n°3 et de la prop.17 du n°4 , comme T' vérifie (TF) , on en déduit que $T'/\alpha(S)$ vérifie (TN) , autrement dit $\alpha(S_n) = T'_n$ à partir d'un certain rang ; en outre , si N est le noyau de $S \to T'$, N est un idéal gradué de S , donc de type fini , et vérifie donc aussi (TN) d'après la prop. 17 du n°4 , donc $S_n \to T'_n$ est bijectif à partir d'un certain rang . Cela étant , dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} I_n & \xrightarrow{u} & S_n \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ I'_n & \xrightarrow[u']{} & T'_n \end{array}$$

u et u' sont des injections et par définition $u(I_n)$ est l'image réciproque par α de $u'(I'_n)$; si $S_n \xrightarrow{\alpha} T'_n$ est bijectif , on en conclut que $I_n \xrightarrow{\alpha} I'_n$ est bijectif , autrement dit le noyau et le conoyau de I I' vérifient (TN) . Donc (prop.10 du n°3 et prop.17 du n°4) , I I' est un isomorphisme , ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1 .- Les hypothèses et notations étant celles de la prop.

21 (ii) , *pour que le sous-préschéma fermé* X' *soit réduit et que son espace de base soit irréductible , il suffit que l'idéal* I *soit premier* .

Cela résulte en effet des prop. 21 et 7 .

Corollaire 2 .- Soient A *un anneau* , M *un* A*-module* , S *une* A*-algèbre graduée engendrée par* S_1 . *Supposons qu'il existe un* A*-homomorphisme surjectif* $M \to S_1$. *Si* $\underline{S}_A(M)$ *désigne l'algèbre symétrique du* A*-module* M, *graduée de la façon usuelle* , $\mathrm{Proj}(S)$ *est isomorphe à un sous-préschéma fermé de* $\mathrm{Proj}(\underline{S}_A(M))$.

En effet , l'homomorphisme de A-modules $M \to S_1$ se prolonge canoniquement en un A-homomorphisme d'algèbres graduées $\underline{S}_A(M) \to S$, et par hypothèse cet homomorphisme est surjectif .

Archives Grothendieck - Sept 89

§ 4 . Morphismes projectifs et quasi-projectifs .

1 . Préschéma associé à un faisceau gradué d'algèbres .

Soient Y un préschéma , $\underline{S}$ une $\underline{O}_Y$-Algèbre graduée quasi-cohérente , à degrés positifs . Soient U un ouvert affine de Y , $A = \Gamma(U, \underline{O}_Y)$ son anneau ; par hypothèse , le faisceau $\underline{S}|U$ d'algèbres graduées est isomorphe à $\tilde{S}$, où $S = \Gamma(U,\underline{S})$ est une A-algèbre graduée ; posons $X_U = \mathrm{Proj}(\Gamma(U,\underline{S}))$. Soit $U' \subset U$ un second ouvert affine de Y , A' son anneau , j l'injection canonique $U' \to U$, qui correspond canoniquement à l'homomorphisme de restriction $A \to A'$; on a $\underline{S}|U' = j^*(\underline{S}|U)$, et par suite $S' = \Gamma(U',\underline{S})$ s'identifie canoniquement à $S \otimes_A A'$ (I,1,6,prop.8). On en conclut (§ 3,n°5,prop.20) que $X_{U'}$ s'identifie canoniquement à $X_U \times_U U'$, et par suite aussi à $f_U^{-1}(U')$, en désignant par f_U le morphisme structural $X_U \to U$ (I,3,2,cor.3 de la prop.5) . Nous désignerons par $\sigma_{U',U}$ l'isomorphisme canonique $f_U^{-1}(U') \xrightarrow{\sim} X_{U'}$ ainsi défini , par $\rho_{U',U}$ l'immersion ouverte $X_{U'} \to X_U$ obtenue en composant $\sigma^{-1}_{U',U}$ et l'injection canonique $f_U^{-1}(U') \to X_U$. Il est clair que si $U'' \subset U'$ est un troisième ouvert affine de Y , on a

$\rho_{U'',U} = \rho_{U'',U'}\rho_{U',U}$.

Proposition 1 .- Soit Y un préschéma . Pour toute $\underline{O}_Y$-Algèbre graduée quasi-cohérente $\underline{S}$ à degrés positifs , il existe un préschéma X au-dessus de Y , et un seul à un Y-isomorphisme près , ayant la propriété suivante : si f est le morphisme structural $X \to Y$, pour tout ouvert affine U de Y , il existe un isomorphisme du préschéma induit $f^{-1}(U)$ sur $X_U = \mathrm{Proj}(\Gamma(U,\underline{S}))$ tel que , si V est un second ouvert affine de Y contenu dans U , le diagramme

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} f^{-1}(V) & \xrightarrow{\sim} & X_V \\ \downarrow & & \downarrow \scriptstyle V,U \\ f^{-1}(U) & \xrightarrow{\sim} & X_U \end{array}$$

soit commutatif .

Avec les notations du début de ce n° , soit $X_{U,V}$ le préschéma induit par X_U sur $f_U^{-1}(U\cap V)$, pour deux ouverts affines quelconques U,V de Y ; nous allons définir un Y-isomorphisme $\theta_{U,V} : X_{V,U} \xrightarrow{\sim} X_{U,V}$. Pour cela , considérons un ouvert affine $W\subset U\cap V$: en composant les isomorphismes $f_U^{-1}(W)\xrightarrow{\sigma_{W,U}} X_W \xrightarrow{\sigma_{W,V}^{-1}} f_V^{-1}(W)$, on obtient un isomorphisme τ_W , et on vérifie aussitôt que si $W'\subset W$ est un ouvert affine , $\tau_{W'}$ est la restriction de τ_W à $f_U^{-1}(W')$; les τ_W sont donc bien les restrictions d'un Y-isomorphisme $\theta_{U,V}$. En outre , si U,V,W sont trois ouverts affines , $\theta'_{U,V},\theta'_{V,W},\theta'_{W,U}$ les restrictions de $\theta_{U,V},\theta_{V,W},\theta_{W,U}$ aux images réciproques de $U\cap V\cap W$ dans X_V,X_W,X_U respectivement , il résulte des définitions précédentes que l'on a $\theta'_{U,V}\circ\theta'_{V,W}\circ\theta'_{W,U}=1$. L'existence de X vérifiant les propriétés énoncées se déduit donc de I,3,8 ; son unicité à un Y-isomorphisme près est triviale , compte tenu de (1) .

Nous dirons que le préschéma X ainsi défini est <u>associé à la O_Y-Algèbre graduée $\underline{S}$</u> , et nous le noterons $\mathrm{Proj}(\underline{S})$. Il est immédiat que $\mathrm{Proj}(\underline{S})$ est <u>séparé au-dessus de</u> Y (§ 3,n°2,prop.6 et I,3,6, prop.19) , et <u>de type fini</u> sur Y si $\underline{S}$ est une O_Y-Algèbre <u>de type fini</u> .

Nous désignerons par $\underline{S}_d$ le O_Y-Module quasi-cohérent formé des éléments homogènes de degré $d>0$ de $\underline{S}$, par $\underline{S}^{(d)}$ la O_Y-Algèbre graduée quasi-cohérente somme directe des $\underline{S}_{nd}$ ($d>0, n\in \mathbb{N}$) .

<u>Proposition 2 .- Soit</u> $d>0$ <u>et soit</u> $f\in\Gamma(Y,\underline{S}_d)$. <u>Il existe une partie ouverte</u> X_f <u>de l'espace de base de</u> $X=\mathrm{Proj}(\underline{S})$ <u>ayant la propriété suivante : pour tout ouvert affine</u> U <u>de</u> Y , $X_f\cap\varphi^{-1}(U)=D_+(f|U)$ <u>dans</u> $\varphi^{-1}(U)$ <u>identifié à</u> $\mathrm{Proj}(\Gamma(U,\underline{S}))$ (φ <u>désignant le morphisme structural</u> $X\to Y$). <u>En outre, le préschéma induit sur</u> X_f <u>est affine au-dessus de Y et canoniquement isomorphe au préschéma</u> associé au faisceau d'algèbres $\underline{S}^{(d)}/(f-1)\underline{S}^{(d)}$.

On a $f|U\in\Gamma(U,\underline{S}_d)=(\Gamma(U,\underline{S}))_d$. Si U,U' sont deux ouverts affines de Y tels que $U'\subset U$, $f|U'$ est l'image canonique de $f|U$ par l'homomorphisme de restriction $\Gamma(U,\underline{S})\to\Gamma(U',\underline{S})$; donc $D_+(f|U')$ s'identiest égal au préschéma induit sur l'image réciproque $\rho^{-1}_{U',U}(D_+(f|U))$ dans X_U, (§ 3, n°5) ; d'où la première assertion. En outre, le préschéma induit sur $D_+(f|U)$ par X_U s'identifie canoniquement à $\mathrm{Spec}((\Gamma(U,S))_{(f|U)})$, ces identifications étant compatibles avec les homomorphismes de restriction ; la seconde assertion résulte donc du § 3, n°1, prop. 1 et de la Remarque suivant la prop. 13 du § 3, n°5.

On dira encore (par abus de langage) que X_f (en tant qu'ouvert dans l'espace de base X) est l'ensemble des $x \in X$ où f ne s'annule pas.

Corollaire 1 .- Si $f \in \Gamma(Y, \underline{S}_d)$, $g \in \Gamma(Y, \underline{S}_{d'})$, on a

$$(2) \qquad X_{fg} = X_f \cap X_g .$$

Il suffit en effet de considérer l'intersection des deux membres avec un ensemble $\varphi^{-1}(U)$, où U est ouvert affine dans Y, et d'appliquer la formule (7) du § 3, n°2.

Corollaire 2 .- Soit (f_α) une famille de sections de S au-dessus de Y telle que $f_\alpha \in \Gamma(Y, \underline{S}_{d_\alpha})$; si le faisceau d'idéaux engendré par cette famille contient tous les $\underline{S}_n$ à partir d'un certain rang, l'espace de base X est réunion des X_{f_α}.

En effet, pour tout ouvert affine U de Y, $\varphi^{-1}(U)$ est réunion des $X_{f_\alpha} \cap \varphi^{-1}(U)$ (§ 3, n°2, cor. 3 de la prop. 5).

Corollaire 3 .- Soit $\underline{J}$ un faisceau quasi-cohérent d'idéaux sur Y, et soit $\underline{A} = \underline{O}_Y/\underline{J}$. Posons $\underline{S} = \underline{A}[T]$, où T est une indéterminée. Alors Proj($\underline{S}$) s'identifie canoniquement au sous-préschéma fermé de Y défini par $\underline{J}$.

En appliquant le cor. 2 à l'unique section f égale à T en chaque point de X=Proj($\underline{S}$), on voit que $X_f = X$. On a ici d=1, et $\underline{S}^{(1)}/(f-1)\underline{S}^{(1)} = \underline{S}/(f-1)\underline{S}$ est canoniquement isomorphe à $\underline{A}$, d'où le corollaire.

pour la première assertion . D'autre part , supposons Y irréductible et soit (U_α) une base de la topologie de Y formée d'ouverts affines (nécessairement irréductibles); si on a démontré que chacun des $\varphi^{-1}(U_\alpha)$ est *irréductible (donc non vide)* (φ étant le morphisme structural $X\to Y$) , il s'en suivra que $\varphi^{-1}(U_\alpha)\cap\varphi^{-1}(U_\beta)$, qui contient un $\varphi^{-1}(U_\gamma)$, est non vide , et comme cela est vrai pour tout β, on en conclut que $\varphi^{-1}(U_\alpha)$ est dense dans X , et par suite que X est irréductible et $\varphi(X)$ dense dans Y .

Soit donc $Y=\mathrm{Spec}(A)$ et $\underline{S}=\tilde{S}$, où S est une A-algèbre graduée . Soit $x\in X$, $y=\varphi(x)$; l'anneau local $O_X(x)=O_x$ est isomorphe à une fibre du faisceau structural O_Z du préschéma $Z=X\times_Y \mathrm{Spec}(O_y)$ (I,2,8, prop.19) ; mais Z s'identifie à $\mathrm{Proj}(S\otimes_A A_y)=\mathrm{Proj}(S_y)$ (§ 3,n°5,prop. 20) et par hypothèse $S_y=S(y)$ est un anneau intègre . Donc le préschéma Z est réduit (§ 3,n°2,prop.7) et O_x est par suite sans élément nilpotent , ce qui prouve la première assertion .

Si $S_0=A$, A_y est un sous-anneau de S_y pour tout $y\in Y$, donc le schéma Y est réduit et chacun des A_y est intègre . Si de plus Y est irréductible , l'anneau A est intègre (I,1,1,prop.4) . Montrons que l'anneau S est *intègre* , d'où résultera la proposition (§ 3,n°2,prop.7). En premier lieu , si $f\neq 0$ est un élément de A, f n'est pas diviseur de 0 dans S ; en effet , $fg=0$ avec $g\in S$ entraîne $(f/1)(g/1)=0$ dans tout S_y ($y\in Y$) ; comme A est intègre , $f/1\neq 0$ et comme S_y est intègre on en tire $g/1=0$. Cette relation ayant lieu pour tout y , on a $g=0$ (I,1,1,th.1). On en conclut que l'homomorphisme canonique $S\to S_y$ est injectif , et comme S_y est intègre , il en est de même de S .

Corollaire .- Supposons Y *réduit et irréductible* , *et que le faisceau quasi-cohérent d'algèbres graduées* $\underline{S}$ *soit tel que* $X=\mathrm{Proj}(\underline{S})$ *soit réduit et irréductible et que* $\varphi(X)$ *soit dense dans* Y. *Soit* $\underline{S}'$ *le fais-*

ceau de $\mathcal{O}_Y$-algèbres graduées, somme directe de $\mathcal{O}_Y$ et des $\underline{S}_d$ ($d>0$), et soit $\mathcal{N}'$ le faisceau d'idéaux (gradué) de $\underline{S}'$ tel que pour tout $y\in Y$, $\mathcal{N}'(y)$ soit l'idéal de $\underline{S}'_y$ formé des éléments nilpotents. Alors $\mathcal{N}'$ est quasi-cohérent, le faisceau $\underline{S}''=\underline{S}'/\mathcal{N}'$ est intègre et $\mathrm{Proj}(\underline{S}'')$ s'identifie canoniquement à X.

On sait que l'idéal des éléments nilpotents d'un anneau gradué est un idéal gradué ; l'existence du faisceau $\mathcal{N}'$ et le fait qu'il est quasi-cohérent se démontrent comme dans I, 3, 4, prop. 8. On sait déjà (prop. 3) que $\mathrm{Proj}(\underline{S}')$ et $\mathrm{Proj}(\underline{S})$ s'identifient canoniquement, et on peut donc supposer que $S'=S$. La question étant locale sur Y (puisque $\varphi(X)$ est partout dense), on peut de plus supposer que $Y=\mathrm{Spec}(A)$ est affine et $\underline{S}=\tilde{S}$, où S est une A-algèbre graduée telle que $S_0=A$; soit N l'idéal gradué des éléments nilpotents de S. Soit $\bar{S}=S/N$ et désignons par $x\to\bar{x}$ l'homomorphisme canonique $S\to\bar{S}$. Pour tout $f\notin N$ homogène de degré $d>0$, on vérifie aussitôt que le noyau de l'homomorphisme canonique surjectif $S_{(f)}\to\bar{S}_{(\bar{f})}$, défini par $x/f^n\to\bar{x}/\bar{f}^n$ ($x\in S_{nd}$), est formé des éléments nilpotents de $S_{(f)}$; mais par hypothèse le préschéma $D_+(f)=\mathrm{Spec}(S_{(f)})$ est réduit, donc l'homomorphisme précédent est un isomorphisme, et comme le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S_{(f)} & \xrightarrow{\sim} & \bar{S}_{(\bar{f})} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{(fg)} & \xrightarrow{\sim} & \bar{S}_{(\bar{f}\bar{g})} \end{array}$$

est commutatif ($g\in S_d$, et non nilpotent), on en conclut que X est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Proj}(\bar{S})$. Comme par hypothèse $A=S_0$ est intègre, on a $\bar{S}_0=A$, et la conclusion résulte donc de la prop. [illegible] du § 3, n°2.

Proposition 3 .- Soit $\underline{S}$ une O_Y-Algèbre graduée quasi-cohérente à degrés positifs .

(i) Il existe un Y-isomorphisme canonique de Proj($\underline{S}$) sur Proj($\underline{S}^{(d)}$) , pour tout $d>0$.

(ii) Soit $\underline{S}'$ la O_Y-Algèbre graduée somme directe de O_Y et des $\underline{S}_n$ $(n>0)$ Proj($\underline{S}$) et Proj($\underline{S}'$) sont canoniquement Y-isomorphes .

(iii) Soit $\underline{L}$ un O_Y-Module inversible (§ 1,n°3) , et soit $\underline{S}_{(\underline{L})}$ la O_Y-Algèbre graduée somme directe des $\underline{S}_d \otimes L^{\otimes d}$ $(d\geq 0)$; alors Proj($\underline{S}$) et Proj($\underline{S}_{(\underline{L})}$) sont Y-isomorphes .

Dans chacun des cas il suffit de définir l'isomorphisme localement sur Y , la vérification des compatibilités usuelles avec les opérations de restriction étant triviale . On peut donc supposer Y affine , et alors (i) et (ii) résultent du § 3,n°2,Remarque ; pour (iii) , on peut de plus supposer L isomorphe à O_Y , et la proposition est alors évidente .

2 . Faisceau sur Proj($\underline{S}$) associé à un faisceau de modules gradués .

Soient Y un préschéma , $\underline{S}$ une O_Y-Algèbre graduée quasi-cohérente ,à degrés positifs , $\underline{M}$ un $\underline{S}$-Module gradué quasi-cohérent (sur (Y,O_Y) ou sur l'espace annelé $(Y,\underline{S})$, ce qui revient au même (§ 2,n °1,prop.1)) Avec les notations du n°1 , désignons par $\widetilde{\underline{M}}_U$ le faisceau quasi-cohérent de modules $(\Gamma(U,\underline{M}))^\sim$ sur X_U=Proj($\Gamma(U,S)$) ; comme $\Gamma(U',\underline{M})$ s'identifie canoniquement à $\Gamma(U,\underline{M})\otimes_A A'$, on a $\widetilde{\underline{M}}_{U'}=$ $=f^{*}_{U',U}(\widetilde{\underline{M}}_U)$ (§ 3,n°5,prop.20) .

Proposition 5 .- Il existe sur Proj($\underline{S}$)=X un O_X-Module quasi-cohérent $\widetilde{\underline{M}}$ et un seul tel que , pour tout ouvert affine U de Y , l'isomorphisme $\varphi^{-1}(U)\simeq$ Proj($\Gamma(U,\underline{S})$) (φ morphisme structural $X\to Y$) transforme $\widetilde{\underline{M}}|\varphi^{-1}(U)$ en $(\Gamma(U,\underline{M}))^\sim$.

Comme $f_{U',U}$ s'identifie au morphisme d'injection $\varphi^{-1}(U')\to\varphi^{-1}(U)$, la proposition résulte aussitôt de la relation $\widetilde{\underline{M}}_{U'}=f^{*}_{U',U}(\widetilde{\underline{M}}_U)$ et du principe de recollement des faisceaux (FAC,I,1,4).

On dit que $\tilde{\underline{M}}$ est le $\mathcal{O}_X$-Module associé au $\underline{S}$-Module gradué $\underline{M}$.

Proposition 6 .- Soit $\underline{M}$ un $\underline{S}$-Module gradué quasi-cohérent, et soit $f\in\Gamma(Y,\underline{S}_d)$ $(d>0)$. L'isomorphisme canonique χ_f de X_f sur le préschéma affine au-dessus de Y associé au faisceau d'algèbres $\underline{S}^{(d)}/(f-1)\underline{S}^{(d)}$ (n°1, prop.2) transforme $\tilde{\underline{M}}|X_f$ en le faisceau (sur ce préschéma) associé au faisceau de modules $\underline{M}^{(d)}/(f-1)\underline{M}^{(d)}$ (§ 2, n°4, prop.9).

La question étant locale sur Y, on est aussitôt ramené à la prop.1 du § 3, n°1, compte tenu de la remarque suivant la prop.20 du § 3, n°5.

Proposition 7 .- Le foncteur $\underline{M}\to\tilde{\underline{M}}$ est un foncteur covariant exact de la catégorie des $\underline{S}$-Modules gradués quasi-cohérents dans la catégorie des $\mathcal{O}_X$-Modules quasi-cohérents, qui commute aux limites inductives et aux sommes directes.

La question étant locale sur Y, se ramène à I, 1, 3, cor. 3 et 4 du §1.1 et à la prop.10 du § 3, n°3.

Proposition 8 .- Soit $f\in\Gamma(Y,\underline{S}_d)$ $(d>0)$. Sur l'ensemble ouvert X_f, le faisceau $(\underline{S}(nd))^{\sim}$ est inversible $(n\in\mathbb{Z})$, en particulier, si la $\mathcal{O}_Y$-Algèbre $\underline{S}$ est engendrée par $\underline{S}_1$, les faisceaux $(\underline{S}(n))^{\sim}$ sont inversibles pour tout $n\in\mathbb{Z}$.

Il s'agit encore de questions locales sur Y, et on est ramené à la prop.13 du § 3, n°3 et à ses corollaires.

On posera encore, pour tout $n\in\mathbb{Z}$

(3) $$\mathcal{O}_X(n)=(\underline{S}(n))^{\sim}$$

et pour tout faisceau algébrique $\mathcal{F}$ sur X

(4) $$\mathcal{F}(n)=\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X(n) .$$

Proposition 9 .- Supposons $\underline{S}$ engendrée par $\underline{S}_1$. Alors, si $\underline{M}$ et $\underline{N}$ sont deux $\underline{S}$-Modules gradués quasi-cohérents, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel

(5) $$\lambda \quad : \tilde{\underline{M}}\otimes_{\mathcal{O}_X}\tilde{\underline{N}} \simeq (\underline{M}\otimes_{\underline{S}}\underline{N})^{\sim}$$

Si de plus $\underline{M}$ est, en tout point de Y, localement isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $\underline{S}^p|U \to \underline{S}^q|U$, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel

(6) $\qquad \mu \quad : \quad (\underline{Hom}_{\underline{S}}(\underline{M},\underline{N}))^{\sim} \xrightarrow{\sim} \underline{Hom}_{O_X}(\tilde{\underline{M}},\tilde{\underline{N}})$.

Les isomorphismes λ et μ ont été définis au § 3, n°3 (prop. 14), lorsque Y est affine ; ces définitions étant locales se transportent aussitôt au cas général considéré ici .

Corollaire 1 .- Quels que soient m, n dans $\underline{Z}$, on a

(7) $$O_X(m)\otimes_{O_X}O_X(n)=O_X(m+n)$$

à un isomorphisme canonique près . En particulier

(8) $$O_X(n)=(O_X(1))^{\otimes n} .$$

Corollaire 2 .- Pour tout $\underline{S}$-Module gradué $\underline{M}$ et tout $n \in \underline{Z}$, on a

(9) $$(\underline{M}(n))^{\sim}=\tilde{\underline{M}}(n)$$

à un isomorphisme canonique près .

Cela résulte des propriétés correspondantes pour Y affine (§ 3, n°3, cor. 1 et 2 de la prop. 14).

Dans toute la fin de ce n° , nous supposons que $\underline{S}$ est engendrée par $\underline{S}_1$.

Soit p le morphisme structural $X=Proj(\underline{S}) \to Y$. Pour tout O_X-Module $\underline{F}$, nous poserons

(10) $$\underline{\Gamma}_*(\underline{F})=\bigoplus_{n\in \underline{Z}} p_*(\underline{F}(n))$$

et en particulier

(11) $$\underline{\Gamma}_*(O_X)=\bigoplus_{n\in \underline{Z}} p_*(O_X(n)) .$$

On sait (chap. 0, § 2, n°) qu'il existe un homomorphisme canonique $p_*(F)\otimes_{O_Y} p_*(G) \xrightarrow{\sim} p_*(F\otimes_{O_X}G)$ pour deux O_X-Modules F, G ; on déduit de (7) que $\underline{\Gamma}_*(O_X)$ est muni d'une structure de O_Y-Algèbre graduée , et de même (4) définit sur $\underline{\Gamma}_*(F)$ une structure de Module gradué sur $\underline{\Gamma}_*(O_X)$.

Soit $\underline{M}$ un $\underline{S}$-Module gradué quasi-cohérent . Pour tout ouvert affine U de Y , on a défini au § 3, n°3 , un homomorphisme de groupes abéliens $\alpha_{0,U} : \Gamma(U,\underline{M}_0) \to \Gamma(p^{-1}(U),\tilde{\underline{M}})$. Il est immédiat que ces ho-

(§ 3, n°5, Remarque 2 suivant prop.

homomorphismes sont compatibles avec les opérations de restriction, et définissent donc un homomorphisme de faisceaux de groupes abéliens $\alpha_0 : \underline{M}_0 \longrightarrow p_*(\widetilde{\underline{M}})$. Appliquant ce résultat à chacun des $\underline{M}_n = (\underline{M}(n))_0$, et tenant compte de (9), on définit un homomorphisme canonique fonctoriel α (de degré 0) de faisceaux de groupes abéliens gradués

(12) $\qquad \alpha \; : \; \underline{M} \to \underline{\Gamma}_*(\widetilde{\underline{M}})$.

En prenant en particulier $\underline{M}=\underline{S}$, on vérifie que $\alpha : \underline{S} \to \underline{\Gamma}_*(O_X)$ est un homomorphisme de O_Y-Algèbres graduées, et que (12) est un di-homomorphisme de Modules gradués, relatif à cet homomorphisme.

<u>Proposition 10.- Pour toute section</u> $f \in \Gamma(Y, \underline{S}_d)$, X_f <u>est identique à l'ensemble des points de</u> X <u>où</u> $\alpha_d \circ f$ <u>(considérée comme section de</u> $O_X(d)$) <u>ne s'annule pas</u> (§ 1, n°3).

(Par définition, $\alpha_d \circ f$ est une section de $p_*(O_X(d))$ au-dessus de ~~XXX~~, Y, mais une telle section est aussi par définition une section de $O_X(d)$ au-dessus de X). La définition de X_f (n°1, prop. 2) ramène au cas où Y est affine, qui a été traité au § 3, n°3, prop. 15.

Soit maintenant F un faisceau algébrique sur X, ayant la propriété que <u>chacun des</u> $p_*(F(n))$ <u>est quasi-cohérent sur</u> Y. Alors $\underline{\Gamma}_*(F) = \bigoplus_{n \in Z} p_*(F(n))$ est quasi-cohérent (I, 1, 3, cor. 4 du th. 1) et par suite le faisceau $(\underline{\Gamma}_*(F))^\sim$ est défini et est un O_X-Module quasi-cohérent. (I, 1, 3, cor. 4 du th. 1 et Pour tout ouvert affine U de Y, on a (§ 3, n°2, prop. 10)

$$
\begin{aligned}
(\Gamma(U, \bigoplus_{n \in Z} p_*(F(n))))^\sim &= \bigoplus_{n \in Z} (\Gamma(U, p_*(F(n))))^\sim \\
&= \bigoplus_{n \in Z} (\Gamma(p^{-1}(U), F(n)))^\sim = (\bigoplus_{n \in Z} \Gamma(p^{-1}(U), F(n)))^\sim = \\
&= (\Gamma_*(F|p^{-1}(U)))^\sim
\end{aligned}
$$

et par suite (§ 3, n°3) on a un homomorphisme canonique

$$
\beta_U : (\Gamma(U, \bigoplus_{n \in Z} p_*(F(n))))^\sim \to F|p^{-1}(U) .
$$

En outre, ces homomorphismes sont compatibles avec les opérations de restriction (§ 3, n°5, Remarque 2 suivant Prop. 20), et on en ~~XXXXX~~ déduit donc un homomorphisme canonique fonctoriel

(13) $\qquad \beta \quad : \quad (\underline{\Gamma}_*(\underline{F}))^{\sim} \rightarrow \underline{F}$

pour les faisceaux algébriques $\underline{F}$ sur X satisfaisant à la condition précédente .

3 . Conditions de finitude .

Proposition 11 .- Soient Y un préschéma localement noethérien , $\underline{S}$ une O_Y-Algèbre graduée quasi-cohérente engendrée par $\underline{S}_1$; on suppose en outre $\underline{S}_1$ cohérent . Alors $X=\mathrm{Proj}(\underline{S})$ est de type fini au-dessus de Y et est localement noethérien ; si en outre Y est noethérien , X est noethérien .

Tout revient à prouver la première assertion (I,4,2,prop.10) . La question étant locale sur Y , on peut supposer Y affine d'anneau noethérien A . On a alors $\underline{S}=\tilde{S}$, où $S=\Gamma(Y,\underline{S})$ et par hypothèse S est engendré par $S_1=\Gamma(Y,\underline{S}_1)$, et S_1 est un A-module de type fini (I,1,5,th.3). Alors S est une A-algèbre de type fini , et la proposition résulte du § 3,n°4,prop.16 .

Soient $\underline{S}$ une O_Y-Algèbre graduée quasi-cohérente , $\underline{M}$ un $\underline{S}$-Module gradué quasi-cohérent . Nous considérerons les conditions de finitude suivantes :

(TF') Il existe un recouvrement (U_α) de Y formé d'ouverts affines , et pour chaque α un entier n_α tel que le $(\underline{S}|U_\alpha)$-module $\bigoplus_{k \geqslant n_\alpha} (\underline{M}_k|U_\alpha)$ soit de type fini .

(TN') Il existe un recouvrement (U_α) de Y formé d'ouverts affines , et pour chaque α un entier n_α tel que $\underline{M}_k|U_\alpha=0$ pour $k \geqslant n_\alpha$.

Proposition 12 .- Soient Y un préschéma localement noethérien , $\underline{S}$ une O_Y-Algèbre graduée quasi-cohérente engendrée par $\underline{S}_1$, $\underline{S}_1$ étant supposé cohérent . Soit $\underline{M}$ un $\underline{S}$-Module gradué quasi-cohérent .

(i) Si $\underline{M}$ vérifie la condition (TF') , $\tilde{\underline{M}}$ est cohérent .

(ii) Supposons que $\underline{M}$ vérifie (TF') ; pour que $\tilde{\underline{M}}=0$, il faut et il suffit que $\underline{M}$ vérifie (TN') .

Les questions étant locales sur Y , on est ramené au cas où Y est affine d'anneau A noethérien , $\underline{S}=\tilde{S}$, où S est une A-algèbre graduée noethérienne , $\underline{M}=\tilde{M}$ où M est un S-module gradué ; la proposition résulte alors du § 3,n°4,prop.17 et de I,1,3,cor.4 du th.1.

Remarque .- Si Y est noethérien , on peut supposer dans (TF') et (TN') que le recouvrement (U_α) est fini et que les n_α sont tous égaux à un même n ; ces conditions signifient alors respectivement que $\bigoplus_{k\geqslant n} \underline{M}_k$ est un S-Module de type fini , et que $\underline{M}_k=0$ pour $k\geqslant n$.

Théorème 1 .- Soient Y un préschéma localement noethérien , $\underline{S}$ une O_Y-Algèbre graduée quasi-cohérente engendrée par $\underline{S}_1$, $\underline{S}_1$ étant supposé cohérent . Pour tout faisceau quasi-cohérent F sur $X=\mathrm{Proj}(\underline{S})$, l'homomorphisme canonique β (n°2) est défini et est un isomorphisme.

En effet , le morphisme structural $p : X\to Y$ est séparé et de type fini (prop.11) ; chacun des faisceaux $F(n)$ étant quasi-cohérent (§ 1, n°1,prop.3) , il en est de même de $p_*(F(n))$ (§ 1,n°1,cor. de la prop. 1) , donc β est défini . Pour voir que c'est un isomorphisme , on se ramène au cas où Y est affine d'anneau noethérien A , $\underline{S}=S$, où S est une A-algèbre graduée engendrée par S_1 , S_1 étant de type fini . La définition de β et le th.1 du § 3, n°4 prouvent alors le théorème .

Corollaire 1 .- Tout faisceau quasi-cohérent F sur X est isomorphe à un faisceau de la forme $\tilde{\underline{M}}$, où $\underline{M}$ est un S-Module gradué .

C'est immédiat en prenant $\underline{M}=\Gamma_*(F)$.

Corollaire 2 .- On suppose en outre Y noethérien . Si F est cohérent, on peut supposer $\underline{M}$ de type fini .

En effet , on peut supposer $F=\tilde{\underline{M}}$ (cor.1) ; $\underline{M}$ est limite inductive de ses sous-faisceaux cohérents (§ 1,n°2,cor. du th.1); on peut en outre supposer que ces sous-faisceaux $\underline{H}_\lambda$ sont gradués , comme il résulte de la démonstration du corollaire cité . La prop.7 du n°2 montre que $\tilde{\underline{M}}$ est limite inductive des $\tilde{\underline{H}}_\lambda$, donc F limite inductive des $\beta(\tilde{\underline{H}}_\lambda)$ Mais comme X est noethérien (prop.11) et F cohérent , F est égal à un des $\beta(\tilde{N}_\lambda)$ (chap.0, § 2, n°).

Corollaire 3 .- On suppose Y noethérien. Soit F un faisceau cohérent sur X . Il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, l'homomorphisme canonique $p^*(p_*(F(n))) \to F(n)$ (chap.0, § 2, n°) soit surjectif .

En effet , pour tout $x \in X$, soit U un voisinage ouvert affine de $y=p(x)$ dans Y , dont l'anneau soit noethérien . Il existe un entier $n_0(U)$ tel que pour $n \geq n_0(U)$, $F(n)|p^{-1}(U)$ soit engendré par un nombre fini de ses sections au-dessus de $p^{-1}(U)$ (§ 3, n°4, cor.5 du th.1) ; mais ces dernières sont par définition images canoniques de sections de $p^*(p_*(F(n)))$ au-dessus de $p^{-1}(U)$, donc $F(n)/p^{-1}(U)$ est égal à l'image canonique de $p^*(p_*(F(n)))|p^{-1}(U)$. Enfin , comme Y est noethérien , il existe un recouvrement fini de Y par des ouverts affines U_i d'anneaux noethériens , et en prenant pour n_0 le plus grand des $n_0(U_i)$, on achève la démonstration .

Nous verrons au chap.III, § , que sous les conditions du cor.3 , $p_*(F(n))$ est un faisceau cohérent . Mais nous avons déjà remarqué ci-dessus que $p_*(F(n))$ est quasi-cohérent , donc (§ 1, n°2, cor. du th.1) limite inductive de ses sous-faisceaux cohérents . On en déduit (chap.0, § 2, n°) que F(n) est l'image canonique d'un faisceau $p^*(G)$, où G est un sous-faisceau cohérent de $p_*(F(n))$. En d'autres termes (compte tenu de (4) et (7)) :

Corollaire 4 .- On suppose Y noethérien . Si F est un faisceau cohérent , il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, F soit isomorphe à un quotient d'un faisceau de la forme $p^*(G)(-n)$, où G est un faisceau cohérent sur Y (dépendant de n).

4 . Comportements fonctoriels .

Soient Y un préschéma , $\underline{S}$, $\underline{S}'$ deux O_Y-algèbres graduées quasi-cohérentes à degrés positifs ; posons $X=\mathrm{Proj}(\underline{S})$, $X'=\mathrm{Proj}(\underline{S}')$, et soient p, p' les morphismes structuraux de X et X'. Soit $\varphi : \underline{S} \to \underline{S}'$

un O_Y-homomorphisme d'Algèbres graduées, de degré 0. Pour tout ouvert affine U de Y, posons $S_U = \Gamma(U, \underline{S})$, $S'_U = \Gamma(U, \underline{S}')$; l'homomorphisme φ définit un homomorphisme $\varphi_U : S_U \to S'_U$ de A_U-algèbres graduées (où $A_U = \Gamma(U, O_Y)$). Il lui correspond dans $p'^{-1}(U)$ un ensemble ouvert $G(\varphi_U)$ et un morphisme $\Phi_U : G(\varphi_U) \to p^{-1}(U)$ (§ 3, n°5). En outre, en vertu de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} S_U & \xrightarrow{\varphi_U} & S'_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_V & \xrightarrow[\varphi_V]{} & S'_V \end{array}$$

(où V est un ouvert affine contenu dans U), on vérifie aussitôt que $G(\varphi_V) = G(\varphi_U) \cap p'^{-1}(V)$ et que Φ_V est la restriction de Φ_U à $G(\varphi_V)$. On a ainsi défini une partie ouverte $G(\varphi)$ de X' telle que $G(\varphi) \cap p'^{-1}(U) = G(\varphi_U)$ pour tout ouvert affine $U \subset Y$, et un Y-morphisme $\Phi : G(\varphi) \to X$, qui sera dit <u>associé</u> à φ et que nous noterons $\mathrm{Proj}(\varphi)$. Lorsque localement $\varphi(\underline{S}_+)$ engendre $\underline{S}'_+$ (en tant que O_Y-Module on a $G(\varphi) = X'$.

Soit maintenant $\underline{M}'$ un $\underline{S}'$-Module gradué quasi-cohérent, qui donne un S-Module gradué $\underline{M}'_{[\varphi]}$.

<u>Proposition 13.- Il existe un isomorphisme canonique fonctoriel du faisceau $(\underline{M}'_{[\varphi]})^{\sim}$ sur le faisceau image directe</u> $\Phi_*(\tilde{\underline{M}}' | G(\varphi))$.

On définit en effet aussitôt cet isomorphisme lorsque Y est affine (tenant compte du § 3, n°5, prop. 19), et dans le cas général il suffit de vérifier que les isomorphismes ainsi définis dans les ouverts $p^{-1}(U)$ (U ouvert affine de Y) sont compatibles avec les opérations de restriction, ce qui est immédiat.

<u>Proposition 14.- Soient</u> Y, Y' <u>deux préschémas</u>, $\psi : Y' \to Y$ <u>un morphisme</u>, $\underline{S}$ <u>une</u> O_Y<u>-Algèbre graduée quasi-cohérente</u>, $\underline{S}' = \psi^*(\underline{S})$ <u>son image réciproque : le</u> Y'<u>-préschéma</u> $\mathrm{Proj}(\underline{S}')$ <u>s'identifie canoniquement à</u> $\mathrm{Proj}(\underline{S}) \times_Y Y'$. <u>En outre si</u> $\underline{M}$ <u>est un</u> $\underline{S}$<u>-Module gradué quasi-cohérent, le faisceau</u> $(\psi^*(\underline{M}))^{\sim}$ <u>sur</u> $\mathrm{Proj}(\underline{S}')$ <u>s'identifie alors à</u> $\tilde{\underline{M}} \otimes_Y O_{Y'}$.

Notons d'abord que $\psi^*(\underline{S})$ et $\psi^*(\underline{M})$ sont quasi-cohérents (§ 1,n°1, prop.2) . Si U est un ouvert affine de Y , $U'\subset\psi^{-1}(U)$ un ouvert affin de Y', A,A' les anneaux de U et U' , on a $\underline{S}|U=\tilde{S}$, où S est une A-algèbre graduée , et $\underline{S}'|U'$ s'identifie alors à $(S\otimes_A A')^\sim$ (I,1,6,prop.8); la première assertion résulte alors de I,2,4,lemme 4 et de la prop.20 du § 3,n°5 , la vérification de la compatibilité de l'identification ainsi faite pour chaque couple U,U' avec les opérations de restriction étant immédiate. Soient $q : \mathrm{Proj}(\underline{S})\to Y$, $q' : \mathrm{Proj}(\underline{S}')\to Y'$ les morphismes structuraux ; $q'^{-1}(U')$ s'identifie alors à $q^{-1}(U)\times_U U'$, et les deux faisceaux $(\psi^*(\underline{M}))^\sim|q'^{-1}(U')$ et $(\tilde{\underline{M}}\otimes_Y O_{Y'})|q'^{-1}(U')$ s'identifient alors canoniquement tous deux à $(M\otimes_A A')^\sim$, où $M=\Gamma(U,\underline{M})$; d'où la seconde assertion , les compatibilités avec les opérations de restriction se vérifient comme d'ordinaire .

Enfin , si on pose $\underline{M}'=\psi^*(\underline{M})$, l'homomorphisme canonique $\alpha' : \underline{M}'\to\underline{\Gamma}_*(\tilde{\underline{M}}')$ (n°2) n'est autre que $\psi^*(\alpha)$. De même , soit Ψ la projection $\mathrm{Proj}(\underline{S}')\to\mathrm{Proj}(\underline{S})$; pour un faisceau algébrique F sur $\mathrm{Proj}(\underline{S})$, posons $F'=\Psi^*(F)$; si les faisceaux $q_*(F(n))$ et $q'_*(F'(n))$ sont quasi-cohérents , l'homomorphisme canonique $\beta' : (\underline{\Gamma}_*(F'))^\sim\to F'$ n'est autre que $\Psi^*(\beta)$. La vérification de ces assertions se ramène encore au cas où Y et Y' sont affines , et alors on applique la Remarque 2 du § 3,n°5 .

Proposition 15 .- *Soient Y un préschéma , $\underline{S}$ une O_Y-algèbre graduée quasi-cohérente .*

(i) *Pour tout sous-faisceau gradué quasi-cohérent $\underline{J}$ d'idéaux dans $\underline{S}$,* X' = $\mathrm{Proj}(\underline{S}/\underline{J})$ *s'identifie canoniquement à un sous-préschéma fermé de* $\mathrm{Proj}(\underline{S})$.

(ii) *Supposons en outre Y localement noethérien , $\underline{S}$ engendrée par $\underline{S}_1$ et $\underline{S}_1$ cohérent . Soit X' un sous-préschéma fermé de* $X=\mathrm{Proj}(\underline{S})$, *dé-*

fini par un faisceau cohérent $\underline{I}$ d'idéaux. Soit $\underline{J}$ le faisceau gradué d'idéaux dans $\underline{S}$, image réciproque de $\Gamma_*(\underline{I})$ par l'homomorphisme $\alpha : \underline{S} \to \Gamma_*(O_X)$. Alors X' s'identifie canoniquement à Proj$(\underline{S}/\underline{J})$.

(i) L'application canonique : $\underline{S} \to \underline{S}' = \underline{S}/\underline{J}$ étant surjective, on a vu au début de ce n° qu'il lui correspond un Y-morphisme Proj$(\underline{S}') \to$ Proj$(\underline{S})$. On est immédiatement ramené à démontrer la proposition dans le cas où Y est affine, et elle découle alors aussitôt de la prop. 21 (i) du § 3, n°5. On notera en outre que cela prouve que le sous-préschéma fermé de Proj$(\underline{S})$ auquel s'identifie Proj$(\underline{S}/\underline{J})$ est défini par le faisceau quasi-cohérent d'idéaux $\tilde{\underline{J}}$ sur Proj$(\underline{S})$.

(ii) On est ramené à démontrer que l'homomorphisme $\tilde{\underline{J}} \to O_X$ déduit de l'injection canonique $\underline{J} \to \underline{S}$, est un isomorphisme de $\tilde{\underline{J}}$ sur le faisceau $\underline{I}$, et comme la question est locale sur Y, on peut supposer Y affine d'anneau noethérien A, ce qui entraîne $\underline{S} = \tilde{S}$, où S est une A-algèbre graduée engendrée par S_1 de type fini, et par suite S est noethérien. Il suffit alors d'appliquer la prop. 21 (ii) du § 3, n° 5.

Corollaire 2. — Soient Y *un préschéma*, $\underline{S}$ *une* O_Y*-Algèbre graduée quasi-cohérente engendrée par* $\underline{S}_1$, $\underline{M}$ *un* O_Y*-Module quasi-cohérent. Supposons qu'il existe un* O_Y*-homomorphisme surjectif* $\underline{M} \to \underline{S}_1$. *Si* $\underline{S}_{O_Y}(\underline{M})$ *est la* O_Y*-Algèbre symétrique de* $\underline{M}$ (§ 2, n°8), Proj$(\underline{S})$ *est isomorphe à un sous-préschéma fermé de* Proj$(\underline{S}_{O_Y}(\underline{M}))$.

En effet, l'homomorphisme $\underline{M} \to \underline{S}_1$ se prolonge en un homomorphisme de O_Y-Algèbres graduées $\underline{S}_{O_Y}(\underline{M}) \to \underline{S}$, qui est par hypothèse surjectif.

5. Fibrés projectifs. Morphismes dans un fibré projectif.

Définition 1. — Soient Y *un préschéma*, $\underline{E}$ *un* O_Y*-Module quasi-cohérent. On appelle fibré projectif sur* Y *défini par* $\underline{E}$, *et on note* $\underline{P}(\underline{E})$, *le* Y*-préschéma* Proj$(\underline{S}_{O_Y}(\underline{E})) = P$. *Le* O_P*-Module* $O_P(1)$ (n°2) *est appelé le faisceau* fondamental *sur* P.

Archives Grothendieck sept 59

Soient $\underline{E}$,$\underline{F}$ deux O_Y-Modules quasi-cohérents , $u : \underline{E}\to\underline{F}$ un O_Y-homomorphisme ; il lui correspond canoniquement un homomorphisme $\overline{u}$: $\underline{S}_{O_Y}(\underline{E})\to\underline{S}_{O_Y}(\underline{F})$ de O_Y-Algèbres graduées . Si u est surjectif , il en est de même de $\overline{u}$, et par suite (n°4,prop.15) Proj($\overline{u}$) est une immersion fermée $\underline{P}(\underline{F})\to\underline{P}(\underline{E})$, que nous noterons $\underline{P}(u)$. ~~Si~~ on pose pour abréger $\underline{S}=\underline{S}_{O_Y}(\underline{E})$, $\underline{S}'=\underline{S}_{O_Y}(\underline{F})$, et si on désigne par $\underline{J}$ le noyau de $\overline{u}$, qui est un faisceau gradué d'idéaux , il est clair que $J(n)$ est le noyau de l'homomorphisme correspondant $\underline{S}(n)\to\underline{S}'(n)$, et par suite si $P=\underline{P}(\underline{E})$, $P'=\underline{P}(\underline{F})$, $(O_P/\underline{J})(n)$ est isomorphe à $O_P(n)/J(n)$ (n°2,prop.7 et cor.2 de la prop.9) , et ce dernier n'est autre que le faisceau $j_*(O_{P'}(n))$, en posant $j=\underline{P}(u)$ (n°4,prop.13) ; autrement dit , on a

(14) $$j_*(O_{P'}(n))=j_*(O_{P'})(n) \quad .$$

Soit maintenant $\psi : Y'\to Y$ un morphisme , et posons $\underline{E}'=\psi^*(\underline{E})$; on a alors $\underline{S}_{O_{Y'}}(\underline{E}')=\psi^*(\underline{S}_{O_Y}(\underline{E}))$ (§ 2,n°8) ; par suite (n°4,prop.14),on a

(15) $$\underline{P}(\psi^*(\underline{E}))=\underline{P}(\underline{E})\times_Y Y'$$

à un isomorphisme canonique près . En outre , $\psi^*(\underline{S}_{O_Y}(\underline{E})(n))=\underline{S}_{O_{Y'}}(\underline{E}')(n)$, donc (n°4,prop.14)

(16) $$O_{\underline{P}(\underline{E}')}(n)=O_{\underline{P}(\underline{E})}(n)\otimes_Y Y' \quad .$$

Posons $P=\underline{P}(\underline{E})$, et désignons par p le morphisme structural $P\to Y$. Comme $\underline{E}=(\underline{S}_{O_Y}(\underline{E}))_1$ par définition , on a un homomorphisme canonique $\alpha_1 : \underline{E}\to p_*(O_P(1))$ (n°2) , et par suite un homomorphisme canonique (chap.0,§ 2,n°)

(17) $$\alpha_1^\flat \quad : \quad p^*(\underline{E})\to O_P(1) \quad .$$

Lorsque $Y=\mathrm{Spec}(A)$ est affine , on explicite aisément cet homomorphisme en remontant aux définitions (§ 3,n°3) : on a alors $\underline{E}=\tilde{E}$, où E est un A-module , et $\underline{S}_{O_Y}(\underline{E})=(\underline{S}_A(E))^\sim$, d'où $P=\mathrm{Proj}(\underline{S}_A(E))$. Posons pour simplifier $S=\underline{S}_A(E)$, et notons que lorsque f parcourt E , les $D_+(f)$ forment un recouvrement de P puisque E engendre S ; on voit alors aussitôt que la restriction de (17) à $D_+(f)$ correspond canoniquement (I,1,3,cor.2 du th.1) à l'homomorphisme de $E\otimes_A S_{(f)}$ dans

$(S(1))_{(f)}$ qui, à tout élément $x \otimes 1$, fait correspondre $x/1$, et par suite, à tout élément $x \otimes (x_1 x_2 \ldots x_k / f^k)$ $(x, x_i \in E)$ fait correspondre $x x_1 x_2 \ldots x_k / f^k$. Ceci montre que lorsque Y est affine, l'homomorphisme (17) est <u>surjectif</u>, et comme cette propriété est locale sur Y, elle subsiste dans le cas général.

Soit maintenant X un Y-préschéma et $r : X \to P$ un Y-morphisme, de sorte que si q est le morphisme structural $X \to Y$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} P \arrow[d, "p"'] & X \arrow[l, "r"'] \arrow[dl, "q"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Comme le foncteur r^* est exact à droite, on déduit de l'homomorphisme surjectif (17) un homomorphisme surjectif $r^*(\alpha_1^\flat) : r^*(p^*(\underline{E})) \to$ $\to r^*(\mathcal{O}_P(1))$. Mais $r^*(p^*(\underline{E})) = q^*(\underline{E})$, et $r^*(\mathcal{O}_P(1))$ est localement isomorphe à $r^*(\mathcal{O}_P) = \mathcal{O}_X$, autrement dit c'est un faisceau <u>inversible</u> $\underline{L}_r$ sur $\mathcal{O}_X$, et on a ainsi défini un $\mathcal{O}_X$-homomorphisme <u>surjectif</u>

(18) $\qquad \varphi_r : \qquad q^*(\underline{E}) \to \underline{L}_r$.

Lorsque $Y = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, on explicite encore cet homomorphisme de la façon suivante (avec les notations ci-dessus) : étant donné $f \in E$, soit V un ouvert affine de X contenu dans $r^{-1}(D_+(f))$, et soit B son anneau, qui est une A-algèbre ; la restriction de r à V correspond à un A-homomorphisme $\omega : S_{(f)} \to B$, on a $q^*(\underline{E}) = (E \otimes_A B)^\sim$, et $\underline{L}_r = \tilde{L}_r$, où $L_r = (S(1))_{(f)} \otimes_{S_{(f)}} B_{[\omega]}$; L_r est un B-module libre monogène ayant pour base $(f/1) \otimes 1$ (cf. § 3, n°3, prop. 13), et φ_r correspond à l'homomorphisme u-1 $E \otimes_A B \to L_r$ qui transforme $x \otimes 1$ en $(x/1) \otimes 1 = (f/1) \otimes \omega(x/f)$. En outre, si $\underline{j} \in V$ est un idéal premier de B, le point $\underline{p} = r(\underline{j}) \in P$ se détermine de la façon suivante : on l'identifie canoniquement (§ 3, n°2, prop. 4) à l'idéal $\omega^{-1}(\underline{j})$ de $S_{(f)}$; ce dernier est l'ensemble des s/f^n ($s \in S_n$, $n > 0$ arbitraire) tels que $\omega(s/f^n) \in \underline{j}$.

Or la puissance tensorielle $L^{\otimes n}$ s'identifie canoniquement à la puissance symétrique $S_n(L)$ et il correspond donc à u un homomorphisme $u_n=S_n(u) : S_n(E\otimes_A B)=S_n\otimes_A B \to L^{\otimes n}$ qui transforme $s\otimes 1$ en $(f/1)^{\otimes n}\otimes\omega(s/f^n)$; comme p_n est l'ensemble des $s\in S_n$ tels que $s/f^n \in \omega^{-1}(j)$, on voit finalement que p_n est l'ensemble des éléments homogènes $s\in S_n$ (identifiés à des sections de $S_n(\mathcal{E})$) qui , par l'homomorphisme $S_n(\varphi_r)$, sont transformés en sections de $L_r^{\otimes n}$ "s'annulant" au point j (i.e. dont le germe au point j est dans l'idéal maximal de l'anneau local B_j correspondant) .

Cette description montre que la donnée de u détermine complètement l'homomorphisme ω et la restriction de r à V . Donnons nous maintenant inversement, de façon générale (X, Y et E étant fixés) un faisceau inversible arbitraire L sur X , et un homomorphisme surjectif $\varphi : q^*(E)\to L$; nous allons en déduire canoniquement un morphisme

$f=(\psi,\theta)$ $r: X\to P$. L'homomorphisme φ de O_X-modules définit un homomorphisme de O_X-algèbres

(19) $$S(\varphi) : S_{O_X}(q^*(E))\to \bigoplus_{n\geq 0} L^{\otimes n} .$$

Soit t un point de X ; pour définir $\psi(t)\in P$, on peut supposer d'abord que $Y=\mathrm{Spec}(A)$ est affine , donc $E=\tilde{E}$ et $P=\mathrm{Proj}(S)$ avec $S=S_A(E)$;

pour tout $n>0$, soit p_n l'ensemble des $s\in S_n$ ayant la propriété suivante : l'image par $S_n(\varphi)$ de la section s "s'annule" au point t . Il est immédiat que $p_1\neq E$ en raison de l'hypothèse de surjectivité et du fait que X est le support de L ; les p_n vérifient donc les conditions de la prop. 2 du § 3, n°1, et nous définirons $p=\psi(t)$ comme l'idéal premier gradué de S tel que $p\cap S_n=p_n$ pour tout $n>0$.

Pour passer au cas général , il suffit de vérifier que lorsqu'on passe d'un ouvert affine $U\subset Y$ à un ouvert affine $V\subset U$, la défini-on de $\psi(t)$ ne change pas , en supposant $q(t)\in V\subset U$; mais cela est immédiat , compte tenu de la définition de $\mathrm{Proj}(\underline{S})$ (n°1) .

Pour définir r dans un voisinage de $t\in X$, considérons encore en premier lieu le cas où Y et X sont affines, et soit $X=\mathrm{Spec}(B)$. Soit f un élément de E_1 non dans $\underline{p}=\psi(t)$; on peut d'autre part supposer que $\underline{L}$ est isomorphe à O_X , soit $\underline{L}=\tilde{L}$, où L est un B-module libre de rang 1 . Soit c un générateur de L ; l'homomorphisme ψ provient d'un homomorphisme $E\otimes_A B\to L$, qu'on peut composer avec l'homomorphisme canonique $E\to E\otimes_A B$ pour obtenir un homomorphisme de A-modules $x\to v_c(x)c$, où v_c est un homomorphisme de A-modules $E\to B$. On en déduit canoniquement un homomorphisme de A-algèbres $\overline{v}_c : \underline{S}_A(E)\to B$, et par suite un homomorphisme de A-algèbres $\omega : S_{(f)}\to B_g$, qui à tout élément $x_1x_2\ldots x_n/f^n$ $(x_i\in E)$ fait correspondre $v_c(x_1)\ldots v_c(x_n)/g^n$, où $g=v_c(f)$ Cet homomorphisme , et l'anneau B_g , sont <u>indépendants</u> du générateur c de L considéré , car si on remplace c par un autre générateur $c'=\varepsilon c$ où ε est inversible dans B , on a $v_{c'}(x)=\varepsilon^{-1}v_c(x)$. Il correspond à ω un morphisme $r_f : D(g)\to D_+(f)$ et on vérifie aussitôt (compte tenu de l'identification canonique de $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$ et de $D_+(f)$, § 3, n°2, prop. 4) que pour tout $t'\in D(g)$, on a $r_f(t')=\psi(t')$, ce qui prouve la continuité de ψ ; il est clair par ailleurs que r_f ne dépend pas du point $t\in D(g)$ initialement considéré . Enfin , si f' est un second élément de E non dans $\underline{p}$, et $g'=v_c(f')$, $r_{ff'}$ est la restriction à $D(gg')$ de r_f et de $r_{f'}$. Cela montre l'existence du morphisme r lorsque X et Y sont affines , et on passe de là aisément , d'abord au cas où Y est affine , X quelconque , puis au cas général en tenant compte de la définition de $\mathrm{Proj}(\underline{S})$ (n°1) . En outre il y a un isomorphisme canonique $\tau : \underline{L}_r\to\underline{L}$ tel que $\varphi=\tau\circ\varphi_r$; pour le définir , on peut se placer dans les conditions locales envisagées plus haut , et pour tout $x\in E$, faire correspondre à l'élément

$(x/1)\otimes 1$ de L_r en l'élément $v_o(x)e$ de L ; vu l'hypothèse de surjectivité, il suffit de vérifier que si $x/1=0$ dans $(S(1))_{(f)}$, on a $v_o(x)/1=0$ dans $B_{\mathcal{G}}$; mais la première relation signifie que $f^n x=0$ dans S_{n+1} pour un certain n, et on en conclut $\bar{v}_o(f^n x)=g^n v_o(x)=0$ dans B, d'où notre assertion.

Nous désignerons par $r_{\underline{L},\varphi}$ le morphisme $X\to P$ ainsi défini par $\underline{L}$ et φ. On vérifie aussitôt que l'on a $r_{\underline{L}_r,\varphi_r}=r$, et nous avons donc démontré le

<u>Théorème 2 .- Les applications</u> $r\to(\underline{L}_r,\varphi_r)$ <u>et</u> $(\underline{L},\varphi)\mapsto r_{\underline{L},\varphi}$ <u>mettent en correspondance biunivoque l'ensemble des Y-morphismes</u> $r : X\to P$ <u>et l'ensemble des classes de couples</u> $(\underline{L},\varphi)$, <u>où</u> $\underline{L}$ <u>est un</u> O_X<u>-module inversible et</u> φ <u>un homomorphisme surjectif</u> $(q^*(\underline{E}))\to\underline{L}$, <u>deux couples</u> $(\underline{L},\varphi)$, $(\underline{L}',\varphi')$ <u>étant équivalents s'il existe un</u> O_X<u>-isomorphisme</u> $\tau : \underline{L}\to\underline{L}'$ <u>tel que</u> $\varphi'=\tau\circ\varphi$.

<u>Corollaire 1 .- Soit</u> U <u>un ouvert de</u> Y ; <u>l'ensemble des Y-sections de</u> $\underline{P}(\underline{E})$ <u>au-dessus de</u> U <u>est en correspondance canonique biunivoque avec l'ensemble des sous-faisceaux quasi-cohérents</u> $\underline{F}$ <u>de</u> $\underline{E}|U$ <u>tels que</u> $(\underline{E}|U)/\underline{F}$ <u>soit un faisceau inversible sur</u> U.

Il suffit de prendre $X=U$ et de remarquer (avec les notations du th. 2) que $(\underline{L},\varphi)$ et $(\underline{L}',\varphi')$ sont équivalents si et seulement si φ et φ' ont <u>même noyau</u>.

<u>Corollaire 2 .- Supposons que tout</u> O_Y<u>-module inversible soit isomorphe à</u> O_Y. <u>Soient</u> V <u>le groupe</u> $\mathrm{Hom}_{O_Y}(\underline{E},O_Y)$, <u>considéré comme module sur</u> $A=\Gamma(Y,O_Y)$, <u>et soit</u> V^* <u>le sous-ensemble de</u> V <u>formé des homomorphismes surjectifs. Alors l'ensemble des Y-sections de</u> $\underline{P}(\underline{E})$ <u>au-dessus de</u> Y <u>s'identifie à</u> V^*/A^*, <u>où</u> A^* <u>est le groupe des unités de</u> A.

En particulier :

1° Le cor. 2 s'applique lorsque Y est un <u>schéma local</u> (§ 1, n°3, <u>Remarque</u>). Si Y est un préschéma quelconque, y un point de Y, $Y'=\mathrm{Spec}(k(y))$, la fibre $q^{-1}(y)$ de $\underline{P}(\underline{E})$ au-dessus de y est, d'après

(15), identifiée à $\mathrm{Proj}(S')$, où S' est l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel $\underline{E}_y \otimes_{O_y} k(y) = \underline{E}_y/\underline{m}_y\underline{E}_y = \underline{E}^y$ sur $k(y)$. Plus généralement, si K est une extension de $k(y)$, $q^{-1}(y) \otimes_{k(y)} K$ s'identifie à $\mathrm{Proj}(\underline{S}_K(\underline{E}^y \otimes_{k(y)} K))$. Le cor. 2 montre donc que les *points géométriques de $\underline{P}(\underline{E})$ à valeurs dans l'extension* K de $k(y)$, ou encore les *points géométriques de* $q^{-1}(y)$ *à valeurs dans* K, s'identifient aux éléments de l'*espace projectif* associé au *dual* $\mathrm{Hom}_K(\underline{E}^y \otimes_{k(y)} K, K)$ du K-espace vectoriel $\underline{E}^y \otimes_{k(y)} K$.

2° Supposons que Y soit affine d'anneau A, tel en outre que tout O_Y-Module inversible soit trivial (§ 1, n° 3, *Remarque*) ; prenons en outre $\underline{E} = O_Y^n$; alors, dans le cor. 2, V s'identifie à A^n (I, 1, 3, cor. 3 du th. 1), V^* à l'ensemble des systèmes $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendrant l'idéal A ; deux tels systèmes définissent la même Y-section de $\underline{P}_Y^{n-1} = \underline{P}_A^{n-1}$, autrement dit le même *point de* $\underline{P}_A^{n-1}$ *à valeurs dans* A si et seulement si l'un se déduit de l'autre par multiplication par un élément inversible de A.

Ces propriétés justifient la terminologie de "fibré projectif" pour $\underline{P}(\underline{E})$.

Remarques. - 1) Le cor. 1 du th. 2 pour $U = Y$ entraîne inversement le th. 1, car les Y-morphismes de X dans P s'identifient aux X-morphismes de X dans $P \times_Y X$, autrement dit aux X-sections de $P \times_Y X$ en vertu de la définition du produit.

2) Nous verrons au chap. IV, § que si Y est localement noethérien et connexe, et si $\underline{E}$ est cohérent et localement libre, alors tout faisceau inversible $\underline{L}$ sur $P = \underline{P}(\underline{E})$ est isomorphe à un faisceau de la forme $\underline{L}' \otimes_{O_Y} O_P(m)$, où $\underline{L}'$ est un faisceau inversible sur Y, bien déterminé à un isomorphisme près, et m est un entier bien déterminé. En d'autres termes, $H^1(P, O_P^*)$ est isomorphe à $\underline{Z} \times H^1(Y, O_Y^*)$ (§ 1, n° 3). Nous verrons aussi que $p_*(\underline{L}) = 0$ si $m < 0$ et que $p_*(\underline{L})$ est isomorphe à $\underline{L}' \otimes_{O_Y} \underline{S}^m_{O_Y}(\underline{E})$ si $m \geq 0$ ($\underline{S}^m$ désignant ici

le O_Y-Module puissance n-ème symétrique de $\underline{E}$). Si $\underline{F}$ est un O_Y-Module quasi-cohérent, tout Y-morphisme $\underline{P}(\underline{E}) \to \underline{P}(\underline{F})$ est donc déterminé par la donnée d'un faisceau inversible $\underline{L}'$ sur Y, d'un entier $m \geq 0$ et d'un O_Y-homomorphisme $\psi : \underline{F} \to \underline{L}' \otimes_{O_Y} \underline{S}^m_{O_Y}(\underline{E})$ tel que l'homomorphisme correspondant ψ^b (de faisceaux sur $\underline{P}(\underline{F})$) soit surjectif. Nous verrons aussi que si le Y-morphisme considéré est un isomorphisme (réciproque de la prop. 16), alors $m=1$ et $\underline{F}$ est isomorphe à $\underline{E} \otimes_{O_Y} \underline{L}'$. Ceci permettra aussi de déterminer le faisceau des germes d'automorphismes de $\underline{P}(\underline{E})$ comme le quotient du faisceau de groupes $\underline{\mathrm{Aut}}(\underline{E})$ (localement isomorphe à $\underline{GL}(n, O_Y)$) par O_Y^*.

Soient $\underline{E}, \underline{F}$ deux O_Y-Modules quasi-cohérents, posons $P_1 = \underline{P}(\underline{E})$, $P_2 = \underline{P}(\underline{F})$ et désignons par p_1, p_2 les morphismes structuraux $P_1 \to Y$, $P_2 \to Y$. Soit $Q = P_1 \times_Y P_2$, et soient q_1, q_2 les projections $Q \to P_1$, $Q \to P_2$; le faisceau $O_{P_1}(1) \otimes_Y O_{P_2}(1) = q_1^*(O_{P_1}(1)) \otimes_{O_Q} q_2^*(O_{P_2}(1)) = \underline{L}$ sur Q est inversible puisque $q_i^*(O_{P_i}(1))$ est localement isomorphe à $q_i^*(O_{P_i}) = O_Q$ ($i=1,2$). D'autre part, si $r = p_1 \circ q_1 = p_2 \circ q_2$ est le morphisme structural $Q \to Y$, on a $r^*(\underline{E} \otimes_{O_Y} \underline{F}) = q_1^*(p_1^*(\underline{E})) \otimes_{O_Q} q_2^*(p_2^*(\underline{F}))$; les homomorphismes surjectifs canoniques (17), $p_1^*(\underline{E}) \to O_{P_1}(1)$, $p_2^*(\underline{F}) \to O_{P_2}(1)$ donnent donc, par produit tensoriel, un homomorphisme

(20) $$\nu : r^*(\underline{E} \otimes_{O_Y} \underline{F}) \to \underline{L}$$

évidemment surjectif ; on en déduit un morphisme canonique, dit morphisme de Veronese :

$$v \quad \underline{P}(\underline{E}) \times_Y \underline{P}(\underline{F}) \to \underline{P}(\underline{E} \otimes_{O_Y} \underline{F}).$$

Proposition 16. - Le morphisme de Veronese est une immersion fermée.

La question étant locale sur Y, on peut supposer Y affine d'anneau A, de sorte que $\underline{E} = \tilde{E}$, $\underline{F} = \tilde{F}$, E et F étant deux A-modules, et $\underline{E} \otimes_{O_Y} \underline{F} = (E \otimes_A F)^\sim$; posons $S^{(1)} = \underline{S}_A(E)$, $S^{(2)} = \underline{S}_A(F)$, $S = \underline{S}_A(E \otimes_A F)$. Soient $f \in E$, $g \in F$; nous allons montrer que la restriction de v à $D_+(f) \times_Y D_+(g)$ est une immersion fermée dans $D_+(f \otimes g)$; ...

L'homomorphisme (20) correspond à l'homomorphisme $x\otimes y \to (x/1)\otimes(y/1)$ de $E\otimes_A F$ dans $L=(S^{(1)}(1))_{(f)}\otimes_{A}(S^{(2)}(1))_{(g)}$. Or , l'élément $c=(f/1)\otimes(g/1)$ est un générateur de L considéré comme $S_{\{f\}}^{(1)}\otimes_A S_{\{g\}}^{(2)}$-module (§ 3,n°3,prop.13) ; avec les notations de la démonstration du th.2 , on a donc $v_c(f\otimes g)=1$, et l'application ω de $S_{(f\otimes g)}$ dans $S_{\{f\}}^{(1)}\otimes S_{\{g\}}^{(2)}$ est telle que $\omega((x\otimes y)/(f\otimes g))=(x/f)\otimes(y/g)$, donc est un homomorphisme <u>surjectif</u> , ce qui établit notre assertion . En outre , $D_+(f)\times D_+(g)$ est l'<u>image réciproque</u> par v de $D_+(f\otimes g)$; en effet , si un point $y\in \mathrm{Proj}(S^{(1)})\times\mathrm{Proj}(S^{(2)})$ n'appartient pas à $D_+(f)\times D_+(g)$, ~~XXX~~ une au moins de ses projections sur $\mathrm{Proj}(S^{(1)})$ ~~XX~~ et $\mathrm{Proj}(S^{(2)})$ n'appartient pas à $D_+(f)$ ~~XXXX~~ (resp. $D_+(g)$) (§ 3, n°3, prop.15) , et par suite , ou bien ~~XX~~ $\alpha_1(f)$ s'annule au point $p_1(y)$, ou bien $\alpha_1(g)$ s'annule au point $p_2(y)$; on en conclut que si $y\in D_+(f')\times D_+(g')$, $(f/1)\otimes(g/1)$ (dans $(S^{(1)}(1))_{(f')}\otimes(S^{(2)}(1))_{(g')}$) s'annule au point y ; comme d'autre part par définition $f\otimes g$ ne s'annule en aucun point de $D_+(f\otimes g)$, aucun point de $D_+(f\otimes g)$ ne peut être l'image de y , ce qui prouve notre assertion , et établit la prop.18 , puisque les $D_+(f\otimes g)$ forment une base de la topologie de $\underline{P}(E\otimes_A F)$ et les $D_+(f)\times D_+(g)$ une base de la topologie de $\underline{P}(E)\times\underline{P}(F)$.

<u>Proposition 19 .- Le morphisme de Veronese est fonctoriel en $\underline{E}$ et $\underline{F}$, pour les morphismes</u> surjectifs <u>de O_Y-modules</u> .

Il faut montrer que si $\underline{E}\to\underline{E}'$ est un O_Y-homomorphisme surjectif , le diagramme

$$\begin{tikzcd} \underline{P}(\underline{E}')\times\underline{P}(\underline{F}) \arrow[r, "j\times 1"] \arrow[d, "v"] & \underline{P}(\underline{E})\times\underline{P}(\underline{F}) \\ \underline{P}(\underline{E}'\otimes\underline{F}) \arrow[r] & \underline{P}(\underline{E}\otimes\underline{F}) \end{tikzcd}$$

est commutatif , j étant l'immersion fermée $\underline{P}(\underline{E}')\to\underline{P}(\underline{E})$. Comme $j\times 1$ est une immersion fermée (I,3,2,prop.5) et que , si on pose $P_1'=\underline{P}(\underline{E}')$, on a $(j\times 1)^*(O_{P_1}(1)\otimes O_{P_2}(1))=j^*(O_{P_1}(1))\otimes O_{P_2}(1)=O_{P_1'}(1)\otimes O_{P_2}(1)$ en vertu de (14) et du § 1,n°1,cor.1 de la prop.4 , on voit que notre assertion résulte de la prop.17 (i) et (ii) .

Proposition 20 .- Soit $\psi : Y' \to Y$ un morphisme . Si $\underline{E}' = \psi^*(\underline{E})$, $\underline{F}' = \psi^*(\underline{F})$, le morphisme de Veronese $\underline{P}(\underline{E}') \times \underline{P}(\underline{F}') \to \underline{P}(\underline{E}' \otimes \underline{F}')$ s'identifie à $\nu^{Y'}$.

Posons $P'_1 = \underline{P}(\underline{E}')$, $P'_2 = \underline{P}(\underline{F}')$; on sait (formule (15)) que P'_i s'identifie à $P_i^{Y'}$ $(i=1,2)$, donc le morphisme $P'_1 \times P'_2 \to Y'$ s'identifie à $r^{Y'} = r'$. D'autre part , $\underline{E}' \otimes \underline{F}'$ s'identifie à $\psi^*(\underline{E} \otimes \underline{F})$, donc $\underline{P}(\underline{E}' \otimes \underline{F}')$ à $(\underline{P}(\underline{E} \otimes \underline{F}))^{Y'}$ (formule (15)) . Enfin $\underline{O}_{P'_1}(1) \otimes_{Y'} \underline{O}_{P'_2}(1) = L'$ s'identifie à $\underline{L} \otimes_Y Y'$, en vertu de la formule (16) de ce n° et du cor. de la prop. 6 du § 1,n°1 . L'homomorphisme canonique $r'^*(\underline{E}' \otimes \underline{F}') \to \underline{L}'$ s'identifie donc à $v^{Y'}$, et la proposition résulte de la prop.17,(iii) .

6 . Morphismes projectifs .

Définition 2 .- On dit qu'un Y-préschéma X est projectif si X est Y-isomorphe à un sous-préschéma fermé de $\underline{P}(\underline{E})$, où $\underline{E}$ est un O_Y-Module quasi-cohérent de type fini . On dit qu'un morphisme $X \to Y$ est projectif s'il fait de X un ~~morphisme~~ Y-préschéma projectif .

On notera que cette définition n'est pas de nature locale sur Y ; les contre-exemples de Nagata (Illinois J.Math.,) et Hironaka ( ) montrent que , même si X et Y sont des schémas algébriques non singuliers sur un corps algébriquement clos , X peut être localement projectif sur Y sans être projectif sur Y .

Proposition 21 .- (i) Soit $\underline{S}$ une O_Y-algèbre graduée quasi-cohérente à degrés positifs . Supposons qu'il existe un recouvrement ouvert fini (U_i) de Y tel que chacune des algèbres graduées $\Gamma(U_i, \underline{S})$ soit de type fini sur $\Gamma(U_i, O_Y)$. Alors Proj$(\underline{S})$ est projectif sur Y .

(ii) Inversement , si Y est noethérien , tout préschéma X projectif sur Y est isomorphe à un préschéma Proj$(\underline{S})$, où $\underline{S}$ est une O_Y-Algèbre graduée quasi-cohérente à degrés positifs , engendrée par $\underline{S}_1$, et $\underline{S}_1$ est de type fini .(et par suite cohérent) .

(i) résulte en effet de la prop.3 (i) du n°1 et de son corollaire, ainsi que du cor. 2 de la prop.15 du n°4 ; (ii) résulte de la prop.15 (ii) du n°4.

Proposition 22. - Un morphisme projectif est séparé et de type fini.

On sait en effet qu'il en est ainsi du morphisme structural $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \to Y$ (n°1) et une immersion fermée est séparée (I,3,6,prop.16) et de type fini (I,4,2,prop.7).

Théorème 3. - (i) Une immersion fermée est un morphisme projectif.

(ii) *Si* $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to Z$ *sont des morphismes projectifs et si* Z *est noethérien,* $g \circ f$ *est projectif.*

(iii) *Si* $f : X \to Y$ *est un* S*-morphisme projectif,* $f^{S'} : X^{S'} \to Y^{S'}$ *est projectif.*

(iv) *Si* $f : X \to Y$ *et* $g : X' \to Y'$ *sont deux* S*-morphismes projectifs,* $f \times_S g : X \times_S X' \to Y \times_S Y'$ *est projectif.*

(v) *Soient* $f : X \to Y$ *et* $g : Y \to Z$ *deux morphismes tels que* $g \circ f$ *soit projectif. Si* g *est séparé et* Y *noethérien,* f *est projectif.*

(vi) *Si* $f : X \to Y$ *est projectif et si* Y_{red} *est noethérien,* f_{red} *est projectif.*

(i) résulte de la prop.21 (i) et du cor.3 de la prop.2 du n°1. Pour prouver (iii), on identifie $X^{S'}$ à $X \times_Y Y^{S'}$ (I,2,5,cor.2 de la prop.9) et la proposition résulte de la formule (15) du n°5 lorsque $X = \mathbf{P}(\mathcal{E})$; si X est un sous-préschéma fermé de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$, $X^{S'}$ est un sous-préschéma fermé de $(\mathbf{P}(\mathcal{E}))^{S'}$ (I,3,[illegible],cor.1 de la prop.5), d'où (iii) en général. De même, pour démontrer (iv), on est aussitôt ramené au cas où $X = \mathbf{P}(\mathcal{E})$, $X' = \mathbf{P}(\mathcal{E}')$; soient p, p' les projections de $T = Y \times_S Y'$ dans Y et Y' respectivement ; d'après la formule (15) du n°5, on a $\mathbf{P}(p^*(\mathcal{E})) = \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_Y T$ et $\mathbf{P}(p'^*(\mathcal{E}')) = \mathbf{P}(\mathcal{E}') \times_{Y'} T$; d'où

$$\mathbf{P}(p^*(\mathcal{E})) \times_T \mathbf{P}(p'^*(\mathcal{E}')) = (\mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_Y T) \times_T (T \times_{Y'} \mathbf{P}(\mathcal{E}')) = \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_Y (T \times_{Y'} \mathbf{P}(\mathcal{E}'))$$
$$= \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_Y (Y \times_S \mathbf{P}(\mathcal{E}')) = \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_S \mathbf{P}(\mathcal{E}').$$

Or, $p^*(\mathcal{E})$ et $p'^*(\mathcal{E}')$ sont de type fini sur T , donc il en est de même de $p^*(\underline{E})\otimes_T p'^*(\underline{E}')$; comme $\underline{P}(p^*(\underline{E}))\times_T \underline{P}(p'^*(\underline{E}'))$ s'identifie à un sous-préschéma fermé de $\underline{P}(p^*(\underline{E})\otimes_T p'^*(\underline{E}'))$ d'après la prop.18 , cela achève de prouver (iv) . (v) et (vi) se déduisent des autres assertions par les raisonnements habituels (tenant compte de ce que $X_{red}\to X$ est une immersion fermée) . Reste donc à prouver (ii) . Comme Y est de type fini sur Z (prop.22) et que Z est supposé noethérien , Y est noethérien . Par hypothèse , X est isomorphe à un sous-préschéma fermé de $\underline{P}(\underline{E})$, où $\underline{E}$ est un O_Y-module quasicohérent de type fini , et par suite cohérent On en conclut (n°4, cor.4 du th.1) que $\underline{E}$ est isomorphe au quotient d'un faisceau de la forme $g^*(\underline{F})(n)$, où $\underline{F}$ est un O_Z-module cohérent. Donc (n°5) $\underline{P}(\underline{E})$ est isomorphe à un sous-préschéma fermé de $\underline{P}(g^*(\underline{F})(n))$ Or , comme $g^*(\underline{F})(n)=g^*(\underline{F})\otimes_{O_Y}O_Y(n)$ et que $O_Y(n)$ est inversible , $\underline{P}(g^*(\underline{F})(n))$ est isomorphe à $\underline{P}(g^*(\underline{F}))$ (n°5, prop.16) , et $\underline{P}(g^*(\underline{F}))$ est d'autre part isomorphe à $\underline{P}(\underline{F})\times_Z Y$ (n°5, formule (15)) . En vertu de (iv) et de l'hypothèse , $\underline{P}(\underline{F})\times_Z Y$ est projectif sur Z , donc il en est de même de X , qui s'identifie à un sous-préschéma fermé de $\underline{P}(\underline{F})\times_Z Y$.

<u>Théorème 4 .- Soit</u> Y <u>un préschéma localement noethérien . Tout morphisme projectif</u> $f : X\to Y$ <u>est une application fermée de l'espace de base de</u> X <u>dans celui de</u> Y .

La question étant locale sur Y (cor. du th.3) , on peut supposer Y affine , donc noethérien ; il est clair en outre qu'on peut supposer $X=\underline{P}(\underline{E})=\mathrm{Proj}(\underline{S})$, où $\underline{S}=\underline{S}_{O_Y}(\underline{E})$, $\underline{E}$ étant de type fini sur O_Y , donc cohérent . En outre , toute partie fermée de l'espace de base de X est support d'un sous-préschéma fermé (I,3,4, prop.9) ; mais un tel sous-préschéma est lui-même isomorphe à un préschéma $\underline{P}(\underline{F})$ (prop.21 (ii)) . Finalement on est donc ramené à prouver que f(X) est fermé dans Y . Or , pour tout $y \in Y$, la fibre $f^{-1}(y)$ s'identifie, en tant que préschéma, à $\mathrm{Proj}(\underline{S}) \times_Y \mathrm{Spec}(\underline{k}(y))$ (I,2,7,prop.17), donc à $\underline{P}(\underline{E}_y/\underline{m}_y\underline{E}_y)$, fibré projectif sur $\mathrm{Spec}(\underline{k}(y))$ (nº5, formule (15)). Cette fibre est vide si et seulement si $\underline{S}_{\underline{k}(y)}(\underline{E}_y/\underline{m}_y\underline{E}_y)$ satisfait à la condition (TN) (nº3, prop.12 (ii)), et comme $\underline{k}(y)$ est un corps, cela signifie que l'espace vectoriel $\underline{E}_y/\underline{m}_y\underline{E}_y$ est réduit à 0 ; mais comme $\underline{E}_y$ est un module de type fini sur $\underline{O}_y$, cela signifie que $\underline{E}_y=0$, en vertu du lemme de Nakayama. Or, comme $\underline{E}$ est un $\underline{O}_Y$-Module cohérent, l'ensemble des $y \in Y$ tels que $\underline{E}_y=0$ est ouvert (FAC, I, 2, 12, prop.2). On voit par suite que le complémentaire de $f(X)$ dans Y est ouvert.

Corollaire .- Soient X un Y-préschéma projectif, Z un Y-préschéma noethérien et séparé sur Y. Tout Y-morphisme de X dans Z est une application fermée.

Si $f : X \to Z$ est un tel morphisme et $g : Z \to Y$ le morphisme structural de Y. Il suffit de remarquer que $g \circ f$ est projectif et g séparé par hypothèse ; on peut donc appliquer le th.3 (v) qui prouve que f est projectif.

7 . Morphismes quasi-projectifs .

Définition 3 .- On dit qu'un Y-préschéma X est quasi-projectif s'il est isomorphe à un sous-préschéma d'un Y-préschéma projectif. Un morphisme $f : X \to Y$ est dit quasi-projectif s'il fait de X un Y-préschéma quasi-projectif.

Il est clair qu'un morphisme projectif est quasi-projectif.

Proposition 23 .- Un morphisme quasi-projectif $X \to Y$ est séparé ; il est de type fini lorsque Y est localement noethérien.

En effet, si X est un sous-préschéma d'un Y-préschéma projectif Z, X est séparé sur Z (I,2,6,prop.16) ; d'autre part Z est de type fini sur Y (prop.22), donc localement noethérien si Y l'est ; dans ce cas, X est donc de type fini sur Z (I,4,2,prop.7), d'où la conclusion (I,4,2,prop.8).

Archives
Grothendieck sept 89

Proposition 24 .- Soit Y un préschéma localement noethérien . Pour qu'un Y-préschéma X soit quasi-projectif , il faut et il suffit que X soit isomorphe à un ~~xxxxx~~ sous-préschéma induit sur un ouvert U d'un Y-préschéma projectif Z . On peut même supposer que U est dense dans Z .

La condition est évidemment suffisante ; elle est nécessaire , car si X est sous-préschéma d'un Y-préschéma projectif Z , Z est localement noethérien (puisque de type fini sur Y) , donc X est le préschéma induit par un sous-préschéma fermé $\bar{X}$ de Z , et X est ouvert dans $\bar{X}$ (§ 1,n°2,prop.8); comme $\bar{X}$ est projectif sur Y , la conclusion en résulte .

Proposition 25 .- (i) Un morphisme d'immersion est quasi-projectif .

(ii) Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des morphismes quasi-projectifs , et si Y est noethérien , $g \circ f$ est quasi-projectif .

(iii) Si $f : X \to Y$ est un S-morphisme quasi-projectif , $f^{S'} : X^{S'} \to Y^{S'}$ est quasi-projectif .

(iv) Si $f : X \to Y$ et $g : X' \to Y'$ sont deux S-morphismes quasi-projectifs , $f \times_S g : X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ est quasi-projectif .

(v) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes tels que $g \circ f$ soit quasi-projectif . ~~xxxx~~ Si g est séparé et Y noethérien , f est quasi-projectif .

(vi) Si $f : X \to Y$ est quasi-projectif et si Y_{red} est noethérien , f_{red} est quasi-projectif .

(i),(iii) et (iv) sont des conséquences immédiates du th.3 (i),(iii) et (iv) , compte tenu de ce que si $h : X \to Z$ est une immersion , $h^{S'} : X^{S'} \to Z^{S'}$ est une immersion (I,3,2,cor.1 de la prop.5) et si $h' : X' \to Z'$ est une seconde immersion , $h \times h'$ est une immersion (I,3,2, prop.5) . (v) et (vi) se déduisent comme d'ordinaire des autres assertions (compte tenu de ce que X_{red} , étant un sous-préschéma d'un Y-préschéma quasi-projectif , est quasi-projectif sur Y) . Reste donc à démontrer (ii) . On peut évidemment se ramener au cas où $X=\underline{P}(\underline{E})$, où $\underline{E}$ est un O_Y-Module cohérent. D'autre part , en vertu de la prop.24 ,/on peut identifier Y au sous-préschéma induit sur un ouvert d'un Z-préschéma projectif Y' . En vertu du § 1,n°2,th.1 ; $\underline{E}$ est la restriction à Y d'un $O_{Y'}$-Module cohérent $\underline{E}'$, donc , par définition (n°1,prop.1) , $\underline{P}(\underline{E})$ s'identifie à un sous-préschéma induit sur une partie ouverte de $\underline{P}(\underline{E}')$. En vertu du th.3 (ii) , $\underline{P}(\underline{E}')$ est projectif sur Z , donc $\underline{P}(\underline{E})$ est quasi-projectif sur Z .

<u>Proposition 26 .-</u> <u>Soit</u> $\underline{E}$ <u>un faisceau quasi-cohérent sur un préschéma</u> Y . <u>Il existe une immersion canonique du fibré vectoriel</u> $\underline{V}(\underline{E})$ <u>dans le fibré projectif</u> $\underline{P}(\underline{E}\oplus O_Y)$.

Posons $\underline{E}'=\underline{E}\oplus O_Y$, $\underline{S}=\underline{S}_{O_Y}(\underline{E})$, $\underline{S}'=\underline{S}_{O_Y}(\underline{E}')$, $P=\underline{P}(\underline{E}')=\mathrm{Proj}(\underline{S}')$,et soit f la section de $\underline{E}'=\underline{S}'_1$ au-dessus de Y qui en chaque point $y\in Y$ est égale à l'élément unité de O_y . Le sous-préschéma induit sur la partie ouverte P_f de P définie par la section f est affine au-dessus de Y et canoniquement isomorphe au préschéma associé au faisceau d'algèbres $\underline{S}'/(f-1)\underline{S}'$ (n°1,prop.2) ; mais $\underline{S}'$ est canoniquement isomorphe à $\underline{S}\otimes_{O_Y}\underline{S}(O_Y)=\underline{S}\otimes_{O_Y}O_Y[T]$ (T indéterminée) , f s'identifiant à $1\otimes T$; on en conclut aussitôt que $\underline{S}'/(f-1)\underline{S}'$ s'identifie canoniquement à $\underline{S}$, d'où la conclusion .

On dit que $\underline{P}(\underline{E}\oplus O_Y)$ est la <u>fermeture projective</u> de $\underline{V}(\underline{E})$.

<u>Proposition 27 .- Soit</u> Y <u>un préschéma noethérien . Tout morphisme affine de type fini</u> $f : X\to Y$ <u>est quasi-projectif</u> .

En effet , $\underline{A}=f_*(O_X)$ est un faisceau quasi-cohérent d'algèbres sur Y (§ 2,n°2,prop.5) qui est de type fini par hypothèse . Comme Y est noethérien , il y a donc un recouvrement fini (U_i) de Y par des ouverts affines tels que chaque algèbre $\Gamma(U_i,\underline{A})$ soit engendrée par un nombre fini de ses éléments s_{ij} ; soit $\underline{E}_i$ le faisceau quasi-cohérent de modules sur U_i engendré par les s_{ij}, qui est un sous-faisceau de $\underline{A}|U_i$ (considéré comme faisceau de modules) ; comme Y est noethérien et $\underline{E}_i$ de type fini, $\underline{E}_i$ est cohérent, donc est la restriction à U_i d'un sous-faisceau de modules cohérent $\underline{E}'_i$ de $\underline{A}$ (§ 1,n°2,th.1 (iii)). Soit $\underline{E}$ le O_Y-module cohérent somme des $\underline{E}'_i$; il résulte aussitôt des définitions que l'injection $\underline{E} \to \underline{A}$ se prolonge en un homomorphisme surjectif d'Algèbres $S_{O_Y}(\underline{E}) \to \underline{A}$, autrement dit (§ 2,n°3, prop.7 et I,3,1,prop.1) X est isomorphe à un sous-préschéma fermé de $\underline{V}(\underline{E})$; la proposition résulte donc de la prop.26.

<u>Proposition 28 .- Tout morphisme fini</u> $f : X \to Y$ <u>est projectif</u>.

Avec les notations de la prop.27, $\underline{A}=f_*(O_X)$ est ici un O_Y-Module de type fini et quasi-cohérent ; l'application identique $\underline{A} \to \underline{A}$ se prolonge en un homomorphisme surjectif d'Algèbres $S_{O_Y}(\underline{A}) \to \underline{A}$, donc X s'identifie à un sous-préschéma fermé de $\underline{V}(\underline{A})$, qui lui-même s'identifie (prop.26) à un sous-préschéma induit sur un ouvert de $P=\underline{P}(\underline{A} \oplus O_Y)$. D'autre part, comme X est fini sur Y, il est a fortiori fini sur P puisque P est séparé sur Y (§ 2,n°7,prop.15 (v)) ; donc l'immersion $X \to P$ est <u>fermée</u> (§ 2,n°7,prop.16), d'où la proposition.

<u>Proposition 29 .- Soient</u> Y <u>un schéma affine noethérien</u>, X <u>un schéma quasi-projectif sur</u> Y. <u>Pour tout</u> O_X-<u>Module cohérent</u> $\underline{F}$, <u>il existe un entier</u> $n>0$ <u>et un</u> O_X-<u>Module inversible</u> $\underline{L}$ <u>tels que</u> $\underline{F}$ <u>soit isomorphe à un quotient de</u> $O_X^n \otimes_{O_X} \underline{L} = \underline{L}^n$.

En effet, X peut être identifié à un préschéma induit sur un ouvert d'un Y-schéma projectif X' ; le faisceau cohérent $\underline{F}$ est alors restriction à X d'un $O_{X'}$-Module cohérent $\underline{F}'$ (§ 1,n°2,th.1 (i)) puisque X' est noethérien ; mais on sait alors que $\underline{F}'$ est isomorphe à un quotient d'un faisceau de la forme $f^*(\underline{E}) \otimes_{O_{X'}} O_{X'}(m)$, où m est un entier rationnel et $\underline{E}$ un O_Y-Module cohérent (n°4,cor.4 du th.1). Comme Y est affine, il existe $n>0$ tel que $\underline{E}$ soit isomorphe à un quotient d'un faisceau O_Y^n (I,1,5,th.3 et I,1,3,cor.4 du th. 1) ; comme f^* est exact à droite, $f^*(\underline{E})$ est un quotient de $f^*(O_Y^n) = O_X^n$, d'où la proposition.

Corollaire .- Sous les hypothèses de la prop.29, pour qu'un X-préschéma X' soit projectif (resp. quasi-projectif), il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à un sous-schéma fermé (resp. à un sous-schéma) d'un fibré projectif de la forme $\underline{P}_X^n$.

En effet, la prop.29 montre que $\underline{P}(\underline{F})$ est isomorphe à un sous-schéma formé d'un schéma $\underline{P}_X^{n-1}$ (n°5 et prop.16 du n°5).

On ignore si la prop.29 et son corollaire sont valables pour un préschéma noethérien quelconque X.

8 . Faisceaux très amples et faisceaux amples.

Définition 4 .- Soit X un Y-préschéma, f : X Y son morphisme structural. On dit qu'un faisceau inversible $\underline{L}$ sur X est très ample pour f (ou simplement très ample, si aucune confusion n'en résulte) s'il existe un O_Y-module quasi-cohérent $\underline{E}$ de type fini et une Y-immersion r de X dans $P = \underline{P}(\underline{E})$ tels que $\underline{L} = r^*(O_P(1))$. On dit qu'un faisceau inversible $\underline{L}$ sur X est ample pour f (ou simplement ample) s'il existe un entier $n > 0$ tel que $L^{\otimes n}$ soit très ample pour f.

Il est clair qu'un faisceau très ample est ample. Pour qu'il existe sur X un faisceau très ample, il faut et il suffit que X soit quasi-projectif sur Y.

Proposition 30 .- Soient $\underline{L}, \underline{L}'$ deux faisceaux inversibles sur X. Si $\underline{L}$ et $\underline{L}'$ sont très amples (resp. amples) pour un morphisme $f : X \to Y$, il en est de même de $\underline{L} \otimes \underline{L}'$.

En effet, soient $\underline{E}, \underline{E}'$ deux O_Y-modules quasi-cohérents de type fini r, r' des immersions de X dans $P = \underline{P}(\underline{E})$ et $P' = \underline{P}(\underline{E}')$ respectivement, telles que $\underline{L} = r^*(O_P(1))$, $\underline{L}' = r'^*(O_{P'}(1))$. Posons $Q = \underline{P}(\underline{E} \otimes \underline{E}')$, et considérons le morphisme de Veronese $v : P \times_Y P' \to Q$; comme r et r' sont des immersions, il en est de même de $(r,r')_Y : X \to P \times_Y P'$ (I,3,5, cor 3 de la prop.15), et comme v est une immersion (n°5, prop.18), $r'' : X \xrightarrow{(r,r')} P \times_Y P' \xrightarrow{v} Q$ est aussi une immersion. D'autre part (n°5, cor. de la prop.18), $v^*(O_Q(1))$ est isomorphe à $O_P(1) \otimes_Y O_{P'}(1)$, donc (§ 1, n°1, prop.4), $r''^*(O_Q(1))$ est isomorphe à $\underline{L} \otimes_X \underline{L}'$, ce qui démontre la proposition pour les faisceaux très amples. Comme $(\underline{L} \otimes \underline{L}')^{\otimes n} = \underline{L}^{\otimes n} \otimes \underline{L}'^{\otimes n}$, on en déduit la proposition pour les faisceaux amples.

Remarque .- Dans la démonstration de la prop.30, pour prouver que $(r,r')_Y$ est une immersion, il suffit que l'un des morphismes r, r' soit une immersion ; on voit donc qu'on peut affirmer que $\underline{L} \otimes \underline{L}'$ est très ample lorsque $\underline{L}$ est très ample et qu'il existe un homomorphisme surjectif $q^*(\underline{E}') \to \underline{L}'$, où $q : X \to Y$ est le morphisme structural, et $\underline{E}'$ un O_Y-Module quasi-cohérent de type fini.

Proposition 31 .- (i) Soit $\psi : Y' \to Y$ un morphisme. Si $\underline{L}$ est un faisceau très ample (resp. ample) sur X pour $f : X \to Y$, $\underline{L}' = \underline{L} \otimes_{O_Y} O_{Y'}$ est un faisceau très ample (resp. ample) sur $X^{Y'}$ pour $f^{Y'} : X^{Y'} \to Y'$.

(ii) Soient $\underline{K}$ un faisceau inversible sur Y, $\underline{L}$ un faisceau inversible sur X. Pour que $\underline{L}$ soit très ample (resp. ample) pour $f : X \to Y$, il faut et il suffit que $\underline{L} \otimes f^*(\underline{K})$ soit très ample (resp. ample) pour f.

(iii) Soient X, X' deux Y-préschémas, $\underline{L}$ et $\underline{L}'$ des faisceaux très amples (resp. amples) sur X et X' respectivement ; alors $\underline{L} \otimes_{O_Y} \underline{L}'$ est très ample (resp. ample) sur $X \times_Y X'$.

(iv) Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux morphismes, Z étant supposé noethérien. Soient $\underline{L}$ un faisceau très ample sur X pour le morphisme f, $\underline{K}$ un faisceau ample sur Y pour le morphisme g. Alors il existe un entier $n > 0$ tel que $\underline{L} \otimes f^*(\underline{K}^{\otimes n})$ soit très ample pour $g \circ f$.

(i) résulte de ce que, si $r : X \to \underline{P}(\underline{E}) = P$ est une immersion, il en est de même de $r^{Y'} : X^{Y'} \to \underline{P}(\underline{E}') = P'$, où $\underline{E}' = \psi^*(\underline{E})$ (I,3,2, cor.1 de la prop.5) , et on a $(r^{X'})^*(O_{P'}(1))=L'$ (n°5, prop.17) , pour prouver (ii) , notons que d'après la remarque suivant la prop.30 , si L est très ample il en est de même de $L\otimes f^*(K)$; la réciproque résulte de ce que $L=(L\otimes f^*(K))\otimes f^*(K^{-1})$; enfin , comme $(L\otimes f^*(K))^{\otimes n}=L^{\otimes n}\otimes f^*(K^{\otimes n})$, l'assertion (ii) en résulte pour les faisceaux amples . La démonstration de (iii) est tout à fait analogue à celle de la prop.30 , utilisant le fait que si on a des immersions $r : X\to \underbrace{P(E)}_{=P}$, $r' : X'\to \underbrace{P(E')}_{=P'}$, alors $r\times r'$ est une immersion de $X\times_Y X'$ dans $P(E)\times_Y P(E')$ (I,3,2,prop.5) , et de ce que l'image réciproque de $O_P(1)\otimes_Y O_{P'}(1)$ par cette immersion est $L\otimes_Y L'$ (§ 1, n°1, cor.1 de la prop.4) . Enfin , pour établir (iv) , remarquons que l'on peut en remplaçant K par $K^{\otimes n}$, supposer que K est très ample ; on a alors des immersions $r : X\to \underbrace{P(E)}_{=P}$, $r' : Y\to \underbrace{P(G)}_{=P'}$ avec $L=r^*(O_P(1))$ $K=r'^*(O_{P'}(1))$; en outre , en vertu des démonstrations du th.3 du n°6 et de la prop.25 du n°7 , il existe une immersion s de $P(E)=P$ dans $\underbrace{P(g^*(F))}_{=P''}$ (où F est un O_Z-module cohérent) telle que $s^*(O_{P''}(1))=$ $=O_P(1)$. En outre , $P(g^*(F))$ s'identifie à $P(F)\times_Z Y$, et $O_{P''}(1)$ à $O_{P(F)}(1)\otimes_Z O_Y$ (n°5, formule (16)) , donc L est l'image réciproque de ce dernier faisceau par $s\circ r$; $L\otimes f^*(K)$ est donc l'image réciproque par s r de $O_{P(F)}(1)\otimes_{O_Z} K$. Mais r' définit une immersion $1\times r'$ de $P(F)\times_Z Y$ dans $P(F)\times_Z P(G)$, et $O_{P(F)}(1)\otimes_{O_Z} K$ est l'image réciproque par $1\times r'$ de $O_{P(F)}(1)\otimes_{O_Z} O_{P(G)}(1)$; par suite $L\otimes_Y f^*(K)$ est l'image réciproque de ce dernier faisceau par une immersion de X dans $P(F)\times_Z P(G)$; il suffit enfin d'utiliser le morphisme de Veronese pour ce dernier préschéma pour établir que $L\otimes_Y f^*(K)$ est très ample pour $g\circ f$.

Corollaire 1 .- Soient X un Y-préschéma , $f : X\to Y$ son morphisme structural , $g : X\to Y'$ un Y-morphisme . Si un faisceau inversible L sur

X est très ample (resp. ample) pour f, il est très ample (resp. ample) pour g.

En effet, le morphisme $(1,g) : X \to X \times_Y Y'$ n'est autre que le morphisme graphe de g, donc est une immersion (I, 3, 5, cor. 3 de la prop. 15), et $\underline{L}$ est l'image réciproque de $\underline{L}' = \underline{L} \otimes_{O_Y} O_{Y'}$ par cette immersion ; en vertu de la prop. 31 (i), $\underline{L}'$ est l'image réciproque de $O_{P'}(1)$ par une immersion de $X \times_Y Y'$ dans $P' = \underline{P}(\underline{E}')$, d'où le corollaire.

Corollaire 2.- Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *deux morphismes, Z étant supposé noethérien. Si* $\underline{L}$ *est un faisceau ample sur X pour f,* $\underline{K}$ *un faisceau ample sur Y pour g,* $\underline{L} \otimes f^*(\underline{K})$ *est ample sur X pour* $g \circ f$.

Comme $(\underline{L} \otimes f^*(\underline{K}))^{\otimes n} = \underline{L}^{\otimes n} \otimes f^*(\underline{K}^{\otimes n})$, cela résulte de la prop. 31 (iv).

Corollaire 3.- Si, dans le cor. 2, on suppose de plus f fini, alors $f^*(\underline{K})$ *est ample pour* $g \circ f$.

En effet, en vertu du cor. 2, il suffit de montrer que O_X est alors très ample pour f. Or, pour l'immersion de $X' = \underline{V}(\underline{E})$ dans $\underline{P}(\underline{E} \oplus O_Y) = P$ définie dans la prop. 26, on constate sans peine que l'image réciproque de $O_P(1)$ n'est autre que $O_{X'}$. D'autre part, si $\underline{A} = f_*(O_X)$, on a défini dans la prop. 28 une immersion de X dans $X' = \underline{V}(\underline{A})$, et l'image réciproque de $O_{X'}$ par cette immersion est O_X ; d'où notre assertion.

9. Caractérisation des faisceaux amples.

Soient $q : X \to Y$ un morphisme de préschémas, $\underline{S}$ une O_Y-algèbre graduée en degrés positifs ; $q^*(\underline{S})$ est alors une O_X-algèbre graduée (chap. 0, §). Considérons sur X un faisceau inversible $\underline{L}$, et la O_X-algèbre graduée $\underline{S}' = \bigoplus_{n \geq 0} \underline{L}^{\otimes n}$; supposons donné un O_X-homomorphisme de O_X-algèbres graduées $\varphi : q^*(\underline{S}) \to \underline{S}'$, tel que $\varphi_n : q^*(\underline{S}_n) \to \underline{L}^{\otimes n}$ soit <u>surjectif</u> lorsque n est assez grand. Nous allons voir qu'on peut déduire de φ un morphisme $r_{\underline{L},\varphi}=(\psi,\theta)$ de X dans Proj($\underline{S}$) de façon canonique, en généralisant le procédé décrit au n°5 (que les considérations qui suivent sont destinées à remplacer).

Soit $x \in X$; pour définir $\psi(x) \in P=\text{Proj}(\underline{S})$, on peut supposer d'abord que $Y=\text{Spec}(A)$ est affine et $\underline{S}=\tilde{S}$, où S est une A-algèbre graduée, pour tout $n>0$, soit $\underline{p}_n$ l'ensemble des $s \in S_n$ tels que

$\varphi_n(s')$ (où s' est la section de $q^*(\underline{S})$ correspondant à s)

s'annule au point x. L'hypothèse de surjectivité et le fait que X est le support de chacun des $\underline{L}^{\otimes n}$ impliquent que $\underline{p}_n \neq S_n$ pour n assez grand ; les $\underline{p}_n$ vérifient par suite les conditions de la prop. 2 du § 3, n°1, et on définit $\underline{p}=\psi(x)$ comme l'idéal premier gradué de S tel que $\underline{p} \cap S_n = \underline{p}_n$ pour tout $n>0$. Pour passer au cas général, il suffit de vérifier que lorsqu'on passe d'un ouvert affine $U \subset Y$ à un ouvert affine $V \subset U$, la définition de $\psi(x)$ ne change pas, en supposant que $q(x) \in V \subset U$; ce qui est immédiat, compte tenu de la définition de Proj($\underline{S}$) (n°1).

Pour définir r dans le voisinage de $x \in X$, considérons encore en premier lieu le cas où X et Y sont affines, et soit X=Spec(B) ; on peut d'autre part supposer que $\underline{L}$ est isomorphe à O_X, soit $\underline{L}=\tilde{L}$, où L est un B-module libre de rang 1. Soit c un générateur de L, de sorte que $c^{\otimes n}$ est un générateur de $L^{\otimes n}$; on peut alors écrire pour tout n, $\varphi_n(s \otimes 1) = v_n(s)c^{\otimes n}$, où v_n est un homomorphisme $S_n \to B$ de A-modules ; en outre on a par hypothèse, pour $s \in S_n$, $s' \in S_m$, $v_{n+m}(ss')=v_n(s)v_m(s')$. Soit $f \in S_d$ ($d>0$) et posons $g=v_d(f)$; nous allons définir un homomorphisme ω de A-algèbres $S_{(f)} \to B_g$; il suffit, pour $s \in S_{nd}$, de poser $\omega(s/f^n)=v_{nd}(s)/g^n$. En outre, cet homomorphisme et l'anneau B_g sont <u>indépendants</u> du générateur c choisi, car tout autre générateur de

L est de la forme $\varepsilon c=c'$, où ε est inversible dans B ; les homomorphismes v'_n correspondants sont donc tels que $v'_n(s)=\varepsilon^{-n}v_n(s)$ et comme $g'=\varepsilon^{-d}g$, notre assertion en résulte. Il correspond donc à ω un morphisme $r_f : D(g)\to D_+(f)$ et on vérifie aussitôt (compte tenu de l'identification canonique de $\mathrm{Spec}(S_{(f)})$ et de $D_+(f)$, § 3, n°2, prop. 4) que pour tout $x'\in D(g)$, on a $r_f(x')=\psi(x')$; il est clair par ailleurs que r_f ne dépend pas du point $x\in D(g)$ initialement considéré. Enfin, si $f'\in S_{d'}$ ($d'>0$) est un second élément homogène, et $g'=v_{d'}(f')$, on vérifie aussitôt que $r_{ff'}$ est la restriction de r_f et de $r_{f'}$ à $D(gg')$. Cela montre l'existence du morphisme r lorsque X et Y sont affines ; on passe de là aisément d'abord au cas où Y est affine, X quelconque, puis au cas général en tenant compte de la définition de $\mathrm{Proj}(\underline{S})$ (n°1).

Proposition 32. — Soient Y *un préschéma localement noethérien*, X *un* Y*-préschéma de type fini sur* Y, $q : X\to Y$ *le morphisme structural. Soient* $\underline{S}$ *une* $\mathcal{O}_Y$*-Algèbre graduée en degrés positifs*, $\underline{L}$ *un* $\mathcal{O}_X$*-Module inversible*, φ *un homomorphisme de* $\mathcal{O}_X$*-Algèbres graduées* $q^*(\underline{S})\to\bigoplus_{n\geqslant 0}\underline{L}^{\otimes n}$, *surjectif dans les degrés assez grands ; soit* $r=r_{\underline{L},\varphi}$ *le morphisme* $X\to P=\mathrm{Proj}(\underline{S})$ *correspondant. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *r est un homéomorphisme de* X *sur le sous-espace* $r(X)$ *de* P.

(ii) *Pour tout couple de points* x, y *de* X *tels que* $x\notin\overline{\{y\}}$ *et* $q(x)\in\overline{\{q(y)\}}$, *il existe un voisinage* U *de* $q(x)$ *dans* Y, *un entier* $n>0$ *et une section* s *de* $\underline{S}_n$ *au-dessus de* U, *tels que, si* s' *est la section correspondante de* $q^*(\underline{S}_n)$ *au-dessus de* $q^{-1}(U)$, *l'image de* s' *par* φ *est une section de* $\underline{L}^{\otimes n}$ *nulle en* y *et non nulle en* x.

Il est immédiat que (i) entraîne (ii), car on a dans les hypothèses de (ii), $r(x)\notin\overline{\{r(y)\}}$, et comme on peut supposer $Y=\mathrm{Spec}(A)$ affine, avec $\underline{S}=\tilde{S}$, il existe $f\in S_d$ (pour un $d>0$) tel que $r(x)\in D_+(f)$ et $r(y)\notin D_+(f)$, et la section $s=f$ répond à la question.

Pour prouver que (ii) entraîne (i), il suffit de montrer que, pour

~~XXXX~~ tout $x \in X$ et tout voisinage ouvert V de x , il existe un voisinage ouvert V' de $r(x)$ dans P tel que ~~XXX~~ $r^{-1}(V')$ soit contenu dans V . La question étant locale sur Y , on peut supposer Y affine , donc noethérien , et X est alors aussi noethérien ; l'ensemble fermé $X-V$ est donc réunion de ses composantes en nombre fini , qui sont de la forme $\overline{\{y\}}$ ($y \in X$) ; on est par suite ramené au cas où $V=X-\overline{\{y\}}$ avec $x \notin \overline{\{y\}}$. Si $q(x) \notin \overline{\{q(y)\}}$, il suffit de prendre pour V' l'image réciproque dans P de $Y-\overline{\{q(y)\}}$. Sinon , on peut appliquer la condition (ii) et prendre pour V' l'ensemble ~~XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX~~ ouvert P_s des $z \in P$ où s ne s'annule pas (n°1, prop.2) ; il résulte de la définition de r que $r^{-1}(V')$ ne contient pas y .

Corollaire 1 .- Supposons que la O_Y-Algèbre S soit de type fini . Pour que $r_{L,\varphi}$ soit une immersion , il faut et il suffit que les conditions équivalentes de la prop.32 soient vérifiées , et en outre que l'on ait la ~~XXX~~ propriété suivante : pour tout $x \in X$ et tout $\alpha \in O_x$ il existe un entier $n>0$ et deux sections u,v de S_n au-dessus d'un ~~voisinage~~ ouvert U de $q(x)$ telles que , si u',v' sont les images par φ des sections correspondantes de $q^*(S_n)$ au-dessus de $q^{-1}(U)$, on ait $v'(x) \neq 0$, et que α soit égal au germe de la section u'/v' au point x

Notons que $P=Proj(S)$ est alors de type fini sur Y , donc r est un Y-morphisme de type fini (I,4,2,cor.2 de la prop.9) ; comme on suppose que r est un homéomorphisme de X sur $r(X)$, pour prouver que c'est une immersion , il suffit ~~XXXXX~~ de montrer que c'est une immersion locale , et par suite de montrer que pour tout $x \in X$, $\theta^{\flat}_x$ est un épimorphisme de $O_{\psi(x)}$ sur O_x (I,4,3,prop.16 (i)) . On se ramène donc aussitôt au cas où X et Y sont affines , et où α est le germe d'une section définie au-dessus de X tout entier ; la définition de r donnée ci-dessus prouve alors que α est bien l'image par $\theta^{\flat}_x$ d'un du germe de section $(u/v)_{\psi(x)}$ lorsque la condition de l'énoncé est remplie, et la réciproque est immédiate.

Corollaire 2.- Supposons que S soit de type fini et que pour tout ouvert affine $U \subset Y$, *il existe un entier* $m > 0$ *tel que, pour tout entier* $n > 0$ *et toute section* t *de* $\underline{L}^{\otimes nm}$ *au-dessus de* $q^{-1}(U)$, *il existe une section* s *de* $\underline{S}_{nm}$ *au-dessus de* U *telle que* $t = \varphi_{nm}(s')$, *où* s' *est la section correspondante de* $q^{*}(\underline{S}_{nm})$ *au-dessus de* $q^{-1}(U)$. *Alors si* r *est un homéomorphisme de* X *sur* $r(X)$, r *est une immersion de* X *dans* P.

Il faut vérifier la condition du cor. 1. Prenons pour U un ouvert affine contenant $q(x)$; α est le germe d'une section λ de $\mathcal{O}_X$ au-dessus d'un voisinage ouvert $V \subset q^{-1}(U)$ de x, et en vertu de la prop. 32, on peut supposer qu'il existe un voisinage affine ouvert $W \subset U$ de $q(x)$ et une section v de $\underline{S}_k$ au-dessus de W tels que, si v' est la section correspondante de $\underline{L}^{\otimes k}$ au-dessus de $q^{-1}(W)$, V soit l'ensemble des points de X où v' ne s'annule pas. Il existe alors un entier $h > 0$ tel que $\lambda v'^{\otimes h}$ se prolonge en une section de $\underline{L}^{\otimes kh}$ au-dessus de $q^{-1}(W)$ (§ 1, n°4, th. 2). On peut évidemment supposer h de la forme mn, (n correspondant à l'ouvert affine W) et la section prolongée est donc de la forme u', correspondant à une section u de $\underline{S}_{kh}$ au-dessus de W ; comme $\alpha = (u'/v'^{h})_x$, la condition du cor. 1 est satisfaite.

Nous utiliserons surtout les critères précédents lorsque $\underline{S} = \underline{S}_{\mathcal{O}_Y}(\underline{E})$, $\underline{E}$ étant un $\underline{\mathcal{O}}_Y$-Module quasi-cohérent ; tout épimorphisme $\varphi : q^{*}(\underline{E}) \to \underline{L}$ définit alors un épimorphisme (encore noté φ) $\underline{S} \to \underline{S}' = \bigoplus_{n \geq 0} \underline{L}^{\otimes n}$, et le morphisme $r_{\underline{L},\varphi}$ est alors celui qui a été noté de cette façon au n°5.

Proposition 33 .- Supposons Y noethérien, les hypothèses sur X, q, S et L étant les mêmes que ~~dans~~ le cor.1 de la prop.32 . Supposons en outre que $r_{L,\varphi}$ soit une immersion . Alors il existe un entier $n>0$, un sous-O_Y-Module cohérent E_n de S_n tel que la restriction de φ_n à $q^*(E_n)$ soit un épimorphisme $q^*(E_n) \to L^{\otimes n}$ et que le morphisme correspondant de X dans $P(E_n)$ soit une immersion , autrement dit L est ample.

Soit W un ouvert de Proj(S) tel que r(X) soit fermé dans X (I,3,1); par définition W est réunion d'une famille (W_α) d'ouverts affines de la forme $D_+(f_\alpha)$, où f_α est une section de S_{n_α} au-dessus d'un ouvert affine U_α de Y . Par hypothèse X est noethérien (q étant de type fini) donc quasi-compact , et il en est de même de r(X) homéomorphe à X ; il existe par suite une sous-famille finie $(W_i)_{1\leq i\leq\mu}$ de (W_α) et qui recouvre r(X) ; en outre comme $D_+(f^h)=D_+(f)$, on peut supposer les f_i de même degré n , n étant de plus choisi assez grand pour que φ_n soit surjectif . Soit $V_i=r^{-1}(W_i)$; le sous-préschéma induit par X sur V_i est isomorphe à un sous-préschéma fermé de W_i , donc est affine et son anneau $A(V_i)$ est isomorphe à un anneau quotient de $A(W_i)$. Comme S est une O_Y-Algèbre de type fini , on peut en outre supposer n choisi tel que $S^{(n)}$ soit engendré par S_n (n°1,cor. de la prop.3) ; on peut remplacer S par $S^{(n)}$ (n°1,prop.3) . Posons $E_i=\Gamma(U_i,S_n)$, $A_i=\Gamma(U_i,O_Y)$ et $S'_i=S_{A_i}(E_i)$; les hypothèses entraînent que $A(W_i)$ est une A_i-algèbre quotient de $(S'_i)_{(f_i)}$. Comme q est de type fini , $A(V_i)$ est une A_i-algèbre de type fini (I,4,2, prop.6) ; considérons un système fini de générateurs de $A(V_i)$ sur A_i ; comme $A(V_i)$ est une algèbre quotient de $(S'_i)_{(f_i)}$, ces générateurs sont images d'éléments de la forme $g_{ij}/f_i^{m_i}$, où $g_{ij}\in S^{m_i}_{A_i}(E_i)$ $(1\leq j\leq\lambda_i)$. D'ailleurs , pour chaque i , f_i et les g_{ij} sont des polynômes à coefficients dans A_i par rapport à un nombre fini d'éléments de E_i ; soit R_i la partie finie de E_i formée de tous les éléments intervenant de cette façon . Notons d'autre part que l'on peut supposer les W_i choisis de façon que $\underline{L}|V_i$ soit de la forme $\widetilde{L_i}$, où L_i est un module monogène libre sur $A(V_i)$; comme $q^*(\underline{S}_n)|V_i \to \underline{L}^{\otimes n}|V_i$ est surjectif par hypothèse , il existe un élément h_i de E_i dont l'image par φ_n (qui est une section de $\underline{L}^{\otimes n}$ au-dessus de $q^{-1}(U_i)$) donne par restriction à V_i un générateur de $L_i^{\otimes n}$ (I,1,3, cor.2 et 4 du th.1) ; soit $R_i'=R_i\cup\{h_i\}$. Le sous-faisceau $\underline{E}_i''$ de $\underline{S}_n|U_i$ engendré par les éléments de R_i' est de type fini , donc cohérent puisque U_i est noethérien ; il existe par suite un sous-faisceau cohérent $\underline{E}_i'$ de $\underline{S}_n$ induisant $\underline{E}_i''$ sur U_i (§ 1,n°2,th.2) ; si $\underline{E}$ est le sous-faisceau de $\underline{S}_n$ somme des $\underline{E}_i'$, il est clair que $\underline{E}$ est cohérent et que la restriction φ' de φ_n à $q^*(\underline{E})$ est un épimorphisme sur $\underline{L}^{\otimes n}$. Considérons alors dans $\underline{P}(\underline{E})$ les ouverts affines W_i' définis par les sections f_i de $\underline{E}$ au-dessus des U_i ; le choix des $\underline{E}_i''$ et la description du morphisme $r'=r_{\underline{L}^{\otimes n},\varphi'}$ montrent que la restriction de r' à V_i correspond à un homomorphisme surjectif $A(W_i')\to A(V_i)$. On en conclut que cette restriction est une immersion fermée ; pour voir que r' est une immersion , on peut se limiter au cas où Y est affine , la question étant locale sur Y ; mais alors , comme W_i' et W_i sont définis par la même section f_i , il résulte de la définition de r' et de la prop.2 du n°1 que $r'^{-1}(W_i')=V_i$, ce qui achève la démonstration .

~~est cohérent et que la restriction de~~ φ' ~~à $q^*(\underline{E}')$ est un épimorphisme. Cela étant, si on considère dans $\underline{P}(\underline{E}')$ les ouverts affines W'_i définis par les sections f_i de $\underline{E}'$ au-dessus des U_i, il est clair que $A(W'_i)$ s'identifie à $A(W_i)$ et la description du morphisme $r'=r_{\underline{L},\varphi'}$ montre que la restriction de r' à V_i est un morphisme de V_i dans W'_i qui correspond au même homomorphisme $A(W'_i)=A(W_i)\rightarrow A(V_i)$ que la restriction de r à V_i. On en conclut que la restriction de r' à V_i est une immersion fermée, donc que r' est encore une immersion de X dans $\underline{P}(\underline{E}')$.~~

Les résultats précédents nous permettent de caractériser les faisceaux amples et très amples par des propriétés intrinsèques.

Proposition 34. - *Soient Y un préschéma noethérien, $q : X\rightarrow Y$ un morphisme de type fini, $\underline{L}$ un faisceau inversible sur X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\underline{L}$ est très ample.

(ii) L'homomorphisme canonique $\mu : q^*(q_*(\underline{L}))\rightarrow \underline{L}$ est surjectif (autrement dit $\underline{L}$ est engendré par ses sections au-dessus des $q^{-1}(U)$, où U parcourt les ouverts affines de Y), et le morphisme correspondant $X\rightarrow \underline{P}(q_*(\underline{L}))$ est une immersion.

(iii) Il existe un sous-faisceau cohérent $\underline{E}$ de $q_*(\underline{L})$ tel que la restriction à $q^*(\underline{E})$ de l'homomorphisme canonique $q^*(q_*(\underline{L}))\rightarrow \underline{L}$ soit surjective et que le morphisme correspondant $X\rightarrow \underline{P}(\underline{E})$ soit une immersion.

La prop. 33 montre que (ii) entraîne (iii), $p_*(\underline{L})$ étant quasi-cohérent (§ 1, n°1, cor. de la prop. 1) ; d'autre part, la prop. 32 et son cor. 1 prouvent que (iii) entraîne (ii), car l'injection $\underline{E}\rightarrow \underline{M}=q_*(\underline{L})$ donne canoniquement un homomorphisme $\underline{S}_{O_X}(q^*(\underline{E}))\rightarrow \underline{S}_{O_X}(q^*(\underline{M}))$, qui, composé avec l'homomorphisme ρ_φ $\underline{S}_{O_X}(q^*(\underline{M}))\rightarrow \bigoplus_{n\geq 0} \underline{L}^{\otimes n}$, donne l'homomor

ρ_φ :

phisme $\varphi' : \mathbf{S}_{\mathcal{O}_X}(q^*(\mathcal{E})) \to \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{L}^{\otimes n}$ qui définit l'immersion $X \to \mathbf{P}(\mathcal{E})$; comme les critères de la prop. 32 et de son cor. 1 reposent sur l'existence d'images de sections par φ ayant des propriétés données, il suffira de prendre les images de sections par φ' ayant ces propriétés pour répondre à la question. Il est immédiat que (iii) entraîne (i) puisqu'on a vérifié au n°5, th. 2, que l'image réciproque par le morphisme $X \to \mathbf{P}(\mathcal{E}) = P$ du faisceau $\mathcal{O}_P(1)$ est isomorphe au faisceau inversible $\mathcal{L}$ qui a servi à définir ce morphisme. Enfin (i) entraîne (iii) : supposons en effet que $\mathcal{L} = f^*(\mathcal{O}_P(1))$, où f est une immersion $X \to \mathbf{P}(\mathcal{F}) = P$, $\mathcal{F}$ étant un $\mathcal{O}_Y$-Module cohérent; on sait (n°5) qu'on en déduit canoniquement un homomorphisme $\theta : q^*(\mathcal{F}) \to \mathcal{L}$, et par suite aussi un homomorphisme $\theta^{\#} : \mathcal{F} \to q_*(\mathcal{L})$ (chap. 0, § 2). Soit $\mathcal{E}$ l'image de $\mathcal{F}$ par $\theta^{\#}$; $\mathcal{E}$ est un faisceau quasi-cohérent de type fini, donc cohérent puisque Y est noethérien, et te que $\theta^{\#}$ se factorise en $\mathcal{F} \xrightarrow{\rho} \mathcal{E} \to q_*(\mathcal{L})$, et par suite θ se factorise en $q^*(\mathcal{F}) \xrightarrow{q^*(\rho)} q^*(\mathcal{E}) \to \mathcal{L}$; en outre, comme q^* est exact à droite, $q^*(\rho)$ est surjectif, donc il lui correspond une immersion fermée $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \to \mathbf{P}(\mathcal{F})$ (n°4, prop. 15). A la factorisation précédente de θ correspond alors (n°5, prop. 17) une factorisation $X \to \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to \mathbf{P}(\mathcal{F})$ et comme $X \to \mathbf{P}(\mathcal{F})$ est une immersion ainsi que $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \to \mathbf{P}(\mathcal{F})$, il en est de même de $X \to \mathbf{P}(\mathcal{E})$.

Corollaire. - *Pour que $\mathcal{L}$ soit très ample* (resp. *ample*), *il faut et il suffit qu'il existe un recouvrement ouvert* (U_α) *de* Y *tel que chacun des* $\mathcal{L}|q^{-1}(U_\alpha)$ *soit très ample* (resp. *ample*).

C'est immédiat pour les faisceaux très amples, la condition (ii) de la prop. 34 étant locale en Y. D'autre part, comme on peut supposer le recouvrement (U_α) fini (Y étant quasi-compact), l'assertion relative aux faisceaux amples se déduit de celle relative aux faisceaux très amples par la définition des faisceaux amples.

Proposition 35. - *Les hypothèses et notations étant les mêmes que dans la prop. 34, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L est ample* .

(ii) *Pour tout couple de points* x,y *de* X *tels que* $x \notin \overline{\{y\}}$ *et* $q(x) \in \overline{\{q(y)\}}$, *il existe un entier* $n > 0$, *un voisinage ouvert* U *de* $q(x)$ *et une section* s *de* $L^{\otimes n}$ *au-dessus de* $q^{-1}(U)$, *nulle en* y *et non nulle en* x .

(iii) *Pour tout* O_X*-Module cohérent* F , *l'homomorphisme canonique* $\mu : q^*(q_*(F \otimes L^{\otimes n})) \to F \otimes L^{\otimes n}$ *est surjectif dès que* n *est assez grand* .

(iv) *Pour tout faisceau cohérent d'idéaux* J *de* O_X , *l'homomorphisme canonique* $\mu : q^*(q_*(J \otimes L^{\otimes n})) \to J \otimes L^{\otimes n}$ *est surjectif dès que* n *est assez grand* .

(i) implique (iii) . En effet , il suffit de le démontrer lorsque L est très ample , donc de la forme $r^*(O_P(1))$, où $r : X \quad P = P(E)$ est une immersion et E un O_Y-Module cohérent . Alors X s'identifie à un sous-préschéma induit sur un ouvert de $\overline{X}$, plus petit sous-préschéma fermé de P majorant X (§ 1, n°2, prop. 8), et le faisceau cohérent F sur X est induit par un faisceau cohérent $\overline{F}$ sur $\overline{X}$ (§ 1, n°2, th. 1). On est donc ramené à démontrer notre assertion lorsque X est un sous-préschéma fermé de P , et en remplaçant F par $r_*(F)$, on est même ramené au cas où $X = P$. Mais alors le résultat a déjà été démontré (n°3, cor. 3 du th. 1) .

Il est clair que (iii) entraîne (iv) . Prouvons que (iv) entraîne (ii) . Prenons en effet pour J le faisceau cohérent d'idéaux définissant la partie fermée $\overline{\{y\}}$ de X . Soit t une section de J au-dessus d'un voisinage ouvert de x , ne s'annulant pas en x ; en la multipliant par une section de $L^{\otimes n}$ au-dessus d'un voisinage de x , égale à un générateur de $(L^{\otimes n})_x$ au point x , on obtient une section t' de $J \otimes L^{\otimes n}$ au-dessus d'un voisinage de x , ne s'annulant pas en x . Par hypothèse, il existe un voisinage ouvert U de x et une section s de $J \otimes L^{\otimes n}$ au-dessus de $q^{-1}(U)$ dont la restriction à un voisinage de x est égale à t' ; l'image de cette section dans $\underline{L}^{\otimes n}$ répond à la question .

Montrons enfin que (ii) entraîne (i) . Considérons la O_Y-algèbre graduée quasi-cohérente $\underline{S}=\bigoplus_{n\geq 0} q_*(\underline{L}^{\otimes n})$; comme une section de $\underline{L}^{\otimes n}$ qui est non nulle en un point x engendre $(\underline{L}^{\otimes n})_x$, la condition (ii) entraîne en particulier que l'homomorphisme canonique $q^*(q_*(\underline{L}^{\otimes n}))\to \underline{L}^{\otimes n}$ est surjectif pour un $n=d$; il en est alors de même de $q^*(q_*(\underline{L}^{\otimes hd}))\to \underline{L}^{\otimes hd}$ pour tout $h>0$; donc en remplaçant $\underline{L}$ par $\underline{L}^{\otimes d}$, on peut supposer que l'homomorphisme canonique $q^*(\underline{S})\to \bigoplus_{n\geq 0}\underline{L}^{\otimes n}$ est surjectif , et définit donc un morphisme r de X dans $\mathrm{Proj}(\underline{S})$. La prop.32 montre alors que ce morphisme est un homéomorphisme de X sur son image $r(X)$; en outre , la définition de $\underline{S}$ montre que la condition du cor.2 de la prop.32 est trivialement satisfaite , donc r est une immersion . Enfin , la conclusion résulte de la prop.33 .

Corollaire 1 .- Soient $\underline{E}$ un O_Y-module quasi-cohérent , r un morphisme $X\to \underline{P}(\underline{E})=\underline{P}$ qui soit un homéomorphisme de X sur $r(X)$; alors $\underline{L}=r^*(O_P(1))$ est ample .

En effet , la condition (ii) de la prop.34 est remplie , comme conséquence de la condition (ii) de la prop.32 .

Corollaire 2 .- Pour que $\underline{L}$ soit ample, il faut et il suffit que son image réciproque $\underline{L}'$ sur X_{red} le soit .

En effet , X_{red} est un sous-préschéma fermé de X et L' vérifie les conditions du cor.1 .

Remarques .- 1) Nous verrons au chap.III, § 2,n° une généralisation du cor.2 : si X est propre sur Y , X' fini sur X et dominant X, pour que L soit ample il faut et il suffit que son image réciproque sur X' soit ample .

Archives
Grothendieck sept 59

§ 5. Morphismes propres.

1. Définition et généralités.

Définition 1.- On dit qu'un morphisme de préschémas $f : X \to Y$ est propre s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(a) f est séparé et de type fini.

(b) Pour tout préschéma localement noethérien Y' et tout morphisme $Y' \to Y$, la projection $X \times_Y Y' \to Y'$ est une application fermée. Lorsqu'il en est ainsi, on dit aussi que X (considéré comme Y-préschéma au moyen de f) est propre au-dessus de Y.

Il est immédiat que les conditions (a) et (b) sont locales sur Y. Pour vérifier que l'image d'une partie fermée Z de $X \times_Y Y'$ par la projection q de $X \times_Y Y'$ dans Y' est fermée, il suffit de voir que $q(Z) \cap U$ est fermé dans U pour tout ouvert affine U ; comme $q(Z) \cap U = q(Z \cap q^{-1}(U))$ et que $q^{-1}(U)$ s'identifie à $X \times_Y U$, on voit donc que pour vérifier (b), on peut se limiter au cas où Y' est un schéma affine (et par suite noethérien). On verra plus loin (n°2,) que si Y est localement noethérien, on peut même se borner à vérifier (b) lorsque Y' est de type fini sur Y.

Proposition 1.- Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \to Y$ un morphisme propre ; si Y' est un Y-préschéma de type fini, la projection $X \times_Y Y' \to Y'$ est une application fermée. En particulier f est une application fermée.

En effet, Y' est alors localement noethérien.

Proposition 2.- (i) Une immersion fermée est un morphisme propre.

(ii) Le composé de deux morphismes propres est propre.

(iii) Si X, Y sont des S-préschémas, un S-morphisme $f : X \to Y$ propre, $f^{S'} : X^{S'} \to Y^{S'}$ est propre.

(iv) Si $f : X \to Y$ et $g : X' \to Y'$ sont deux S-morphismes propres, $f \times_S g : X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ est propre.

(v) *Si* $f : X\to Y$ *et* $g : Y\to Z$ *sont deux morphismes tels que* $g\circ f$ *soit propre et* g *séparé, f est propre.*

(vi) *Si* $f : X\to Y$ *est propre, il en est de même de* f_{red}.

Comme d'ordinaire, on n'a à démontrer que les propriétés (i), (ii) et (iii), les autres en découlant formellement. Dans chacun de ces trois cas, la vérification de la condition (a) de la déf. 1 découle de résultats antérieurs (I, 3, 6, prop. 16, 17 et 18 et I, 4, 2, prop. 7, 8 et 9) ; reste à vérifier la condition (b). C'est immédiat dans le cas (i), car si $X\to Y$ est une immersion fermée, il en est de même de $X\times_Y Y'\to Y\times_Y Y'=Y'$ (I, 3, 2, prop. 5). Pour démontrer (ii), considérons un morphisme $Z'\to Z$, où Z' est localement noethérien ; comme $Y\to Z$ est de type fini, il en est de même de $Y\times_Z Z'\to Z'=Z\times_Z Z'$ (I, 4, 2, prop. 9), donc $Y\times_Z Z'$ est localement noethérien (I, 4, 2, prop. 10). Or, on peut écrire $X\times_Z Z'=X\times_Y(Y\times_Z Z')$ (I, 2, 5, formule (1)), et par suite la projection $X\times_Z Z'\to Z'$ se factorise en $X\times_Y(Y\times_Z Z')\to Y\times_Z Z'\to Z'$. Compte tenu de la remarque précédente, (ii) résulte donc du fait que le composé de deux applications fermées est fermée. Enfin, pour toute extension $S'\to S$, $X^{S'}$ s'identifie à $X\times_Y Y^{S'}$, donc pour tout morphisme $Z\to Y^{S'}$, où Z est localement noethérien, on peut écrire $X^{S'}\times_{Y^{S'}} Z=(X\times_Y Y^{S'})\times_{Y^{S'}} Z=X\times_Y Z$, et comme $X\times_Y Z\to Z$ est fermé par hypothèse, cela prouve (iii).

Corollaire 1. — Soient $f : X\to Y$, $g : Y\to Z$ *deux morphismes. Si* $g\circ f$ *est propre, f surjectif, g séparé et de type fini, alors g est propre.*

Il n'y a à vérifier que la condition (b) de la déf. 1. Or pour tout morphisme $Z'\to Z$ tel que Z' soit localement noethérien, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X\times_Z Z' \arrow[r, "f\times 1"] \arrow[dr, "p'"'] & Y\times_Z Z' \arrow[d, "p"] \\ & Z' \end{tikzcd}$$

(où p et p' sont les projections) est commutatif ; en outre $f\times 1$

est surjectif puisqu'il en est ainsi de f (I,2,7,prop.11), et p' est une application fermée . Toute partie fermée F de $Y\times_Z Z'$ est alors l'image par $f\times 1$ d'une partie fermée E de $X\times_Z Z'$, donc $p(F)=p'(E)$ est fermé dans Z' , d'où le corollaire .

Corollaire 2 .- Soit $f : X\to Y$ un morphisme séparé de type fini . Supposons que X soit réunion finie d'ensembles fermés X_i $(1\leq i\leq n)$, et désignons encore par X_i un sous-préschéma fermé de X ayant X_i pour espace de base ; soit j_i l'injection canonique $X_i\to X$. Supposons d'autre part que pour chaque i , il existe un sous-préschéma fermé Y_i de Y tel que l'on ait $f\circ j_i=h_i\circ f_i$, où f_i est un morphisme $X_i\to Y_i$ et h_i l'injection canonique $Y_i\to Y$. Alors , pour que f soit propre , il faut et il suffit que chacun des f_i le soit .

En effet , si f est propre , il en est de même de $f\circ j_i$ puisque j_i est une immersion fermée (prop.2 (i) et (ii)) , donc , comme h_i est une immersion fermée , et par suite est séparé , f_i est propre (prop.2 (v)) . Inversement , supposons les f_i propres et considérons le préschéma Z somme des X_i , et soit u le morphisme $Z\to X$ qui se réduit à j_i dans chaque X_i . La restriction de $f\circ u$ à chaque X_i est égale à $f\circ j_i=h_i\circ f_i$, donc est propre puisqu'il en est ainsi de h_i et de f_i (prop.2 (i) et (ii)) ; il résulte aussitôt de la déf.1 que u est alors propre . Mais comme u est surjectif par hypothèse , et f séparé et de type fini , on conclut que f est propre par application du cor. 1 .

En particulier :

Corollaire 3 .- Si $f : X\to Y$ est séparé et de type fini , et si f_{red} est propre , f est propre .

Il suffit en effet d'appliquer le cor.2 avec $n=1$, $X_1=X_{red}$, $Y_1=Y_{red}$.

Si X et Y sont noethériens et $f : X\to Y$ un morphisme séparé de type fini , les cor.2 et 3 permettent de se ramener au cas de préschémas <u>intègres</u> pour vérifier que f est propre . En effet , on peut alors supposer X et Y réduits par le cor.3 ; soient X_i ($1\leq i\leq n$) les composantes irréductibles de X , Y_j ($1\leq j\leq m$) celles de Y ; désignons encore par X_i (resp. Y_j) le sous-préschéma fermé réduit (donc intègre) ayant X_i (resp. Y_j) pour espace de base (I,3,4,prop.9) ; si x_i est le point générique de X_i , et Y_j une des composantes irréductibles de Y contenant $f(x_i)$, $f(X_i)$ est contenu dans l'adhérence de $\{f(x_i)\}$, donc dans Y_j . Comme le sous-espace $f^{-1}(Y_j)$ contient X_i , le sous-préschéma $f^{-1}(Y_j)$ de X <u>majore</u> le sous-préschéma X_i , et par suite (I,3,2) $f\circ j_i$ (j_i injection X_i X) se factorise en $h_j\circ f_i$ où h_j est l'injection $Y_j\to Y$ et f_i un morphisme $X_i\to Y_j$; on est donc dans les conditions d'application du cor.2 et (il faut et) il suffit que les f_i soient propres pour que f le soit .

<u>Corollaire 4 .- Soient</u> X,Y <u>des</u> S-<u>préschémas séparés de type fini sur</u> S , <u>et soit</u> f : $X\to Y$ <u>un</u> S-<u>morphisme . Pour que f soit propre , il faut et il suffit que pour tout</u> S-<u>préschéma</u> S' <u>localement noethérien , le morphisme</u> $f\times 1 : X\times_S S'\to Y\times_S S'$ <u>soit une application fermée</u> .

Notons d'abord que si $\varphi : X\to S$ et $\psi : Y\to S$ sont les morphismes structuraux , on a par définition $\psi\circ f=\varphi$, donc f est séparé et de type fini (I,3,6,cor.4 de la prop.20 et I,4,2,cor.2 de la prop.9) . Si maintenant Y' est un Y-préschéma localement noethérien , Y' peut aussi être considéré comme un S-préschéma , et comme $Y\to S$ est séparé , $X\times_Y Y'$ s'identifie à un sous-préschéma fermé de $X\times_S Y'$ (I,3,6, lemme 1) . Cela étant, si f est propre , il en est de même de $f\times_S 1 : X\times_S S'\to Y\times_S S'$ (prop. 2 (ii)) , et comme $Y\times_S S'$ est de type fini sur S' , donc localement noethérien , $f\times 1$ est une application fermée (prop.1). Inversement , d'après la remarque faite ci-dessus , il suffit de montrer que p : $X\times_S Y'\to Y'$ est une application fermée . Or , si h est le morphisme $Y'\to Y$, le morphisme graphe Γ_h est une immersion fermée de Y' dans

$Y \times_S Y'$, Y étant séparé sur S (I,3,7,prop.22), et le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y' \arrow[r, "f \times 1"] \arrow[dr, "p"'] & Y \times_S Y' \\ & Y' \arrow[u, "\Gamma_f"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif ; comme $f \times 1$ est une application fermée, il est clair qu'il en est de même de p.

Proposition 3 .- Tout morphisme projectif est propre .

On sait en effet qu'un tel morphisme $X \to Y$ est séparé et de type fini (§ 4,n°6,prop.22), et si Y' est un Y-préschéma localement noethérien $X \times_Y Y' \to Y' = Y \times_Y Y'$ est projectif (§ 4,n°6,th.3 (iv)), et comme Y' est localement noethérien, le morphisme précédent est une application fermée (§ 4,n°6,th.4).

Corollaire 1 .- Soit Y un préschéma localement noethérien . Pour qu'un morphisme $f : X \to Y$ soit projectif, il faut et il suffit qu'il soit quasi-projectif et propre .

La condition est nécessaire en vertu de la prop.3 . Inversement, supposons-la remplie ; il existe alors un Y-préschéma P projectif sur Y et une immersion $g : X \to P$ telle que $f = h \circ g$, où h est le morphisme $P \to Y$; comme h est séparé, on en conclut que g est propre (prop.2 (v)), et comme P est de type fini sur Y, donc localement noethérien, g est une immersion fermée (prop.1), donc f est projectif .

Corollaire 2 .- Tout morphisme fini est propre .

Il est en effet projectif (§ 4,n°7,prop.28) .

2 . Le lemme de Chow .

Théorème 1 (lemme de Chow) .- Soient S un préschéma noethérien, X un S-préschéma de type fini et séparé sur S .

(i) Il existe un S-préschéma X' quasi-projectif sur S et un S-morphisme $f : X' \to X$, projectif et surjectif .

(ii) On peut prendre X' et f tels qu'il existe un ouvert $U \subset X$ tel que $U' = f^{-1}(U)$ soit dense dans X' et que la restriction de f à U' soit un isomorphisme $U' \cong U$.

(iii) Si X est réduit (resp. irréductible , intègre) , on peut supposer X' réduit (resp. irréductible , intègre) .

La démonstration se fait en plusieurs étapes .

A) On peut d'abord supposer irréductible ; en effet , comme X est noethérien , ses composantes irréductibles X_i ($1 \leq i \leq m$) sont en nombre fini. Si le théorème est démontré pour chacune d'elles , et si X'_i et $f_i : X'_i \to X_i$ sont le préschéma et le morphisme correspondant à X_i , le préschéma X' somme des X'_i et le morphisme $f : X' \to X$ dont la restriction à X'_i est f_i , répondront à la question . Il est immédiat en effet que la condition (iii) est vérifiée par X' si elle l'est par les X'_i ; il en est de même de (ii) , en prenant pour U la réunion des ensembles $U_i \cap \complement(\bigcup_{j \neq i} X_j)$. Enfin , comme les X'_i sont quasi-projectifs sur S , il en est de même de X' (§ 4, n°7, Remarque); de même , les $X'_i \to X$ sont projectifs par le th. 3 ((i) et (ii)) du § 4, n°6 , donc $X' \to X$ est projectif (§ 4, n°6, Remarque) et est évidemment surjectif par définition .

B) X est réunion d'une famille finie $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'ouverts non vides affines ; comme S est un schéma , ces derniers sont affines sur S (I, 3, 7, cor. 3 de la prop. 22) . Il existe par suite pour chaque k une immersion ouverte $\varphi_k : X_k \to P_k$, où P_k est projectif sur S (§ 4, n°7, prop. 24 et 27) . Soit $U = \bigcap_k X_k$; comme X est irréductible et les X_k non vides , U est non vide , et par suite dense dans X ; les restrictions des φ_k à U définissent un morphisme $\varphi : U \to P$, où

$P=P_1\times_S P_2\times\dots\times_S P_n$, de sorte que les diagrammes

(1)
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "j_k"'] & P \arrow[d, "p_k"] \\ X_k \arrow[r, "\varphi_k"'] & P_k \end{tikzcd}$$

soient commutatifs , j_k désignant l'injection canonique $U\to X_k$ et p_k la projection $P\to P_k$ (I,2,4) . Si j est l'injection canonique $U\to X$, le morphisme $\psi=(j,\varphi)_S : U\to X\times_S P$ est une <u>immersion</u> (I,3,5,cor.3 de la prop.15). Soit X' le <u>plus petit sous-préschéma fermé</u> de $X\times_S P$ <u>majorant</u> l'immersion ψ (§ 1,n°2,prop.8) : ψ peut donc se factoriser en

(2) $$\psi : U \xrightarrow{\psi'} X' \xrightarrow{h} X\times_S P$$

où ψ' est une <u>immersion ouverte</u> et h une <u>immersion fermée</u> . Si $q_1 : X\times_S P\to X$ et $q_2 : X\times_S P\to P$ sont les projections , nous poserons $f : X'\xrightarrow{h} X\times_S P\xrightarrow{q_1} X$ et $g : X'\xrightarrow{h} X\times_S P\xrightarrow{q_2} P$. Nous allons voir que X' et f répondent à la question .

C) Montrons d'abord que f est <u>projectif</u> et <u>surjectif</u> et que la restriction de f à $f^{-1}(U)=U'$ est un <u>isomorphisme</u> de U' sur U . Comme les P_k sont projectifs sur S , il en est de même de P (§ 4,n°6,th.3 (iv)) , donc $X\times_S P$ est projectif sur X (§ 4,n°6,th.3 (iii)) et il en est de même par définition de X' qui est un sous-préschéma fermé de $X\times_S P$. D'autre part , on a $f\circ\psi'=q_1\circ(h\circ\psi')=q_1\circ\psi=j$, donc f(X') contient l'ensemble ouvert partout dense U de X ; mais f est une application <u>fermée</u> de X' dans X puisque f est projectif (§ 4,n°6,th. 4), donc f(X')=X . Enfin , remarquons que $U\times_S P$ s'identifie à un préschéma induit sur un ouvert de $X\times_S P$, l'injection canonique s'identifiant à $j\times 1$, et le sous-préschéma $X'\cap(U\times_S P)$ de X' contient évidemment le préschéma induit sur U' . Mais d'autre part , l'immersion ψ se factorise en $U\xrightarrow{\Gamma_\varphi} U\times_S P\xrightarrow{j\times 1} X\times_S P$, et comme P est séparé sur S , le morphisme graphe Γ_φ est une immersion fermée (I,3,7,prop.22) , donc $\psi(U)$ est un sous-préschéma <u>fermé</u> de $U\times_S P$; il est donc égal à $X'\cap(U\times_S P)$ (§ 1,n°2,cor.2 de la prop.8) , et comme par ailleurs U' majore évidemment $\psi(U)$, on voit que l'on a $\psi(U)=$ $=U'\supset X'\cap(U\times_S P)$, et comme ψ est une immersion , la restriction de f à U' est bien un isomorphisme sur U ; par ailleurs , en raison de la définition de X' , U' est dense dans X' .

D) Prouvons maintenant que g est une <u>immersion</u> , ce qui établira que X' est <u>quasi-projectif</u> sur S , puisque P est projectif sur S . Posons

$$V_k=\varphi_k(X_k) \quad \text{(ouvert de } P_k)$$
$$W_k=p_k^{-1}(V_k) \quad \text{(ouvert de } P)$$
$$\left.\begin{array}{l} X'_k=f^{-1}(X_k) \\ X''_k=g^{-1}(W_k) \end{array}\right\} \quad \text{(ouverts de } X')$$

Il est clair que les X'_k forment un recouvrement de X' ; nous allons d'abord voir qu'il en est de même des X''_k , en prouvant que $X'_k\subset X''_k$. Il suffira pour cela de montrer que le diagramme

$$(3) \qquad \begin{array}{ccc} X'_k & \xrightarrow{g|X'_k} & P \\ {\scriptstyle f|X'_k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_k} \\ X_k & \xrightarrow[\varphi_k]{} & P_k \end{array}$$

est commutatif . Or X'_k s'identifie au préschéma induit $X'\cap(X_k\times_S P)$ et comme $U'\subset X'_k$, X'_k est le plus petit sous-préschéma fermé de lui-même majorant U' (§ 1,n°2,cor.2 de la prop.8) . Pour montrer la commutativité du diagramme (3) , il suffit donc de prouver qu'on le composant avec l'injection $U'\to X'_k$, ou , ce qui revient au même , avec ψ , on obtient un diagramme commutatif (P_k étant séparé au-dessus de S ; § 1,n°2,cor.3 de la prop.8); mais par définition le diagramme qu'on obtient ainsi n'est autre que (1) , d'où notre assertion .

On voit donc que les W_k forment un recouvrement ouvert de $g(X')$; pour prouver que g est une immersion , il suffit donc de prouver que chacune des restrictions $g|X''_k$ est une immersion dans W_k (I,2,2, cor.1 de la prop.4) . Pour cela , considérons le morphisme u_k : $W_k\xrightarrow{p_k}V_k\xrightarrow{\varphi_k^{-1}}X_k\longrightarrow X$; comme X est séparé sur S , le morphisme graphe Γ_{u_k} : $W_k\to X\times_S W_k$ est une immersion fermée , donc le graphe $\Gamma_{u_k}(W_k)$ est un sous-préschéma fermé de $X\times_S W_k$; si nous montrons que ce sous-préschéma majore U' , il majorera aussi $X'\cap(X\times_S W_k)$ (§ 1, n°2, cor.2 de la prop.8) , et ce dernier sous-préschéma n'est autre que X''_k par définition . Comme la restriction de q_2 à $\Gamma_{u_k}(W_k)$ est un isomorphisme sur W_k , la restriction de g à X''_k sera une immersion dans W_k , et notre assertion sera démontrée . Or , pour prouver que $\Gamma_{u_k}(W_k)$ majore U' , il suffit , comme on le voit aisément à partir de la définition du produit , de vérifier que le diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\psi"] & X\times_S W_k \arrow[r, "q_2"] \arrow[dr, "q_1"'] & W_k \arrow[d, "u_k"] \\ & & X \end{tikzcd}$$

est commutatif ; or , par définition de u_k , et les relations $q_1\circ\psi=j$, $q_2\circ\psi=\varphi$, on est ramené à la commutativité du diagramme (1) .

E) Il est clair que comme U , et par suite U', est irréductible , il en est de même de X' dans la construction précédente . Si en outre X est réduit , il en est de même de U' , donc X' est aussi réduit (§ 1, n°2, cor.3 de la prop.8) . Cela achève la démonstration .

Corollaire 1 .- Soient S *un schéma noethérien* , X *un schéma séparé et de type fini sur* S . *Pour que* X *soit propre sur* S , *il faut et il suffit qu'il existe un schéma* X' *projectif sur* S *et un* S*-morphisme surjectif* $f : X'\to X$. *Lorsqu'il en est ainsi , on peut en outre choisir* f *de sorte qu'il existe un ouvert dense* U *de* X *tel que la restriction de* f *à* $f^{-1}(U)$ *soit un isomorphisme sur* U , $f^{-1}(U)$ *étant dense dans* X' *Si en outre* X *est irréductible* (resp. *réduit*) , *on peut supposer qu'il en est de même de* X' .

La condition est suffisante en vertu de la prop.3 et du cor.1 de la prop.2 . Elle est nécessaire , car avec les notations du th.1 , si X est propre sur S , X' est propre sur S , car il est projectif , donc propre sur X (prop.3) , d'où notre assertion (prop.2 (ii)) ; comme en outre X' est quasi-projectif sur S , il est projectif sur S (n°1, cor.1 de la prop.3) .

Remarque .- Le S-morphisme surjectif $f : X' \to X$ est un morphisme birationnel lorsque X et X' sont irréductibles (I,4,3).

Corollaire 2 .- Soient S un schéma localement noethérien, X un S-préschéma séparé et de type fini sur S, $f_0 : X \to S$ son morphisme structurel. Pour que X soit propre sur S, il faut et il suffit que pour tout morphisme de type fini $S' \to S$, $f_0^{S'} : X \times_S S' \to S'$ soit une application fermée.

La condition est évidemment nécessaire (n°1, déf.1) ; prouvons qu'elle est suffisante. La question étant locale sur S, on peut supposer S noethérien ; si on reprend les notations de la démonstration du th.1, il résulte de l'hypothèse que la projection $q_2 : X \times_S P \to P$ est une application fermée. Comme l'application $g : X' \to P$ est composée de q_2 et de l'immersion fermée $h : X' \to X \times_S P$ et que g est une immersion, g est une immersion fermée. On en conclut que g est propre (n°1, prop.2 (i)), et comme le morphisme $f : X' \to X$ est surjectif et que l'on a $g = f_0 \circ f$, on conclut du cor.1 de la prop.2 du n°1 que f_0 est propre.

3. Sections rationnelles d'un préschéma propre au-dessus d'un autre.

Définition 2 .- On dit qu'un point x d'un préschéma X est régulier (resp. normal) si l'anneau local O_x est régulier (resp. normal). On dit que X est régulier (resp. normal) si chaque point de X est régulier (resp. normal).

Un préschéma régulier ou normal est réduit. Si X est localement noethérien, dire qu'un point $x \in X$ est normal signifie que O_x est intègre et intégralement clos ; comme un anneau local régulier a ces propriétés, tout point régulier est alors normal. Pour un point fermé x d'un préschéma localement noethérien X, il revient au même de dire que x est régulier, ou normal, ou que O_x est un anneau de valuation discrète.

Théorème 2 .- Soit $S=\mathrm{Spec}(A)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète A ; soit X un schéma propre au-dessus de S, $f : X \to S$ le morphisme structural. Alors si s est le point générique de S, toute section de $f^{-1}(s)$ au-dessus de s se prolonge d'une seule manière en une S-section de X. Il revient au même (I,5,2) de dire que toute S-section rationnelle de X est partout définie, ou encore (I,2,6) que les points de X à valeurs dans A sont les mêmes que les points de X à valeurs dans le corps des fractions K de A.

Comme S et X sont localement noethériens, une section g de $f^{-1}(s)$ au-dessus de s équivaut à la donnée d'un isomorphisme θ de O_x, où $x=g(s)\in f^{-1}(s)$, sur O_s. Soit Y l'adhérence de $\{x\}$ dans X ; comme S est réduit, le morphisme g se factorise en un morphisme de $\{s\}$ dans le sous-préschéma fermé réduit de X ayant Y pour espace de base, suivi de l'injection canonique $Y \to X$ (I,3,4,cor. de la prop.9). On peut évidemment remplacer X par Y (n°1, prop.2,(i) et (ii)), et par suite supposer X intègre, x étant le point générique de X. Le lemme de Chow donne alors un schéma intègre X' et un morphisme surjectif, projectif et birationnel $f' : X' \to X$ tel que $f''=f\circ f' : X' \to S$ soit projectif. Si x' est le point générique de X', il correspond à f' un isomorphisme θ' de O_x sur $O_{x'}$; en composant l'isomorphisme réciproque θ'^{-1} avec θ, on obtient une section g'' de $f''^{-1}(s)$ au-dessus de s, et on a évidemment $g=f'\circ g''$. Il suffira donc de prouver le théorème pour g'' et X', autrement dit, on se ramène au cas où X est projectif sur A, donc isomorphe à un sous-préschéma fermé d'un S-schéma P^n_A (§ 4, n°6, prop.21) ; si j est l'injection canonique $X \to P^n_A$, $j\circ g$ est une section de $h^{-1}(s)$ au-dessus de s, en désignant par h le morphisme structural $P^n_A \to S$; si on peut le prolonger en une S-section g_1 de P^n_A, on aura $g_1(S)\subset X$ puisque $X=\overline{\{x\}}$ et $g_1(s)=x$; on sait alors, comme X est réduit, que g_1 se factorise en une

$j\circ\bar{g}$, où $\bar{g}$ est la S-section de X cherchée (I,3,4,cor. de la prop.9). On est finalement ramené ainsi au cas où $X=P^n_A$. Comme A est un anneau local , tout faisceau inversible sur S est isomorphe à O_S ; donc (§ 4,n°5,cor.2 du th.2) un point de X à valeurs dans K s'identifie à une classe d'éléments $(\xi c_0,\xi c_1,\ldots,\xi c_n)$ de K , où $\xi\neq 0$ et les c_i sont des éléments non tous nuls de K . Si u est une uniformisante de A , en multipliant les c_i par une puissance convenable de u , on peut supposer qu'ils appartiennent à A , et que l'un au moins est inversible . Mais alors (§ 4,n°5,cor.2 du th.2) , le système $(c_0,c_1,\ldots,c_n)$ définit aussi un point de X à valeurs dans A , ce qui achève la démonstration .

Corollaire 1 .- Soit Y un préschéma localement noethérien normal (donc réduit) , et soit X un schéma propre au-dessus de Y . Soit f une Y-section rationnelle de X , et soit Y' l'ensemble (fermé) des points $y\in Y$ où f n'est pas définie . Alors $\mathrm{codim}_Y Y'\geq 2$.

Cela signifie (I,7,1,déf.2 et I,7,2,prop.6) que pour toute composante irréductible Z de Y' , de point générique z , on a $\dim(O_z)\geq 2$. Dans le cas contraire , on aurait $\dim(O_z)=1$ et comme par hypothèse O_z est intègre et intégralement clos , O_z serait un anneau de valuation discrète (Bourbaki, Alg. comm.   ) . Si alors f est définie dans U , $U\cap \mathrm{Spec}(O_z)$ n'est pas vide (I,5,2,lemme 2) et la restriction f' de f à $U\cap \mathrm{Spec}(O_z)$ est la restriction d'une application rationnelle f' : $\mathrm{Spec}(O_z)\to X$; par hypothèse f' ne serait pas un morphisme (I,5,2,prop.7) , ce qui contredit le th.2 .

Corollaire 2 .- Soient S un préschéma localement noethérien , X et Y deux S-préschémas de type fini, tels que Y soit normal (donc réduit) et X propre sur S . Soit f une S-application rationnelle de Y dans X , et soit Y' l'ensemble des $y\in Y$ où f n'est pas définie . Alors

$\mathrm{codim}_Y(Y') \geqslant 2$.

Pour tout ouvert $U \subset Y$, $g \to (g,1)_S$ est une application biunivoque de l'ensemble des S-morphismes g de U dans X, sur l'ensemble des U-sections de $X \times_S U$ (ou de $X \times_S Y$) ; il s'ensuit que l'on peut identifier l'ensemble des S-applications rationnelles de Y dans X à l'ensemble des Y-sections rationnelles de X^Y ; comme X^Y est propre sur Y (n°1, prop. 2 (iii)) , on peut appliquer le cor. 1 , d'où la conclusion .

Archives Grothendieck - sept 59

Proposition 33 .- Soient Y un préschéma noethérien , X un Y-préschéma de type fini sur Y , $q : X \to Y$ le morphisme structural , $\underline{S}$ une O_Y-Algèbre graduée en degrés positifs , $\underline{L}$ un O_X-Module inversible , φ un homomorphisme de O_X-Algèbres graduées $q^*(\underline{S}) \to \bigoplus_{n \geq 0} \underline{L}^{\otimes n}$, surjectif dans les degrés assez grands ; soit $r = r_{\underline{L},\varphi}$ le morphisme $X \to P = \mathrm{Proj}(\underline{S})$ correspondant , et supposons que r soit une immersion (cor.1 de la prop.32) Alors, il existe un entier $n > 0$, un sous-O_Y-Module cohérent $\underline{E}_n$ de $\underline{S}_n$ tel que la composé $q^*(\underline{E}_n) \to q^*(\underline{S}_n) \xrightarrow{\varphi_n} \underline{L}^{\otimes n}$ soit un épimorphisme et que le morphisme correspondant de X dans $P(\underline{E}_n)$ soit une immersion ; en particulier $\underline{L}$ est ample .

Soit W un ouvert de $\mathrm{Proj}(\underline{S})$ tel que r(X) soit fermé dans W (I,3,1) ; par définition W est réunion d'une famille (W_α) d'ouverts affines de la forme $D_+(f_\alpha)$, où f_α est une section de $\underline{S}_{n_\alpha}$ au-dessus d'un ouvert affine U_α de Y . Par hypothèse X est noethérien (q étant de type fini donc quasi-compact , et il en est de même de r(X) homéomorphe à X ; il existe par suite une sous-famille finie $(W_i)_{1 \leq i \leq \mu}$ de (W_α) qui recouvre r(X) ; en outre , comme $D_+(f_\alpha^h) = D_+(f_\alpha)$, on peut supposer les f_i de même degré n , n étant de plus choisi assez grand pour que φ_n soit surjectif . Soit $V_i = r^{-1}(W_i)$; le sous-préschéma induit par X sur V_i est isomorphe à un sous-préschéma fermé de W_i , donc est affine et son anneau $A(V_i)$ est isomorphe à un anneau quotient de $A(W_i)$, ce dernier n'étant autre que $(S_i^\beta)_{(f_i)}$, où $S_i^\beta = \Gamma(U_i, \underline{S})$ est une algèbre graduée sur $A_i = \Gamma(U_i, O_Y)$. Comme q est de type fini , $A(V_i)$ est une A_i-algèbre de type fini (I,4,2,prop.6) ; considérons un système fini de générateurs de $A(V_i)$ sur A_i ; comme $A(V_i)$ est une algèbre quotient de $(S_i^\beta)_{(f_i)}$, ces générateurs sont images d'éléments de la forme $g_{ij}/f_i^{m_i}$ où les g_{ij} sont des éléments homogènes de degré nm_i $(1 \leq j \leq \lambda_i)$; en multipliant les g_{ij} par des puissances convenables des f_i , on peut supposer tous les m_i égaux à un même entier m, et finalement, en remplaçant n par nm, on peut supposer les m_i égaux à 1, les f_i et les g_{ij} appartenant au <u>même</u> module $E_i = \Gamma(U_i, \underline{S}_n)$ $(1 \leq i \leq \mu, 1 \leq j \leq \lambda_i)$ soit R_i la partie finie de E_i formée de ces éléments. Notons d'autre part que l'on peut supposer les V_i choisis de façon que $\underline{L}|V_i$ soit de la forme $\tilde{L}_i$, où L_i est un module monogène libre sur $A(V_i)$; comme $q^*(\underline{S}_n)|V_i \to \underline{L}^{\otimes n}|V_i$ est surjectif par hypothèse, il existe un élément h_i de E_i dont l'image par φ_n (qui est une section de $\underline{L}^{\otimes n}$ au-dessus de $q^{-1}(U_i)$) donne par restriction à V_i un générateur de $L_i^{\otimes n}$ (I, 1, 3, cor. 2 et 4 du th. 1) ; soit $R_i' = R_i \cup \{h_i\}$. Le sous-faisceau algébrique $\underline{E}_i''$ de $\underline{S}_n|U_i$ engendré par les éléments de R_i' est de type fini, donc cohérent puisque U_i est noethérien ; il existe par suite un sous-faisceau <u>cohérent</u> $\underline{E}_i'$ de $\underline{S}_n$ induisant $\underline{E}_i''$ sur U_i (§ 1, n°2, th. 2) ; si $\underline{E}$ est le sous-faisceau de $\underline{S}_n$ somme des $\underline{E}_i'$, il est clair que $\underline{E}$ est <u>cohérent</u> et que le composé $\varphi' : q^*(\underline{E}) \to q^*(\underline{S}_n) \xrightarrow{\varphi_n} \underline{L}^{\otimes n}$ est un épimorphisme. Considérons alors dans $\underline{P}(\underline{E})$ les ouverts affines W_i' définis par les sections f_i de $\underline{E}$ au-dessus des U_i ; le choix des $\underline{E}_i''$ et la description du morphisme $r' = r_{\underline{L}^{\otimes n}, \varphi'}$ montrent que la restriction de r' à V_i correspond à un homomorphisme <u>surjectif</u> $A(W_i') \to A(V_i)$. On en conclut que cette restriction est une immersion fermée ; pour voir que r' est une immersion, on peut se limiter au cas où Y est affine, la question étant locale sur Y ; mais alors, comme W_i' et W_i sont définis par la même section f_i, il résulte de la définition de r' et de la prop. 2 du n°1 que $r'^{-1}(W_i') = V_i$, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire. - Supposons en outre que $\underline{S} = \underline{S}_{\mathcal{O}_Y}(\underline{E})$, où $\underline{E}$ est un $\mathcal{O}_Y$-Module quasi-cohérent, et que l'homomorphisme</u> $\varphi_1 : q^*(\underline{E}) \to \underline{L}$ <u>soit déjà surjectif ; alors la conclusion de la prop. 33 est déjà vraie pour</u> $n = 1$.

On notera ici que l'on peut supposer au début de la démonstration que les f_i sont des sections de $\underline{S}_1 = \underline{E}$; les g_{ij} sont alors des polynômes à coefficients dans A_i par rapport à un nombre fini d'éléments de ~~E_i~~ $\Gamma(U_i, \underline{E})$; c'est ce dernier module qu'on dénote ici par E_i , et on prend pour R_i l'ensemble ~~formé~~ de f_i et de tous les éléments de E_i au moyen desquels s'expriment les g_{ij} $(1 \leq j \leq \lambda_i)$. La fin de la démonstration est alors inchangée (avec $n=1$) , d'où la conclusion .

Archives
Grothendieck - Sept 59

P. II-68 , after prop.18 , insert :

Remarque .- Si $f' \in S'_d$, $f=\varphi(f')$, il est immédiat que le diagramme

$$\begin{tikzcd} S'_{(f')} \arrow[r, "\varphi_f"] \arrow[d, "\wr"] & S_{(f)} \arrow[d, "\wr"] \\ S'^{(d)}/(f'-1)S'^{(d)} \arrow[r] & S^{(d)}/(f-1)S^{(d)} \end{tikzcd}$$

est commutatif (cf. n°1, prop.1) .

P. II-70 , ~~at~~ before prop.21 , insert :

Corollaire .- Pour tout entier n , $\tilde{M}(n)$ s'identifie à $\Phi^*(\tilde{M}'(n))= \tilde{M}'(n)\otimes_{Y'}O_Y$; en particulier $O_X(n)=\Phi^*(O_{X'}(n))=O_{X'}(n)\otimes_{Y'}O_Y$.

Cela résulte de la prop.18 et du cor.2 de la prop.14 du n°3 .

Remarques .- 1) Si $f'\in S'_d$, $f=\varphi(f')$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} M'_{(f')} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & M'^{(d)}/(f'-1)M'^{(d)} \arrow[d] \\ M_{(f)} \arrow[r, "\sim"] & M^{(d)}/(f-1)M^{(d)} \end{tikzcd}$$

est commutatif .

2) Pour tout entier n , on a un homomorphisme canonique

$$\Gamma(X',\tilde{M}'(n)) \to \Gamma(X,\Phi^*(\tilde{M}'(n)))=\Gamma(X,\tilde{M}(n))$$

ce qui donne un di-homomorphisme de modules gradués

$$\Gamma_*(\tilde{M}') \longrightarrow \Gamma_*(\tilde{M})$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & \Gamma_*(\tilde{M}') \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\alpha"'] & \Gamma_*(\tilde{M}) \end{tikzcd}$$

soit commutatif .

P. II-74 , before prop.2 , insert :

Nous dirons dans ce qui suit que la O_Y-algèbre graduée $\underline{S}$ est engendrée par le O_Y-module $\underline{S}_1$ lorsqu'il existe un recouvrement (U_α) de Y par des ouverts affines tels que l'algèbre $\Gamma(U_\alpha,\underline{S})$ soit engendrée par le module $\Gamma(U_\alpha,\underline{S}_1)$ pour tout α .

P. II-75, before prop.4, bring back prop.3 from p.II-78, and add:

Corollaire .- Supposons qu'il existe un recouvrement ouvert fini (U_i) de Y tel que chacune des algèbres (graduées) $\Gamma(U_i,S)$ ~~[illegible]~~ soit de type fini sur $\Gamma(U_i,O_Y)$. Alors il existe $d>0$ tel que $S^{(d)}$ soit engendrée par S_d.

~~[illegible]~~ . Le corollaire résultera ~~[illegible]~~ du lemme suivant :

Lemme 1 .- Soit S une A-algèbre graduée de type fini. Il existe un entier $m>0$ tel que $S_{nm}=(S_m)^n$ pour tout entier $n>0$.

En effet, ce lemme étant supposé démontré, il correspondra à chaque algèbre graduée $\Gamma(U_i,S)$ un entier m_i, et il suffira de prendre pour d le p.p.c.m. des m_i.

Pour démontrer le lemme, on peut supposer S engendrée par un nombre fini d'éléments homogènes f_i, de degré h_i $(1\leq i\leq r)$; soit h le p.p.c.m. des h_i et posons $g_i=f_i^{h/h_i}$, de sorte que tous les g_i sont de degré h. Désignons par R_k le A-module engendré par les monômes de degré k par rapport aux g_i ; il est clair que $R_pR_q=R_{p+q}$, et d'autre part, tout monôme de degré jh par rapport aux f_i peut s'écrire comme produit d'un monôme par rapport aux g_i et d'un monôme de la forme $f_1^{t_1}f_2^{t_2}\dots f_r^{t_r}$, avec $t_i<h/h_i$. Ces monômes sont en nombre fini, désignons-les par z_j $(1\leq j\leq s)$; z_j est de degré multiple de h, soit e_jh. Soit $p>\max(e_j)$, et prenons $m=ph$; pour tout entier $n>0$, on a $S_{nm}=R_{nm-e_1h}z_1+\dots+R_{nm-e_sh}z_s$, d'où $S_{nm}=R_{(n-1)m}S_m=$ $=R_m^{n-1}S_m\subseteq S_m^{n-1}S_m\subseteq S_{nm}$, ce qui prouve que $S_{nm}=S_m^n$.

Nous dirons qu'une O_Y-algèbre S est intègre si pour chaque $y\in Y$, l'anneau local S_y est intègre.

P. II-76, last line, before "Soit S'", insert :

Supposons de plus que pour tout $y \in Y$, l'annulateur de $(\underline{S}_y)_+$ dans O_y soit réduit à 0. Soit $\underline{S}'$ le faisceau

P. II-77, replace the last sentence by :
On peut donc supposer que $S=\overline{S}$. Remarquons maintenant que l'annulateur de S_+ dans A est réduit à 0 ; s'il contenait en effet un élément $a\neq 0$, comme on a $a/1\neq 0$ dans A_y (puisque A est intègre), $a/1$ appartiendrait à l'annulateur de $(S_y)_+=(S_+)_y$, contrairement à l'hypothèse. Nous allons en déduire que si $a\neq 0$ dans A, la relation $af=0$ pour un élément homogène $f\in S_+$ entraîne $f=0$. En effet, il existe $g\in S_+$ homogène tel que $g^k a\neq 0$ pour tout $k>0$, car $g^k a=0$ entraîne $(ga)^k=0$ et par suite $ga=0$, et on sait qu'il y a au moins un $g\in S_+$ homogène ne satisfaisant pas à cette condition. Cela entraîne que $a/1\neq 0$ dans $S_{(g)}$; comme le préschéma $D_+(g)=\mathrm{Spec}(S_{(g)})$ est non vide et irréductible par hypothèse, $S_{(g)}$ est intègre, donc la relation $(a/1)(f^{d'}/g^{d})=0$ dans $S_{(g)}$ entraîne $f^{d'}/g^{d}=0$ (d, d' degrés de f et g respectivement), donc $g^k f^{d'}=0$ pour un $k>0$, et comme S_+ ne contient pas d'élément nilpotent $gf=0$; mais cela signifierait que $D_+(fg)=\emptyset$, et par suite $D_+(f)\cap D_+(g)=\emptyset$, avec $D_+(f)\neq\emptyset$, $D_+(g)\neq\emptyset$, contrairement à l'hypothèse que X est irréductible. Le même raisonnement montre qu'il n'y a pas de diviseur de 0 dans S_+ ; comme $S_0=A$ est intègre, il en est de même de S, et par suite aussi chaque S_y est intègre, ce qui achève la démonstration.

P. II-82, before n°3, insert :

Remarque .- Les homomorphismes composés

$$\underline{\tilde{M}} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} (\underline{\Gamma}_*(\underline{\tilde{M}}))^{\sim} \xrightarrow{\beta} \underline{\tilde{M}}$$

$$\underline{\Gamma}_*(\underline{F}) \xrightarrow{\alpha} \underline{\Gamma}_*((\underline{\Gamma}_*(\underline{F}))^{\sim}) \xrightarrow{\underline{\Gamma}_*(\beta)} \underline{\Gamma}_*(\underline{F})$$

sont les isomorphismes identiques (lorsqu'ils sont définis). La question est en effet locale sur Y, et on est donc ramené aux résultats correspondants du § 3 (n°3, formules (20) et (21)), compte tenu des propriétés usuelles des faisceaux quasi-cohérents (I,1,3).

P. II-80 , before line -3 , insert :

En vertu de la prop.8 , et de l'exactitude à gauche du foncteur p_*, le foncteur covariant $\underline{\Gamma}_*$ est additif et <u>exact à gauche</u> . En particulier , si $\underline{J}$ est un faisceau d'idéaux dans O_X , $\underline{\Gamma}_*(\underline{J})$ s'identifie à un sous-faisceau gradué de $\underline{\Gamma}_*(O_X)$.

P. II-88 , replace lines 5 to 12 by :

On peut donc dire que $\underline{P}(\underline{E})$ est un <u>foncteur contravariant</u> lorsqu'on convient de ne prendre comme morphismes pour les O_Y-modules quasi-cohérents que les homomorphismes <u>surjectifs</u> . En outre , si on pose $P=\underline{P}(\underline{E})$, $P'=\underline{P}(\underline{F})$ et $j=\underline{P}(u)$, on a

(14) $$j^*(O_P(n))=O_{P'}(n)$$

comme il résulte du § 3, n°5, cor. de la prop.20 .

P. II-88 , after equation (16) , insert :

Lorsqu'on prend $\underline{E}=O_Y^n$, on écrit $\underline{P}_Y^{n-1}$ au lieu de $\underline{P}(\underline{E})$; si en outre Y est affine d'anneau A , on écrit aussi $\underline{P}_A^{n-1}$.

P. II-91 , between lines -7 and -8 , insert :

est défini de même comme un morphisme $D(gg')\to D_+(ff')$, à partir de l'homomorphisme $S_{(ff')}\to B_{gg'}$ qui fait correspondre à $x_1\ldots x_{2n}/(ff')^n$ l'élément $v_c(x_1)\ldots v_c(x_{2n})/(gg')^n$; on vérifie aussitôt que $x_{ff'}$

P. II-88 , before line -12 , insert :

Proposition 16 .- Soit $\underline{L}$ un faisceau inversible sur Y . Pour tout $\underline{O}_Y$-Module quasi-cohérent $\underline{E}$, il existe un Y-isomorphisme de $\underline{P}(\underline{E})$ sur $\underline{P}(\underline{E}\otimes\underline{L})$.

Remarquons d'abord que si A est un anneau , E un A-module , L un A-module monogène, on définit un homomorphisme de A-modules $S_n(E\otimes L) \to S_n(E)\otimes L^{\otimes n}$ en faisant correspondre à $(x_1\otimes y_1)\ldots(x_n\otimes y_n)$ l'élément $(x_1 x_2 \ldots x_n)\otimes(y_1\otimes y_2\otimes\ldots\otimes y_n)$ ($x_i \in E$, $y_i \in L$ pour $1\leq i\leq n$) ; il est immédiat que cet homomorphisme est en fait un isomorphisme , en se ramenant au cas où $L=A$. On en conclut un isomorphisme canonique de A-modules gradués $S_A(E\otimes L) \simeq \bigoplus_{n\geq 0} S_n(E)\otimes L^{\otimes n}$ En revenant aux conditions de la prop. 16 , les remarques qui précèdent définissent un isomorphisme canonique $\underline{S}_{\underline{O}_Y}(\underline{E}\otimes_{\underline{O}_Y}\underline{L}) \simeq \bigoplus_{n\geq 0}\underline{S}_n(\underline{E})\otimes_{\underline{O}_Y}\underline{L}^{\otimes n}$, en définissant cet isomorphisme comme isomorphisme de préfaisceaux/ et tenant compte de I, 1, 3, cor. 4 du th. 1 /. La proposition résulte alors de la prop. 3 (iii) du n°1 .

P. II-94 , after line 11 , insert :

Proposition 17 .- (i) Soit $u : X' \to X$ un morphisme ; si le Y-morphisme $r : X \to P$ correspond à l'homomorphisme $\varphi : q^*(\underline{E}) \to \underline{L}$, le Y-morphisme $r\circ u$ correspond à $u^*(\varphi) : u^*(q^*(\underline{E})) \to u^*(\underline{L})$.

(ii) Soient $\underline{E}$, $\underline{F}$ deux $\underline{O}_Y$-Modules quasi-cohérents , $v : \underline{E} \to \underline{F}$ un homomorphisme surjectif , $j=\underline{P}(v)$ l'immersion fermée correspondante $\underline{P}(\underline{F}) \to \underline{P}(\underline{E})$ Si le Y-morphisme $r : X \to \underline{P}(\underline{F})$ correspond à l'homomorphisme $\varphi : q^*(\underline{F}) \to \underline{L}$, le Y-morphisme $j\circ r$ correspond à $q^*(\underline{E}) \xrightarrow{q^*(v)} q^*(\underline{F}) \longrightarrow \underline{L}$.

(iii) Soit $\psi : Y' \to Y$ un morphisme , et posons $\underline{E}' = \psi^*(\underline{E})$. Si le Y-morphisme $r : X \to P$ correspond à l'homomorphisme $\varphi : q^*(\underline{E}) \to \underline{L}$, le Y'-morphisme $r^{Y'} : X^{Y'} \to P' = \underline{P}(\underline{E}')$ correspond à $\varphi^{Y'} = \varphi\otimes_Y 1_{Y'}$: $q^{Y'*}(\underline{E}') = q^*(\underline{E})\otimes_Y O_{Y'} \to \underline{L}\otimes_Y O_{Y'}$.

(i) découle immédiatement des définitions ; il en est de même de (ii) compte tenu de (14) . D'autre part , d'après (15) , on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y' & P'=P^{Y'} \arrow[l, "p^{Y'}"'] \arrow[d, "v"] & X^{Y'} \arrow[l, "r^{Y'}"'] \arrow[d, "u"] \\ Y \arrow[from=u, "\psi"'] & P \arrow[l, "p"] & X \arrow[l, "r"] \end{tikzcd}$$

En vertu de (16) , on a $(r^{Y'})^*(\mathcal{O}_{P'}(1))=(r^{Y'})^*(v^*(\mathcal{O}_P(1)))=u^*(r^*(\mathcal{O}_P(1))$ $=u^*(\underline{L})=\underline{L}\otimes_Y \mathcal{O}_{Y'}$, et d'autre part (n°4) $v^*(\alpha_1^\flat)$ n'est autre que l'homomorphisme canonique $\alpha_1^\flat : (p^{Y'})^*(\underline{E}')\to \mathcal{O}_{P'}(1)$; d'où (iii) .

P. II-56 , replace 3 last lines and first line of p.II-57 by :

Le foncteur $\underline{F}\to \underline{F}(n)$ est exact, car la question est locale , et pour un voisinage convenable U de $x\in X$, $\mathcal{O}_X(n)|U$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X|U$.

Soient M, N deux S-modules gradués ; on définit sur $M\otimes_S N$ une structure de S-module gradué de la façon suivante . Sur le produit tensoriel $M\otimes_{\underline{Z}} N$, on peut définir une structure de $\underline{Z}$-module gradué en prenant $(M\otimes_{\underline{Z}} N)_q=\bigoplus_{m+n=q}\psi_{mn}(M_m\otimes_{\underline{Z}} N_n)$ où ψ_{mn} est le produit tensoriel des injections $M_m\to M$, $N_n\to N$. Comme $M\otimes_S N=(M\otimes_{\underline{Z}} N)/P$, où P est le sous-module de $M\otimes_{\underline{Z}} N$ formé des éléments $(xs)\otimes y-x\otimes(sy)$, où $x\in M, y\in N, s\in S$, et que P est évidemment un sous-module gradué de $M\otimes_{\underline{Z}} N$, on obtient de cette façon une graduation sur $M\otimes_S N$.

P. II-57 , after formula (12) , replace the four next lines by :

Rappelons que pour des modules gradués , $\mathrm{Hom}_S(M,N)$ désigne , non l'ensemble de tous les homomorphismes de M dans N , mais la somme (directe) des sous-groupes $(\mathrm{Hom}_S(M,N))_n$, où cette notation désigne l'ensemble des homomorphismes de degré n . Si u est un homomorphisme de degré n et $s\in S_k$, s.u est de degré k+n , donc les $(\mathrm{Hom}_S(M,N))_n$ définissent sur $\mathrm{Hom}_S(M,N)$ une structure de S-module gradué .

P.II-69 , first line after prop.19 , read "homomorphisme" instead of "isomorphisme" .

P. II-95 , before Prop. 19 , insert :

<u>Corollaire .- Si on pose</u> $\underline{P}=\underline{P}(\underline{E}\otimes\underline{F})$, $\nu^{*}(\mathcal{O}_{P}(1))$ <u>est canoniquement isomorphe à</u> $\mathcal{O}_{P_1}(1)\otimes_{\mathcal{O}_Y}\mathcal{O}_{P_2}(1)=\underline{L}$.

En effet , avec les notations de la démonstration de la prop. 18 , le faisceau induit par $\mathcal{O}_P(1)$ sur $D_+(f\otimes g)$ correspond canoniquement au $S_{(f\otimes g)}$-module monogène libre ayant pour générateur $(f\otimes g)/1$, donc le faisceau induit par $\nu^{*}(\mathcal{O}_P(1))$ sur $D_+(f)\times D_+(g)$ ~~XXXXXX~~ correspond au $(S_{(f)}\otimes S_{(g)})$-module monogène ayant le même générateur ; en lui faisant correspondre le module monogène de générateur $(f/1)\otimes(g/1)$,on définit localement l'isomorphisme de l'énoncé ; il est immédiat de vérifier que ces isomorphismes locaux sont compatibles avec les opérations de restriction .

P. II-96 , before n°6 , insert :

<u>Remarque</u> .- Le préschéma <u>somme</u> de $\underline{P}(\underline{E})$ et $\underline{P}(\underline{F})$ ~~XXX~~ est de même canoniquement isomorphe à un <u>sous-préschéma fermé de</u> $\underline{P}(\underline{E}\oplus\underline{F})$. En effet les homomorphismes surjectifs $\underline{E}\oplus\underline{F}\rightarrow\underline{E}$ et $\underline{E}\oplus\underline{F}\rightarrow\underline{F}$ correspondent à des immersions fermées $\underline{P}(\underline{E})\rightarrow\underline{P}(\underline{E}\oplus\underline{F})$ et $\underline{P}(\underline{F})\rightarrow\underline{P}(\underline{E}\oplus\underline{F})$; tout revient à voir que les espaces de base des sous-préschémas fermés de $\underline{P}(\underline{E}\oplus\underline{F})$ ainsi obtenus sont sans point commun. La question étant locale sur Y , on peut supposer que $Y=\mathrm{Spec}(A)$, $\underline{E}=\tilde{E}$, $\underline{F}=\tilde{F}$, E et F étant des A-modules ; or $S_n(E)$ et $S_n(F)$ s'identifient à des sous-modules (d'intersection réduite à 0) de $S_n(E\oplus F)$, et si $\underline{p}$ est un idéal premier gradué de ~~XX~~ $\underline{S}_A(E)$ tel que $\underline{p}_n\neq S_n(E)$, il lui correspond dans $\underline{S}_A(E\oplus F)$ un idéal premier gradué dont la trace sur $S_n(E)$ est $\underline{p}_n$, mais qui <u>contient</u> $S_+(F)$, comme on le voit aussitôt ; deux ~~XXXX~~ ~~[illegible]~~ points de $\mathrm{Proj}(\underline{S}_A(E))$ et $\mathrm{Proj}(\underline{S}_A(F))$ respectivement ne peuvent donc avoir même image dans $\mathrm{Proj}(\underline{S}_A(E\oplus F))$.

P. II-98 , before th.4 , insert :

Corollaire .- Soit $f : X \to Y$ un morphisme projectif . Pour tout ouvert $U \subset Y$, la restriction de f au sous-préschéma induit $f^{-1}(U)$ est un morphisme projectif .

En effet , cette restriction s'identifie à $f^U : X \times_Y U \to Y \times_Y U = U$, et il suffit d'appliquer le th.3 (iii).

Remarque .- Soient $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y$ deux morphismes projectifs, et soient Z le préschéma somme de X et X' , g le morphisme $Z \to Y$ coïncidant avec f dans X , avec f' dans X' . Si f et f' sont projectifs , il en est de même de g . En effet , si X (resp. X') s'identifie à un sous-préschéma fermé de $\underline{P}(\underline{E})$ (resp. $\underline{P}(\underline{E}')$) , où $\underline{E}$ et $\underline{E}'$ sont des O_Y-Modules quasi-cohérents de type fini , on a vu (n°5, Remarque) que Z s'identifie à un sous-préschéma fermé de $\underline{P}(\underline{E} \oplus \underline{E}')$.

P. II-101 , before prop.26 , insert :

Remarque .- Si $f : X \to Y$, $f' : X' \to Y$ sont deux morphismes quasi-projectifs , Z le préschéma somme de X et X' , le morphisme $g : Z \to Y$ coïncidant avec f dans X et avec f' dans X' , est quasi-projectif , comme il résulte aussitôt de la Remarque du n°5 .

P. II-104 , before prop.31 , insert :

Remarque .- Dans la démonstration de la prop.30 , pour prouver que $(r,r'')_Y$ est une immersion , il suffit que l'un des morphismes r,r' soit une immersion ; on voit donc qu'on peut affirmer que $\underline{L} \otimes \underline{L}'$ est très ample lorsque $\underline{L}$ est très ample et qu'il existe un homomorphisme surjectif $q^*(\underline{E}') \to \underline{L}'$, où $q : X \to Y$ est le morphisme structural , et $\underline{E}'$ un O_Y-Module quasi-cohérent de type fini.

p.II-109 , replace last 3 lines and first lines of p.II-110, until prop.3 , by :

d'après la remarque faite ci-dessus , dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X\times_Y Y' & \longrightarrow & Y\times_Y Y'=Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ X\times_S Y' & \longrightarrow & Y\times_S Y' \end{array}$$

les flèches verticales sont des immersions fermées ; il en résulte immédiatement que si $X\times_S Y'\to Y\times_S Y'$ est une application fermée , il en est de même de $X\times_Y Y'\to Y'$.

P. II-11 , before n°3 , add :

<u>Corollaire 4 .- Si</u> Y <u>est réduit , il en est de même de</u> $\mathbf{Y}$.

Sinon , en vertu de I,3,4~~M~~,prop.9 appliqué aux sous-espaces Y et $\mathbf{Y}$, il existerait un sous-faisceau $\underline{J}_1$ de O_X strictement plus grand que $\underline{J}$, induisant $\underline{J}$ sur Y , contrairement à la définition de $\underline{J}$.

P. II-38 , before Prop.17 , add :

<u>Proposition 16 bis .- Si</u> X ~~est un morphisme entier~~ $f : X\to Y$ <u>est un morphisme entier , on a</u> $\dim(X)=\dim(f(X))\leq\dim(Y)$.

En utilisant la prop.16 , et remplaçant Y par le sous-préschéma fermé réduit ayant pour espace de base $f(X)$ (I,3,4,prop.9 et cor. , et ci-dessus , prop.15 (v)) on se ramène au cas où $Y=f(X)$. Si X_i est une composante irréductible de X, de point générique x_i, il résulte de la prop.16 que $f(X_i)$ est irréductible de point générique ~~x~~ $f(x_i)$; on peut donc supposer X et Y irréductibles , avec $Y=f(X)$, et aussi que X et Y sont réduits (prop.15 (vi)); enfin , en remplaçant Y par un ouvert affine de Y , on peut supposer Y (et par suite X) affine . Si $X=\mathrm{Spec}(B)$, $Y=\mathrm{Spec}(A)$, B est alors un anneau entier sur A ,donc il résulte du premier th. de Cohen-Seidenberg que $\dim(B)=\dim(A)$.

P. II-71-72 , cor.1 and 2 become cor.2 and 3; insert before :

(i) et en supposant S_+ engendré par S_1

Corollaire 1 .- Sous les hypothèses de la prop. 21 ~~XXX~~ , on a $\Phi^*((S(n))^\sim)=(S'(n))^\sim$ pour tout $n\in \underline{Z}$, et par suite $\Phi^*(\underline{F}(n))=\Phi^*(\underline{F})(n)$ pour tout O_X-module $\underline{F}$.

Soit en effet $f\in S_1$ et $f'=\varphi(f)$; on déduit de φ un homomorphisme

$$(S(n))_{(f)}\otimes_{S_{(f)}} S'_{(f')}\rightarrow (S'(n))_{(f')}$$

en faisant correspondre à $(x_{n+k}/f^k)\otimes 1$ $(x_{n+k}\in S_{n+k})$ l'élément x'_{n+k}/f'^k où $x'_{n+k}=\varphi(x_{n+k})$; cet homomorphisme est surjectif puisque φ l'est ; en outre , tout élément de $(S(n))_{(f)}\otimes_{S_{(f)}} S'_{(f')}$ peut se mettre sous la forme $(x_{n+k}/f^k)\otimes 1$ ~~XXXXXXXXXX~~ ; si on a $f'^h x'_{n+k}=0$ pour un h , on en conclut que $f^h x_{n+k}\in \underline{I}$, d'où $f'^h x'_{n+k}/f'^{n+h+k}=0$ dans $S'_{(f')}$, et comme ~~XX~~ $(x_{n+k}/f^k)\otimes 1=(f^n/1)\ (f'^h x'_{n+k}/f'^{n+h+k})$, on a bien $(x_{n+k}/f^k)\otimes 1=0$, ce qui démontre le corollaire .

P.II-72 , after cor.3 , add :

Remarque .- Supposons que l'homomorphisme φ : S S' soit tel que la restriction $S_n\rightarrow S'_n$ soit un isomorphisme lorsque n est assez grand Comme on peut supposer que $S_0\rightarrow S'_0$ est aussi un isomorphisme (en remplaçant S_0 et S'_0 par $\underline{Z}$, cf.n°2,Remarque finale) , on en conclut que pour d assez grand , $S^{(d)}\rightarrow S'^{(d)}$ est un isomorphisme , donc (n° 2,Remarque) Proj(S) et Proj(S') s'identifient par φ , et ~~XXXX~~ cet isomorphisme identifie $O_X(n)$ et $O_{X'}(n)$ pour tout n .

P.II-87 , cor. becomes cor.2 ; insert before :

Corollaire 1 .- Sous les conditions de la prop.15 (i) , et en supposant S engendré par S_1 , $O_{X'}(n)$ s'identifie à l'image ~~XXXXXX~~ réciproque de $O_X(n)$ par l'injection canonique .

Comme la question est locale , on peut supposer ~~XX~~ Y affine , et on est ramené au cor.1 de la prop.21 du § 3,n°5 .

The last lines of p.II-76 have been destroyed by error . Read ;

Proposition 4 .- Si le faisceau quasi-cohérent d'algèbres graduées $\underline{S}$ *est intègre , alors* $X=\mathrm{Proj}(\underline{S})$ *est réduit . Si de plus* Y *est irréductible et* $\underline{S}_0=\underline{O}_Y$ *, alors* X *est irréductible et son image dans* Y *est partout dense .*

On peut se ramener au cas où Y est un *schéma affine* : c'est évident

P. II-21 , after the corollary , add :

Remarque .- Les démonstrations du th.3 et de son corollaire montrent que ce dernier est encore valable sous les conditions plus faibles suivantes sur $\underline{K}'$:

1) La somme directe de deux faisceaux de $\underline{K}'$ est dans $\underline{K}'$.

2) Si $\underline{F}^k \in \underline{K}'$ pour un entier k , alors $\underline{F} \in \underline{K}'$.

3) Soit u : $\underline{F} \to \underline{G}$ un homomorphisme de faisceaux cohérents sur X , et supposons que $\underline{G}$ (resp. $\underline{F}$) ainsi que Ker u et Coker u soient dans $\underline{K}'$, et en outre que les dimensions des supports de Ker u et de Coker u soient strictement inférieures à celle du support de $\underline{G}$ (resp. $\underline{F}$); alors $\underline{F} \in \underline{K}'$ (resp. $\underline{G} \in \underline{K}'$).

On observera en effet que dans le cas a) du th.3 , on peut prendre pour Y' et Y" des réunions de composantes irréductibles de Y , et alors la dimension de $Y' \cap Y''$ est strictement inférieure à celle de Y ; et dans le cas b) , comme Y est irréductible , toute partie fermée de Y , distincte de Y , a une dimension strictement inférieure à celle de Y .

P. II-43 , add a new section :

6 . Cônes projetants .

Soit S un anneau gradué à degrés positifs . On dit que le schéma affine X'=Spec(S) est le cône projetant du spectre premier homogène X=Proj(S) ; l'ensemble fermé $V(S_+)$ des idéaux premiers de S contenant S_+ est appelé le sommet de X' ; il est réduit à un point lorsque S_+ est maximal , c'est-à-dire lorsque S_0 est un corps . L'ensemble ouvert $X''=X'-V(S_+)$ est réunion des S_f , lorsque f parcourt l'ensemble des éléments homogènes de S_+ , car pour un idéal premier $\underline{p}$ ne contenant pas S_+ il y a au moins un élément homogène de S_+ n'appartenant pas à $\underline{p}$. Pour tout f homogène dans S_+ , l'injection canonique $S_{(f)} \to S_f$

définit un morphisme $u_f : D(f) \to D_+(f)$, qui est surjectif d'après (6) ; en outre , si g est un second élément homogène de S_+ , l'application canonique $S_f \to S_{fg}$ transforme $S_{(f)}$ en $S_{(fg)}$, donc u_{fg} est la restriction de u_f à $D(fg)$, ce qui prouve que les u_f sont les restrictions d'un <u>morphisme canonique</u> surjectif $u : X'' \to X$.

<u>Proposition 22 .- Pour tout</u> $x \in X$, <u>la fibre</u> $u^{-1}(x)$ <u>est un préschéma affine sur</u> $\kappa(x)$ <u>isomorphe au spectre de</u> $\kappa(x)[T]$, <u>où</u> T <u>est une indéterminée</u> .

Observons d'abord que pour tout idéal premier gradué $\underline{p} \subset S_+$, $u^{-1}(\underline{p})$ est l'ensemble des idéaux premiers $\underline{q}$ de S tels que $\underline{q} \cap S_n = \underline{p} \cap S_n$ pour tout $n > 0$. On a donc $u^{-1}(D_+(f)) \subset D(f)$ pour tout f homogène dans S_+ , et comme les $D_+(f)$ recouvrent X , $u^{-1}(x)$ est isomorphe à un préschéma de la forme $D(f) \times_{D_+(f)} \mathrm{Spec}(\kappa(x))$, où $x \in D_+(f)$. Or , on a $S_f = S_{(f)}[f/1]$, et il est immédiat que $f/1$ et ses puissances sont des éléments libres sur $S_{(f)}$ (n°3, prop.13) , donc S_f est une $S_{(f)}$-algèbre isomorphe à $S_{(f)}[T]$, et la proposition en résulte aussitôt .

Si S_0 est un corps k , il revient au même de dire que X est intègre ou que son cône projetant X' est intègre (n°3, prop.7) .

P. II-104 ter , the cor.2 is incorrect , and should be replaced by :

Corollaire 2 .- Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux morphismes , Z étant supposé noethérien . Si $\underline{L}$ est un faisceau ample sur X pour f , $\underline{K}$ un faisceau ample sur Y pour g , il existe un entier $n > 0$ tel que $\underline{L}\otimes f^*(\underline{K}^{\otimes n})$ soit ample sur X pour $g\circ f$.

En effet $(\underline{L}\otimes f^*(\underline{K}^{\otimes n}))^{\otimes m} = \underline{L}^{\otimes m}\otimes f^*(\underline{K}^{\otimes nm})$, et on peut d'abord prendre n assez grand pour que $\underline{K}^{\otimes n}$ soit très ample , puis m assez grand pour que $\underline{L}^{\otimes m}$ soit très ample ; le corollaire résulte alors de la prop.31 (iv) .

P. II-105 bis , in cor.1 , suppress the first sentence ; the beginning of the proof should then read :

Notons que r est un Y-morphisme de type fini , car son composé avec Proj(S)$\to$Y est de type fini(I,4,2,cor.2 de la prop.9);comme on suppo-

P. II-105 ter , suppress in cor.2 the assumption that S is of finite type .

P. II-105 quater and 105 quinquiès are rewritten (see further on) .

P. II-106 ter and 106-quater , from line -6 of p.106 ter to line 3 of p.106-quater , replace "Soit t.." by :

Par hypothèse , pour n assez grand , il existe un voisinage ouvert affine U de q(x) dans Y tel que $(\underline{J}\otimes\underline{L}^{\otimes n})|q^{-1}(U)$ soit engendré par ses sections ; il existe donc une section s' de ce faisceau qui ne s'annule par en x ; comme $x\notin\overline{\{y\}}$, l'image s de cette section dans $\underline{L}^{\otimes n}$ répond à la question .

P. II-106 , in the statement of prop.34 (iii) , read :

/..tel que l'homomorphisme composé $q^*(\underline{E})\to q^*(q_*(\underline{L}))\to\underline{L}$ soit surjectif...

Archives
Grothendieck Sept 59

P. II-21 , after the corollary , add :

<u>Remarque</u> .- Les démonstrations du th.3 et de son corollaire montrent que ce dernier est encore valable sous les conditions plus faibles suivantes sur $\underline{K}'$:

1) La somme directe de deux faisceaux de $\underline{K}'$ est dans $\underline{K}'$.

2) Si $\underline{F}^k \in \underline{K}'$ pour un entier k , alors $\underline{F} \in \underline{K}'$.

3) Soit $u : \underline{F} \to \underline{G}$ un homomorphisme de faisceaux cohérents sur X , et supposons que $\underline{G}$ (resp. $\underline{F}$) ainsi que Ker u et Coker u soient dans $\underline{K}'$, et en outre que les dimensions des supports de Ker u et de Coker u soient strictement inférieures à celle du support de $\underline{G}$ (resp. $\underline{F}$); alors $\underline{F} \in \underline{K}'$ (resp. $\underline{G} \in \underline{K}'$) .

On observera en effet que dans le cas a) du th.3 , on peut prendre pour Y' et Y'' des réunions de composantes irréductibles de Y , et alors la dimension de $Y' \cap Y''$ est strictement inférieure à celle de Y ; et dans le cas b) , comme Y est irréductible , toute partie fermée de Y , distincte de Y , a une dimension strictement inférieure à celle de Y .

P. II-43 , add a new section :

<u>6 . Cônes projetants</u> .

Soit S un anneau gradué à degrés positifs . On dit que le schéma affine $X' = \mathrm{Spec}(S)$ est le <u>cône projetant</u> du spectre premier homogène $X = \mathrm{Proj}(S)$; l'ensemble fermé $V(S_+)$ des idéaux premiers de S contenant S_+ est appelé le <u>sommet</u> de X' ; il est réduit à un point lorsque S_+ est maximal , c'est-à-dire lorsque S_0 est un <u>corps</u> . L'ensemble ouvert $X'' = X' - V(S_+)$ est réunion des S_f , lorsque f parcourt l'ensemble des éléments homogènes de S_+ , car pour un idéal premier $\underline{p}$ ne contenant pas S_+ il y a au moins un élément homogène de S_+ n'appartenant pas à $\underline{p}$. Pour tout f homogène dans S_+ , l'injection canonique $S_{(f)} \to S_f$

définit un morphisme $u_f : D(f) \to D_+(f)$, qui est surjectif d'après (6) ; en outre , si g est un second élément homogène de S_+ , l'application canonique $S_f \to S_{fg}$ transforme $S_{(f)}$ en $S_{(fg)}$, donc u_{fg} est la restriction de u_f à $D(fg)$, ce qui prouve que les u_f sont les restrictions d'un morphisme canonique surjectif $u : X'' \to X$.

Proposition 22 .- Pour tout $x \in X$, la fibre $u^{-1}(x)$ est un schéma affine sur $\kappa(x)$ isomorphe au spectre de $\kappa(x)[T]$, où T est une indéterminée .

Observons d'abord que pour tout idéal premier gradué $\underline{p} \subset S_+$, $u^{-1}(\underline{p})$ est l'ensemble des idéaux premiers $\underline{q}$ de S tels que $\underline{q} \cap S_n = \underline{p} \cap S_n$ pour tout $n > 0$. On a donc $u^{-1}(D_+(f)) \subset D(f)$ pour tout f homogène dans S_+ , et comme les $D_+(f)$ recouvrent X , $u^{-1}(x)$ est isomorphe à un préschéma de la forme $D(f) \times_{D_+(f)} \mathrm{Spec}(\kappa(x))$, où $x \in D_+(f)$. Or , on a $S_f = S_{(f)}[f/1]$, et il est immédiat que $f/1$ et ses puissances sont des éléments libres sur $S_{(f)}$ (n°3, prop. 13) , donc S_f est une $S_{(f)}$-algèbre isomorphe à $S_{(f)}[T]$, et la proposition en résulte aussitôt .

Si S_0 est un corps k , il revient au même de dire que X est intègre ou que son cône projetant X'' est intègre (n°3, prop. 7) .

P. II-104 ter , the cor.2 is incorrect , and should be replaced by :

Corollaire 2 .- Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux morphismes , Z étant supposé noethérien . Si $\underline{L}$ est un faisceau ample sur X pour f , $\underline{K}$ un faisceau ample sur Y pour g , il existe un entier $n > 0$ tel que ~~EXXXf*(K)XXXX~~ $\underline{L} \otimes f^*(\underline{K}^{\otimes n})$ soit ample sur X pour $g \circ f$.

En effet $(\underline{L} \otimes f^*(\underline{K}^{\otimes n}))^{\otimes m} = \underline{L}^{\otimes m} \otimes f^*(\underline{K}^{\otimes nm})$, et on peut d'abord prendre n assez grand pour que $\underline{K}^{\otimes n}$ soit très ample , puis m assez grand pour que $\underline{L}^{\otimes m}$ soit très ample ; le corollaire résulte alors de la prop.31 (iv) .

P. II-105 bis , in cor.1 , suppress the first sentence ; the beginning of the proof should then read :

Notons que r est un Y-morphisme de type fini , car son composé avec $\mathrm{Proj}(S) \to Y$ est de type fini (I,4,2,cor.2 de la prop.9) ; comme on suppo-

P. II-105 ter , suppress in cor.2 the assumption that S is of finite type .

P. II-105 quater and 105 quinquiès are rewritten (see further on) .

P. II-106 ter and 106-quater , from line -6 of p.106 ter to line 3 of p.106-quater , replace "soit t.." by :

Par hypothèse , pour n assez grand , il existe un voisinage ouvert affine U de q(x) dans Y tel que $(\underline{J} \otimes \underline{L}^{\otimes n}) | q^{-1}(U)$ soit engendré par ses sections ; il existe donc une section s' de ce faisceau qui ne s'annule pas en x ; comme $x \notin \overline{\{y\}}$, l'image s de cette section dans $\underline{L}^{\otimes n}$ répond à la question .

P. II-106 , in the statement of prop.34 (iii) , read :

...tel que l'homomorphisme composé $q^*(\underline{E}) \to q^*(q_*(\underline{L})) \to \underline{L}$ soit surjectif...

Archives Grothendieck - sept 59

CHAPITRE III

COHOMOLOGIE DES FAISCEAUX ALGEBRIQUES COHERENTS . APPLICATIONS .

§ 1 . Cohomologie des schémas affines .

1 . Rappels sur le complexe de l'algèbre extérieure .

Soient A un anneau , $\underline{f}=(f_i)_{1\leq i\leq n}$ un système de n éléments de A . Le complexe de l'algèbre extérieure $K_*(\underline{f})$ correspondant à $\underline{f}$ est un complexe de chaînes se définissant de la façon suivante : le A-module gradué $K_*(\underline{f})$ est égal à l'algèbre extérieure $\bigwedge(A^n)$, graduée de la façon usuelle , et l'opérateur bord est la multiplication intérieure ~~par~~ $i_{\underline{f}}$ par ~~XXXXXXXX~~ $\underline{f}$ considéré comme élément du dual A^n ; on rappelle que $i_{\underline{f}}$ est une antidérivation de $\bigwedge(A^n)$ de degré -1, définie par la condition que , si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la base canonique de A^n , $i_{\underline{f}}(e_i)=f_i$; la vérification de la relation $i_{\underline{f}}i_{\underline{f}}=0$ est immédiate .

Une définition équivalente est la suivante : pour chaque i , on considère un complexe de chaînes $K_*(f_i)$ défini de la façon suivante : $K_o(f_i)=K_1(f_i)=A$, $K_n(f_i)=0$ pour $n>1$; l'opérateur bord est défini par la condition que $d_o : A\rightarrow A$ est la multiplication par f_i . On prend alors pour $K_*(\underline{f})$ le produit tensoriel $K_*(f_1)\otimes\ldots\otimes K_*(f_n)$ (G,I, 2.7) muni de son degré total ; la vérification de l'isomorphisme de ce complexe et du complexe $K_*(\underline{f})$ défini ci-dessus est immédiate .

Pour tout A-module M , on définit le complexe de chaînes

(1) $$K_*(\underline{f},M)=K_*(\underline{f})\otimes_A M$$

et le complexe de cochaînes

(2) $$K^*(\underline{f},M)=\mathrm{Hom}_A(K_*(\underline{f}),M) .$$

Si g est une k-cochaîne de ce complexe , il résulte des définitions précédentes que ~~XXXXXX~~ si on pose $g(i_1,\ldots,i_k)=g(e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k})$, g est alternée et l'on a

(3) $$dg(i_1,i_2,\ldots,i_{k+1})=\sum_{h=1}^{k+1}(-1)^h f_{i_h}\, g(i_1,\ldots,\hat{i}_h,\ldots,i_{k+1}) .$$

Des complexes précédents, on déduit comme d'ordinaire les modules dérivés d'homologie et de cohomologie

(4) $$H_*(\underline{f},M)=H_*(K_*(\underline{f},M))$$

(5) $$H^*(\underline{f},M)=H^*(K^*(\underline{f},M)) .$$

On définit d'ailleurs un A-isomorphisme $K_*(\underline{f},M)\simeq K^*(\underline{f},M)$ en faisant correspondre à toute chaîne $z=\sum(e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k})\otimes z_{i_1\ldots i_k}$ la cochaîne g_z telle que $g_z(j_1,\ldots,j_{r-k})=z_{i_1\ldots i_k}$, où $(j_h)_{1\leq h\leq r-k}$ est la suite complémentaire de $(i_h)_{1\leq h\leq k}$ dans $[1,r]$ et ν le nombre d'inversions de la permutation $i_1,\ldots,i_k,j_1,\ldots,j_{r-k}$; on vérifie que $g_{dz}=d(g_z)$ et par suite les modules d'homologie et de cohomologie (4) et (5) sont isomorphes . Dans ce chapitre , on étudiera surtout les groupes de cohomologie $H^*(\underline{f},M)$.

$(-1)^\nu$

Il est immédiat que $H^*(\underline{f},M)$ est un foncteur cohomologique (T,II,2.1) de la catégorie des A-modules dans celle des A-modules gradués , nul pour les degrés <0 et $>n$. En outre , on a

(6) $$H^0(\underline{f},M)=\mathrm{Hom}_A(A/(\underline{f}),M)$$

où $(\underline{f})$ désigne l'idéal de A engendré par $f_1,\ldots,f_r$; ce module n'est autre que le sous-module de M annulé par $(\underline{f})$. On a aussi

(7) $$H^n(\underline{f},M)=(A/(\underline{f}))\otimes_A M=M/(\sum_{i=1}^{r} f_iM)$$

d'après l'isomorphie entre H^n et H_0 signalée ci-dessus .

Soit $\underline{g}=(g_i)_{1\leq i\leq r}$ une seconde suite de r éléments de A ; posons $\underline{fg}=(f_ig_i)_{1\leq i\leq r}$. On peut définir un homomorphisme canonique de complexes

$$\varphi_{\underline{g}} : K_*(\underline{fg})\to K_*(\underline{f})$$

comme l'extension canonique à l'algèbre extérieure $\bigwedge(A^r)$ de l'application A-linéaire $(x_1,\ldots,x_r)\to(g_1x_1,\ldots,g_rx_r)$ de A^r dans A^r ; pour voir qu'on a bien un homomorphisme de complexes , il suffit de remarquer , de façon générale , que si $u : E\to F$ est une application A-linéaire , $x\in F'$ et $y={}^tu(x)\in E'$, alors on a la formule

(8) $$(\bigwedge u)\circ i_y=i_x\circ(\bigwedge u) ;$$

en effet , les deux membres sont des antidérivations de $\bigwedge E$, et il suffit de vérifier qu'ils coïncident dans E , ce qui résulte aussitôt des définitions . Lorsqu'on identifie $K_*(\underline{f})$ au produit tensoriel des $K_*(f_i)$, $\varphi_{\underline{g}}$ est le produit tensoriel des φ_{g_i} , où φ_{g_i} se réduit à l'identité en degré 0 et à la multiplication par g_i en degré 1 .

En particulier, si m,n sont deux entiers tels que $m \geq n \geq 0$, on a des homomorphismes de complexes

$$\varphi_{\underline{f}^{m-n}} : K_*(\underline{f}^m) \to K_*(\underline{f}^n)$$

et par suite des homomorphismes (notés par le même symbole)

$$\varphi_{\underline{f}^{m-n}} \quad : \quad \begin{matrix} K^*(\underline{f}^n, M) \to K^*(\underline{f}^m, M) \\ H^*(\underline{f}^n, M) \to H^*(\underline{f}^m, M) \end{matrix} \quad .$$

Ces derniers homomorphismes vérifient évidemment la condition de transitivité $\varphi_{\underline{f}^{q-n}} = \varphi_{\underline{f}^{q-m}} \circ \varphi_{\underline{f}^{m-n}}$ pour $n \leq m \leq q$; ils définissent donc deux systèmes inductifs ; on posera

$$(9) \qquad \begin{matrix} C^*((\underline{f}),M) = \varinjlim K^*(\underline{f}^n, M) \\ H^*((\underline{f}),M) = H^*(C^*((\underline{f}),M)) = \varinjlim H^*(\underline{f}^n, M) \end{matrix}$$

la dernière relation provenant du fait que le passage à la limite inductive permute au foncteur H^* ; on verra ultérieurement que $H^*((\underline{f}),M)$ ne dépend en fait que de l'idéal $(\underline{f})$ (et même de la topologie $(\underline{f})$-adique sur A) , ce qui justifie les notations .

Il est clair que $C^*((\underline{f}),M)$ est un foncteur A-linéaire exact en M et $H^*((\underline{f}),M)$ un foncteur cohomologique en M .

Soient $\underline{f} = (f_i) \in A^r$, $\underline{g} = (g_i) \in A^r$; désignons par $e_{\underline{g}}$ la multiplication extérieure à gauche par le vecteur $\underline{g} \in A^r$ dans l'algèbre extérieure $\bigwedge(A^r)$; on sait que l'on a la formule d'homotopie

$$i_{\underline{f}} e_{\underline{g}} + e_{\underline{g}} i_{\underline{f}} = \langle \underline{g}, \underline{f} \rangle 1$$

dans le~~s~~ A-module A^r (1 désignant l'automorphisme identique de A^r) ; cette relation signifie aussi que, dans le complexe $K_*(\underline{f})$, on a

$$d e_{\underline{g}} + e_{\underline{g}} d = \langle \underline{g}, \underline{f} \rangle 1 \ .$$

Si l'idéal $(\underline{f}) = A$, il existe $\underline{g} \in A^r$ tel que $\langle \underline{g}, \underline{f} \rangle = \sum_{i=1}^{r} g_i f_i = 1$. Par suite (G, I, 2.4)

Proposition 1 .- Supposons que l'idéal $(\underline{f})$ *engendré par les* f_i *soit* A . *Alors le complexe* $K_*(\underline{f})$ *est homotopiquement équivalent à 0 , et il en est de même des complexes* $K_*(\underline{f},M)$ *et* $K^*(\underline{f},M)$ *pour tout A-module* M .

Corollaire .- Si $(\underline{f})=A$, *on a* $H^*(\underline{f},M)=0$ *et* $H^*((\underline{f}),M)=0$ *pour tout A-module* M .

On a en effet alors $(\underline{f}^n)=A$.

2 . Cohomologie de Cech d'un recouvrement ouvert .

Notations .- Dans ce qui suit , on désignera par :

X un préschéma ;

F un faisceau quasi-cohérent sur X ;

$A=\Gamma(X,O_X)$, $M=\Gamma(X,F)$;

$\underline{f}=(f_i)_{1\leq i\leq r}$ un système fini d'éléments de A ;

$U_i=X_{f_i}$ l'ensemble ouvert (II,1,3,cor.1 de la prop.13) des $x\in X$ où la section f_i "ne s'annule pas" ;

$U=\bigcup_{i=1}^{r} U_i$;

$\underline{U}$ le recouvrement $(U_i)_{1\leq i\leq r}$ de U .

Supposons que X soit , ou bien *noethérien* , ou bien un *schéma* dont l'espace de base est *quasi-compact* . On sait alors (cor.2 du II,1,4,th.2) que l'on a $\Gamma(U_i,F)=M_{f_i}$. Nous poserons $U_{i_0i_1\ldots i_p}=\bigcap_{k=0}^{p} U_{i_k}=X_{f_{i_0}f_{i_1}\ldots f_{i_p}}$ (II,1,3,cor.2 de la prop.13) ; on a donc aussi

(10) $\Gamma(U_{i_0i_1\ldots i_p},F)=M_{f_{i_0}f_{i_1}\ldots f_{i_p}}$.

Or (chap.0,§ 1,n°6) $M_{f_{i_0}\ldots f_{i_p}}$ s'identifie à la limite inductive $\varinjlim M^{(n)}_{i_0i_1\ldots i_p}$, où le système inductif est formé des $M^{(n)}_{i_0\ldots i_p}=M$, l'homomorphisme $\varphi_{nm} : M^{(n)}_{i_0\ldots i_p}\to M^{(n)}_{i_0\ldots i_p}$ étant la multiplication par $(f_{i_0}f_{i_1}\ldots f_{i_p})^{n-m}$ pour $m\leq n$. Désignons par $C^p_n(M)$ l'ensemble des applications *alternées* de $[1,r]^{p+1}$ dans M (pour tout n) ; ces A-modules forment encore un système inductif pour les φ_{nm}. Si $C^p(\underline{U},F)$ est le groupe des p-cochaînes alternées de Čech, relativement au recouvrement $\underline{U}$, et à coefficients dans F, il résulte de ce qui précède que l'on peut écrire

(11) $$C^p(\underline{U},F)=\varinjlim_n C^p_n(M) .$$

Or, avec les notations du n°1, $C^p_n(M)$ s'identifie à $K^{p+1}(\underline{f}^n,M)$, et l'application φ_{nm} s'identifie à l'application $\varphi_{\underline{f}^{n-m}}$ définie au n°1. On a donc, pour tout $p\geqslant 0$, un isomorphisme canonique fonctoriel en M

(12) $$C^p(\underline{U},F)\simeq C^{p+1}((\underline{f}),M) .$$

La formule (3) du n°1 montre en outre que ces isomorphismes sont compatibles avec les opérateurs cobord. Il en résulte :

Proposition 2.- Si X est un préschéma noethérien, ou un schéma dont l'espace de base est quasi-compact, il existe pour tout $p\geqslant 1$ un isomorphisme canonique fonctoriel en M

(13) $$H^p(\underline{U},F)\simeq H^{p+1}((\underline{f}),M) .$$

On a en outre une suite exacte fonctorielle en M

(14) $$0\to H^0((\underline{f}),M)\to M\to H^0(\underline{U},F)\to H^1((\underline{f}),M)\to 0 .$$

Les relations (13) sont en effet évidentes d'après ce qui précède. D'autre part, $M=C^0((\underline{f}),M)$ et $C^0(\underline{U},F)=C^1((\underline{f}),M)$, donc $H^0(\underline{U},F)$ s'identifie au sous-groupe des 1-cocycles de $C^1((\underline{f}),M)$; la suite exacte (3) n'est autre alors que celle qui résulte de la définition des groupes de cohomologie $H^0((\underline{f}),M)$ et $H^1((\underline{f}),M)$.

Corollaire.- Supposons qu'il existe des $g_i\in\Gamma(U,O_X)$ tels que $\sum_i g_i f_i=1$ au-dessus de U. Alors, pour tout faisceau quasi-cohérent G sur U, on a $H^i(\underline{U},G)=0$ pour $i>0$; si en outre X=U, l'homomorphisme canonique $M\to H^0(\underline{U},F)$ est bijectif.

On peut en effet supposer X=U (les $X_{f_i}=U_i$ étant par hypothèse quasi-compacts), et alors $H^i((\underline{f}),M)=0$ pour tout $i\geqslant 0$ (n°1, cor. de la prop. 1); l'assertion découle alors aussitôt de (13) et (14). On observera que puisque $H^0(\underline{U},F)=H^0(U,F)$, on redémontre ainsi le th.1 de I,1,3 comme cas particulier .

<u>Remarque</u> .- Supposons que X soit un schéma affine, et que les $U_i = X_{f_i}$ soient des ouverts affines ; il en résulte alors que les $U_{i_0 i_1 \ldots i_p}$ sont des ouverts affines (I,3,6,prop.20 ; mais par contre on notera que U n'est pas nécessairement affine) . Dans ce cas , les foncteurs $\Gamma(X,F)$ et $\Gamma(U_{i_0 i_1 \ldots i_p},F)$ sont exacts en F (I,1,3,cor.5 du th.1). On en déduit que si on a une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$, la suite de complexes

$$0 \to C^*(\underline{U},F') \to C^*(\underline{U},F) \to C^*(\underline{U},F'') \to 0$$

est exacte , et donne donc lieu à une suite exacte de cohomologie

$$\ldots\ldots \to H^i(\underline{U},F') \to H^i(\underline{U},F) \to H^i(\underline{U},F'') \xrightarrow{\partial} H^{i+1}(\underline{U},F') \quad \ldots$$

D'autre part , comme le foncteur $C^*((\underline{f}),M)$ est exact , on a de même une suite exacte de cohomologie

$$\ldots\ldots \to H^i((\underline{f}),M') \to H^i((\underline{f}),M) \to H^i((\underline{f}),M'') \xrightarrow{\partial} H^{i+1}((\underline{f}),M') \to \ldots$$

où on a posé $M' = \Gamma(X,F')$, $M'' = \Gamma(X,F'')$, la suite $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ étant exacte par hypothèse . Cela étant , comme le diagramme

$$\begin{array}{c} 0 \to C^*(\underline{U},F') \to C^*(\underline{U},F) \to C^*(\underline{U},F'') \to 0 \\ 0 \to C^*((\underline{f}),M') \to C^*((\underline{f}),M) \to C^*((\underline{f}),M'') \to 0 \end{array}$$

est commutatif , on en conclut que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} H^i(\underline{U},F'') & \xrightarrow{\partial} & H^{i+1}(\underline{U},F') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{i+1}((\underline{f}),M'') & \xrightarrow[\partial]{} & H^{i+2}((\underline{f}),M') \end{array}$$

sont aussi commutatifs (G,I,2.1.1).

<u>3 . Cohomologie d'un schéma affine</u> .

<u>Théorème 1</u> .- <u>Soit</u> X <u>un schéma affine . Pour tout faisceau quasi-cohérent</u> F <u>sur</u> X , <u>on a</u> $H^n(X,F)=0$ <u>pour</u> $n>0$.

Soit $\underline{U}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines $X_{f_i} = D(f_i)$ $(1 \leq i \leq r)$; on sait qu'alors l'idéal engendré dans $A = \Gamma(X,O_X)$ par les f_i est égal à A . On conclut donc du cor.de la prop.2 (n°2) que l'on a $H^i(\underline{U},F)=0$ pour $i>0$. Comme il y a de tels recouvrements arbitrairement fine , la définition de la cohomologie de Čech montre que l'on a aussi $\check{H}^n(X,F)=0$ pour $n>0$. Mais ceci s'applique aussi à tout préschéma X_f qui est affine , donc $\check{H}^n(X_f,F)=0$ pour $n>0$. Mais comme l'intersection $X_f \cap X_g = X_{fg}$, on en déduit que l'on a aussi $H^n(X,F)=0$ pour $n>0$ (G,II,5.9.2) .

Corollaire 1 .- Soit $f : X \to Y$ un morphisme affine . Pour tout faisceau quasi-cohérent F sur X , on a $R^q f_*(F)=0$ pour $q>0$.

En effet , on sait par définition que $R^q f_*(F)$ est le faisceau sur Y associé au préfaisceau $U \to H^q(f^{-1}(U),F)$, où U parcourt les ensembles ouverts de Y . Mais les ouverts affines forment une base de la topologie de Y , et pour un tel ouvert U , $f^{-1}(U)$ est affine (II,2,3,cor.1 de la prop.7) , donc $H^q(f^{-1}(U),F)=0$ d'après le th.1 , ce qui démontre le corollaire .

Corollaire 2 .- Soit $f : X \to Y$ un morphisme affine . Pour tout faisceau quasi-cohérent F sur X , ~~XXXX~~ $H^q(X,F)$ est canoniquement isomorphe à $H^q(Y,f_*(F))$ pour tout $q \geq 0$.

On sait en effet que $H^*(X,F)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale dont le terme E_2 est donné par ~~XXXX~~ $E_2^{pq}=H^p(Y,R^q f_*(F))$ (suite spectrale de Leray ; G,II,4.17.1) . D'après le cor.1 , $E_2^{pq}=0$ pour $q\neq 0$; on sait alors que $H^p(X,F)$ est ~~XXXXX~~ isomorphe à $E_2^{p0}=H^p(Y,f_*(F))$ (G,I,4.4.1) .

4 . Application à la cohomologie des préschémas quelconques .

Proposition 3 .- Soient X un schéma, $(U_\alpha)=\underline{U}$ un recouvrement de X par des ouverts affines . Pour tout faisceau quasi-cohérent F sur X , les modules de cohomologie $H^*(X,F)$ et $H^*(\underline{U},F)$ sont canoniquement isomorphes .

En effet , toute intersection finie V d'ouverts U_α est un ouvert affine puisque X est un schéma (I,3,6,prop.20) , donc $H^q(V,F)=0$ pour $q \geq 1$. ~~XXXXXX~~ La proposition résulte alors du th. de Leray (G,II, 5.4.1) .

Corollaire .- Soient X *un schéma dont l'espace de base est quasi-compact* , $A=\Gamma(X,O_X)$, $\underline{f}=(f_i)_{1 \leq i \leq r}$ *une famille finie d'éléments de* A *tels que les* X_{f_i} *soient affines* , U *la réunion des* X_{f_i} . *Soient* F *un faisceau quasi-cohérent sur* X, $M=\Gamma(X,F)$. *Alors, avec les notations du n°1 , on a un isomorphisme fonctoriel*

$$H^q(U,F) \cong H^{q+1}((\underline{f}),M) \quad \text{pour } q \geq 1$$

et une suite exacte fonctorielle

$$0 \to H^0((\underline{f}),M) \to M \to H^0(U,F) \to H^1((\underline{f}),M) \to 0 .$$

Cela résulte en effet de la prop.3 et de la prop.2 du n°2 .

La remarque suivant la prop.2 du n°2 montre en outre que si X est *affine* , les diagrammes

$$\begin{tikzcd} H^q(U,F'') \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & H^{q+1}(U,F') \arrow[d] \\ H^{q+1}((\underline{f}),M'') \arrow[r, "\partial"'] & H^{q+2}((\underline{f}),M') \end{tikzcd}$$

correspondant à une suite exacte $0 \to F' \to F \to F'' \to 0$ de faisceaux quasi-cohérents , sont commutatifs .

Proposition 4.4 Soient [illegible] schémas, u : X→Y *un morphisme* séparé . *On suppose que* Y *est réunion d'une famille* (V_α) *d'ouverts affines tels que tout* $u^{-1}(V_\alpha)$ *soit réunion finie d'ouverts affines dans* X *(ce qui est par exemple le cas si u est de type fini) . Alors , pour tout faisceau quasi-cohérent* F *sur* X , *les* $R^q u_*(F)$ *sont quasi-cohérents sur* Y .

La question étant locale sur Y , on peut supposer Y affine d'anneau A et X réunion finie d'ouverts affines U_i $(1 \leq i \leq r)$; soit $\underline{U}$ le recouvrement (U_i) . Pour tout $f \in A$, les ensembles $U_{if}=u^{-1}(Y_f) \cap U_i$ sont affines (I,3,7,cor.3 de la prop.22) ; désignons par $\underline{U}_f$ le recouvrement (U_{if}) de $u^{-1}(Y_f)$. Pour toute suite $(i_k)_{0 \leq k \leq p}$ de $p+1$ indices de $[1,r]$, posons comme d'ordinaire $U_{i_0 i_1 \dots i_p}=\bigcap_{k=0}^{p} U_{i_k}$; comme X est un schéma (I,3,6,prop.17) les $U_{i_0 \dots i_p}$ sont des ouverts affines (I,3,6,prop.20) ; nous écrirons pour simplifier $U_{\underline{s}}$ au lieu de $U_{i_0 \ldots i_p}$, en posant $\underline{s}=(i_0,\ldots,i_p)$. Soit $B_{\underline{s}}$ l'anneau de $U_{\underline{s}}$, et soit $\varphi_{\underline{s}}$ l'homomorphisme $A \to B_{\underline{s}}$ correspondant à la restriction de u à $U_{\underline{s}}$. Si on pose $M_{\underline{s}}=\Gamma(U_{\underline{s}},F)$, le module $\Gamma(U_{\underline{s}} \cap u^{-1}(Y_f),F)$ s'identifie canoniquement à $(M_{\underline{s}})_{\varphi_{\underline{s}}(f)}$ (I,1,3,prop.6 et I,1,2, prop.5). Si on considère $M_{\underline{s}}$ comme un A-module au moyen de l'homomorphisme $\varphi_{\underline{s}} : A \to B_{\underline{s}}$; $(M_{\underline{s}})_{\varphi_{\underline{s}}(f)}$ s'écrit aussi $(M_{\underline{s}})_f$ et est un A_f-module . On en conclut que $C^p(\underline{U}_f,F)$, en tant que A_f-module , s'identifie à $(C^p(\underline{U},F))_f$, où $C^p(\underline{U},F)$ est considéré comme A-module; en outre , le cobord $C^p(\underline{U}_f,F) \to C^{p+1}(\underline{U}_f,F)$ s'identifie à l'homomorphisme d_f , en désignant par d le cobord $C^p(\underline{U},F) \to C^{p+1}(\underline{U},F)$. Comme le foncteur $M \to M_f$ est exact dans la catégorie des A-modules , on a donc $H^*(C^*(\underline{U}_f,F))=(H^*(C^*(\underline{U},F)))_f=(H^*(\underline{U},F))_f$. En vertu de la prop.3 , on voit donc qu'on a défini un isomorphisme canonique de A_f-modules

$$\rho_f : H^*(u^{-1}(Y_f),F) \simeq \Gamma(Y_f,(H^*(X,F))^\sim) .$$

En outre , si g est un second élément de A , on vérifie aussitôt que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^*(u^{-1}(Y_f),F) & \xrightarrow[\sim]{\rho_f} & \Gamma(Y_f,(H^*(X,F))^\sim) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(u^{-1}(Y_{fg}),F) & \xrightarrow[\rho_{fg}]{\sim} & \Gamma(Y_{fg},(H^*(X,F))^\sim) \end{array}$$

est commutatif . On en conclut l'existence d'un isomorphisme canonique fonctoriel

$$R^*u_*(F) \simeq (H^*(X,F))^\sim$$

ce qui démontre la prop.6 . On a prouvé en même temps :

<u>Corollaire .- Sous les hypothèses précédentes , on a , pour tout ouvert affine</u> $U \subset Y$

$$\Gamma(U,R^q u_*(F))=H^q(u^{-1}(U),F) \quad (q \geqslant 0) .$$

<u>5 . Le critère de Serre</u> .

Le th.1 du n°3 admet une réciproque lorsque X est noethérien :

avant de l'énoncer , nous commencerons par caractériser les schémas affines parmi la catégorie des <u>espaces annelés</u> . Soit (X,O_X) un espace annelé , tels que les fibres O_x soient des anneaux <u>locaux</u> ; nous désignerons par $\underline{m}_x$ l'idéal maximal de O_x . Soit $A=\Gamma(X,O_X)$, et considérons le schéma affine $X'=\mathrm{Spec}(A)$; on définit canoniquement un <u>morphisme d'espaces annelés</u> $(\psi,\theta) : (X,O_X)\to(X',O_{X'})$ de la façon suivante : pour tout $x\in X$, soit $\psi(x)$ l'ensemble des $f\in A$ tels que $f_x\in\underline{m}_x$; il est immédiat que $\psi(x)$ est un idéal premier de A , donc un point de X' . En outre , cette définition montre que pour tout $f\in A$, on a

(15) $$\psi^{-1}(D(f))=X_f$$

et comme X_f est ouvert (II,1,3,cor.1 de la prop.13) et que les D(f) forment une base de la topologie de X' , ψ est <u>continue</u> . D'autre part , $O_{\psi(x)}=A_{\psi(x)}$; dans l'homomorphisme canonique $f\to f_x$ de A dans O_x qui , à toute section f fait correspondre son germe f_x en x , il est clair par définition que la relation $f\notin\psi(x)$ entraîne $f_x\notin\underline{m}_x$, donc que f_x est inversible dans O_x ; on en conclut que l'homomorphisme $f\to f_x$ se factorise en $A\to O_{\psi(x)}\xrightarrow{\omega_x}O_x$. En outre les homomorphismes ω_x sur les fibres proviennent d'un homomorphisme $\omega : \psi^*(O_{X'})\to O_X$ de faisceaux ; il suffit en effet de définir un homomorphisme $\theta : O_{X'}\to\psi_*(O_X)$ et de montrer que $\omega_x=\theta^\flat_x$. Or , pour tout $f\in A$, les sections de $O_{X'}$ au-dessus de D(f) s'identifient canoniquement aux éléments g/f^n de A_f (I,1,3,prop.6 et th.1) ; en vertu de (15) , f est inversible au-dessus de $X=\psi^{-1}(D(f))$, donc on peut faire correspondre à g/f^n la section $(g|\psi^{-1}(D(f)))(f|\psi^{-1}(D(f)))^{-n}$ de O_X au-dessus de $\psi^{-1}(D(f))$ et on a ainsi défini un homomorphisme $\Gamma(D^{-1}(f),O_{X'})\to\Gamma(D^{-1}(f),\psi_*(O_X))$; il est immédiat que ces homomorphismes sont compatibles avec les opérations de restriction de D(f) à D(ff') , et

1

Archives

Grothendieck sept 59

§ 2. Etude cohomologique des morphismes projectifs.

1. Calculs explicites de certains groupes de cohomologie.

Soient X un préschéma, $\underline{L}$ un faisceau inversible sur X ; considérons l'anneau gradué (II,1,3)

(1) $$S=\Gamma_*(X,\underline{L})=\bigoplus_{n\in \underline{Z}}\Gamma(X,\underline{L}^{\otimes n}) .$$

Soit $(f_i)_{1\leq i\leq r}$ une famille finie d'éléments homogènes de S, soit $f_i\in S_{d_i}$; posons $U_i=X_{f_i}$, $U=\bigcup_i U_i$, et désignons par $\underline{U}$ le recouvrement (U_i) de U. Pour tout faisceau quasi-cohérent $\underline{F}$ sur X, on posera

(2) $$\underline{F}(*)=\bigoplus_{n\in \underline{Z}}\underline{F}\otimes\underline{L}^{\otimes n}$$

(3) $$H^*(U,\underline{F}(*))=\bigoplus_{n\in \underline{Z}}H^*(U,\underline{F}\otimes L^{\otimes n})$$

(4) $$H^*(\underline{U},\underline{F}(*))=\bigoplus_{n\in \underline{Z}}H^*(\underline{U},\underline{F}\otimes\underline{L}^{\otimes n}) .$$

Il est clair que le faisceau (2) est un S-Module gradué, quand on identifie S au faisceau simple correspondant. Les groupes abéliens (3) et (4) sont bigradués, en prenant $(H^*(U,\underline{F}(*)))_{mn}=H^m(U,\underline{F}\otimes\underline{L}^{\otimes n})$, et de même pour (4) ; pour le deuxième degré, il est clair que (4) est un S-module gradué, et il en est de même pour (3), comme on le voit en considérant une résolution canonique de $\underline{F}$.

Considérons maintenant le S-module gradué (II,1,3)

$$M=\Gamma_*(\underline{L},\underline{F})=H^0(X,\underline{F}(*))=\bigoplus_{n\in \underline{Z}}\Gamma(X,\underline{F}\otimes L^{\otimes n}) .$$

Si X est noethérien, ou séparé et à un espace de base quasi-compact il résulte de II,1,4,th.2 qu'en posant comme d'ordinaire $U_{i_0i_1\dots i_p}=\bigcap_{k=0}^{p}U_{i_k}$, on a, à un isomorphisme canonique près

$$\Gamma(U_{i_0i_1\dots i_p},\underline{F}(*))=M_{f_{i_0}f_{i_1}\dots f_{i_p}}$$

On peut encore (avec les notations du § 1, n°2), identifier $M_{f_{i_0}\dots f_{i_p}}$ à $\varinjlim_n M^{(n)}_{i_0\dots i_p}$. Cette identification est un isomorphisme de S-modules gradués, si on définit le degré d'un élément

$z\in\varinjlim_n M^{(n)}_{i_0\ldots i_p}$ de la façon suivante : si z est l'image canonique d'un élément homogène $x\in M^{(n)}_{i_0\ldots i_p}=M$, de degré m, son degré est égal à $m-n(d_{i_0}+\ldots+d_{i_p})$. Tenant compte de la définition des homomorphismes $\varphi_{kh}: M^{(h)}_{i_0\ldots i_p}\to M^{(k)}_{i_0\ldots i_p}$ (§ 1,n°2), on voit aussitôt que cette définition ne dépend pas du "représentant" x de z choisi. Les S-modules $\varinjlim_n C^p_n(M)$ sont gradués de la même façon, et les raisonnements du § 1,n°2 montrent que l'on a

(5) $$C^p(\underline{U},\underline{F}(*))=\varinjlim_n C^p_n(M)$$

l'isomorphisme des deux membres respectant les degrés. On a donc aussi

(6) $$C^p(\underline{U},\underline{F}(*))=C^{p+1}((\underline{f}),M)=\varinjlim_n K^{p+1}(\underline{f}^n,M)$$

l'isomorphisme conservant les degrés : en vertu de ce qui précède, le degré d'un élément du second membre image canonique d'une cochaîne $g\in K^{p+1}(\underline{f}^n,M)$, dont les valeurs $g(i_0,\ldots,i_p)$ sont dans la même composante homogène M_m, est $m-n(d_{i_0}+\ldots+d_{i_p})$, et il est indépendant du choix de cette cochaîne comme représentant de l'élément considéré.

Comme les isomorphismes précédents sont compatibles avec les opérateurs cobords, on en conclut, comme dans la prop.2 du § 1, n°2 :

<u>Proposition 1 .- Soit</u> X <u>un préschéma noethérien, ou un schéma dont l'espace de base est quasi-compact. Pour tout</u> $q\geq 1$, <u>il existe un isomorphisme canonique fonctoriel en</u> $\underline{F}$

(7) $$H^q(\underline{U},\underline{F}(*))\simeq H^{q+1}((\underline{f}),M)$$

<u>On a en outre une suite exacte fonctorielle en</u> $\underline{F}$

(8) $$0\to H^0((\underline{f}),M)\to M\to H^0(\underline{U},\underline{F}(*))\to H^1((\underline{f}),M)\to 0 .$$

<u>De plus, tous les homomorphismes introduits respectent les structures de groupes abéliens bigradués et de</u> S-<u>modules gradués</u>.

Corollaire .- Si X <u>est un schéma dont l'espace de base est quasi-com-</u>

pact et si les $U_i = X_{f_i}$ sont affines, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel en $\underline{F}$

(9) $$H^q(U,\underline{F}(*)) \simeq H^{q+1}((\underline{f}),M) \quad \textit{pour } q \geq 1$$

et une suite exacte fonctorielle en $\underline{F}$

(10) $$0 \to H^0((\underline{f}),M) \to M \to H^0(U,\underline{F}(*)) \to H^1((\underline{f}),M) \to 0$$

Il suffit d'appliquer la prop.3 du § 1,n°4.

La proposition "locale" analogue à la prop.1 est la suivante :

Proposition 2.- Soient S *un anneau gradué à degrés positifs*, f_i $(1 \leq i \leq r)$ *un élément homogène de* S *de degré* d_i, M *un* S-*module gradué. Soient* X=Proj(S) *le spectre premier homogène de* S, $\underline{F}=\tilde{M}$ *le faisceau quasi-cohérent sur* X *associé à* M, *et posons* $U_i = D_+(f_i)$, $U = \bigcup U_i$. *Prenons en outre* $\underline{L} = \underline{O}_X(1) = (S(1))^\sim$, *de sorte que* $\underline{F}(*) = \bigoplus_{n\in Z} \underline{F}(n) = \bigoplus_{n \in Z} (M(n))^\sim$. *Il existe alors des* ~~XX~~ *isomorphismes canoniques fonctoriels en* M

(11) $$H^q(U,\underline{F}(*)) \to H^{q+1}((\underline{f}),M) \quad \textit{pour } q \geq 1$$

et une suite exacte fonctorielle en M

(12) $$0 \to H^0((\underline{f}),M) \to M \to H^0(U,\underline{F}(*)) \to H^1((\underline{f}),M) \to 0$$

En effet, on a $\Gamma(U_{i_0 i_1 \ldots i_p}, (M(n))^\sim) = (M_{f_{i_0} \ldots f_{i_p}})_n$ par définition (II,3,3,prop.9) ; comme, sur un schéma affine, Γ est un foncteur qui commute aux sommes directes (I,1,3,cor.4 du th.1), on a donc $\Gamma(U_{i_0 \ldots i_p}, \underline{F}(*)) = M_{f_{i_0} \ldots f_{i_p}}$. Le reste du raisonnement est alors le même que pour la prop.1, tenant compte de ce que ~~EF~~ les $U_{i_0 \ldots i_p}$ sont affines (§ 1,n°3,Remarque suivant la prop.3).

Remarques.- 1) Dans les conditions de la prop.2, les foncteurs $\Gamma(U_{i_0 \ldots i_p}, \tilde{M}(*))$ sont exacts en M ~~XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX~~ ; on en conclut, comme dans la Remarque du § 1,n°2, que si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte, les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} H^i(U,\tilde{M}''(*)) & \xrightarrow{\partial} & H^{i+1}(U,\tilde{M}'(*)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{i+1}((\underline{f}),M'') & \xrightarrow[\partial]{} & H^{i+2}((\underline{f}),M') \end{array}$$

sont commutatifs .

2) La prop.2 sera surtout intéressante lorsque S sera une A-algèbre engendrée par un nombre fini d'éléments de degré 1 , A étant supposé noethérien ; en effet , lorsqu'il en est ainsi , <u>tout</u> faisceau quasi-cohérent est de la forme $\tilde{M}$ (II,3,4,th.1) .

Nous allons appliquer la prop.2 dans le cas où $S=A[T_0,\dots,T_r]$, où A est un anneau quelconque , les T_i des indéterminées , avec $M=S$,et $f_i=T_i$. On est donc essentiellement ramené à calculer $H^*((\underline{T}),S)$ où $\underline{T}=(T_i)_{0\leq i\leq r}$.

Nous allons pour cela utiliser la proposition connue suivante , dont, pour être complet , nous donnerons une démonstration :

<u>Proposition 3 .- Soient</u> S <u>un anneau</u> , $\underline{f}=(f_i)_{1\leq i\leq r}$ <u>une famille finie d'éléments de</u> S , M <u>un</u> S<u>-module . Si , pour tout</u> i <u>, l'homothétie définie par</u> f_i <u>dans</u> $M_i=M/(f_1M+\dots+f_{i-1}M)$ <u>est injective , on a</u> $H^i(\underline{f},M)=0$ <u>pour</u> $i\neq r$ <u>et</u> $H^r(\underline{f},M)\simeq M/(\sum_{i=1}^{r} f_iM)=M_r$.

La seconde assertion est vraie quel que soit M (§ 1,n°1,formule (7)) Pour démontrer la première , il suffit de prouver que $H_i(\underline{f},M)=0$ pour tout $i>0$ (§ 1, n°1). Raisonnons par récurrence sur r , le cas $r=0$ étant trivial . Posons $\underline{f}'=(f_i)_{1\leq i\leq r-1}$; il est clair qu'elle satisfait aux conditions de la prop.3 , donc , si $L=K_*(\underline{f}',M)$, on a $H_i(L)=0$ pour $i>0$ et $H_0(L)=M_{r-1}$. Or , posons pour abréger $K=K(f_r)=K_0\oplus K_1$, où $K_0=K_1=S$, d_0 étant la multiplication par f_r ; on a par définition $K_*(\underline{f},M)=K\otimes L$. Mais on a le lemme suivant :

<u>Lemme 1 .- Soit</u> K <u>un complexe de</u> S<u>-modules qui soit</u> A<u>-libre et nul en dimensions</u> $\neq 0,1$. <u>Pour tout complexe</u> L <u>de</u> A<u>-modules , on a une suite exacte</u>

$$0\to H_0(K\otimes H_p(L))\to H_p(K\otimes L)\to H_1(K\otimes H_{p-1}(L))\to 0 \quad .$$

C'est un cas particulier d'une suite exacte de termes de bas degré de la suite spectrale de Künneth ; mais on peut le démontrer directement de la façon suivante . Considérons K_o et K_1 comme des complexes (nuls en dimensions $\neq 0$ et $\neq 1$ respectivement) ; on a alors une suite exacte de complexes

$$0 \to K_o \otimes L \to K \otimes L \to K_1 \otimes L \to 0$$

à laquelle nous pouvons appliquer la suite exacte ~~XXXX~~ d'homologie

$$\ldots \to H_{p+1}(K_1 \otimes L) \xrightarrow{\partial} H_p(K_o \otimes L) \to H_p(K \otimes L) \to H_p(K_1 \otimes L) \xrightarrow{\partial} H_{p-1}(K_o \otimes L) \to \ldots$$

Mais il est évident que $H_p(K_o \otimes L) = K_o \otimes H_p(L)$ et $H_p(K_1 \otimes L) = K_1 \otimes H_{p-1}(L)$ pour tout p ; en outre , on vérifie aussitôt que l'opérateur ∂ : $K_1 \otimes H_p(L) \to K_o \otimes H_p(L)$ n'est autre que $d_o \otimes 1$; le lemme résulte donc de la définition de $H_o(K \otimes H_p(L))$ et de $H_1(K \otimes H_{p-1}(L))$ et de la suite exacte précédente .

Ce lemme étant établi , la fin de la prop.3 est immédiate : l'hypothèse de récurrence et la suite exacte du lemme 1 donnent $H_p(K \otimes L)=0$ pour $p \geq 2$; la même suite exacte donne aussi $H_1(K \otimes L)=0$ dès que l'on aura montré que $H_1(K, H_o(L))=0$; mais par définition ce groupe n'est autre que le noyau de l'homothétie définie par f_r dans M_{r-1} , et ce noyau est nul par hypothèse , ce qui achève la démonstration .

<u>Proposition 4 .- Si</u> $S=A[T_o,\ldots,T_r]$, <u>on a , avec</u> $\underline{T}=(T_i)_{0 \leq i \leq r}$

(13) $\qquad H^i(\underline{T}^n, S)=0$ <u>si</u> $i \neq r+1$

(14) $\qquad H^{r+1}(\underline{T}^n, S)=S/(\underline{T}^n)$.

<u>Le A-module</u> $H^{r+1}(\underline{T}^n, S)$ <u>a donc une base sur A formée des classes mod.</u> $(\underline{T}^n)$ <u>des monômes</u> $\underline{T}^{\underline{p}}=T_o^{p_o}\ldots T_r^{p_r}$ <u>avec</u> $\underline{p}=(p_o,\ldots,p_r)$, $0 \leq p_i < n$.

Cela est un corollaire immédiat de la prop.3 , dont les hypothèses sont trivialement vérifiées .

Passons à la limite inductive sur n ; les relations (13) donnent $H^i((\underline{T}),S)=0$ pour $i \neq r+1$. Pour $i=r+1$, le système inductif est formé des $S/(\underline{T}^n)$, l'homomorphisme φ_{nm} : $S/(\underline{T}^n) \to S/(\underline{T}^m)$ $(0 \leq n \leq m)$ étant la multiplication par $(T_o\ldots T_r)^{m-n}$. Si , pour $n > \sup(p_i)_{0 \leq i \leq r}$, on désigne par $\xi_{\underline{p}}^{(n)}=\xi^{(n)}_{p_0\ldots p_r}$ la classe de $T_0^{n-p_0}\ldots T_r^{n-p_r}$ mod $(\underline{T}^n)$, on a $\varphi_{nm}(\xi_{\underline{p}}^{(n)})=\xi_{\underline{p}}^{(m)}$, et ces éléments ont donc même image canonique $\xi_{\underline{p}}=\xi_{p_0\ldots p_r}$ dans la limite inductive $H^{r+1}((\underline{T}),S)$; en vertu de la définition du degré donnée au début de ce n°, le degré de $\xi_{\underline{p}}$ est donc égal à $-|\underline{p}|=-(p_0+\ldots+p_r)$. Il est clair que les $\xi_{\underline{p}}^{(n)}$ pour $0<p_i\leq n$ forment une base de $S/(\underline{T}^n)$. On déduit donc de la prop. 4 :

Corollaire .— Avec les notations de la prop. 4, on a

$$H^i((\underline{T}),S)=0 \quad \text{pour } i\neq r+1 ,$$

et $H^{r+1}((\underline{T}),S)$ est un A-module libre dont une base est formée des éléments $\xi_{p_0\ldots p_r}$ tels que $p_i>0$ $(0\leq i\leq r)$.

De ce corollaire et de la prop. 2, on déduit :

Proposition 5 .— Soient A un anneau, r un entier >0, et soit $X=\underline{P}^r_A$ (II,4,5). Alors :

(i) On a $H^i(X,O_X(*))=0$ pour $i\neq 0,r$.

(ii) L'homomorphisme canonique (II,3,3) $\alpha : S\to H^0(X,O_X(*))$ est bijectif.

(iii) $H^r(X,O_X(*))$ est un A-module libre ayant une base formée d'éléments $\xi_{p_0\ldots p_r}$, où $p_i>0$ pour $0\leq i\leq r$, $\xi_{p_0\ldots p_r}$ étant de degré $-|\underline{p}|=-(p_0+\ldots+p_r)$.

Il suffit en effet de remarquer que $H^1((\underline{T}),S)=0$ dans la suite exacte (12) appliquée à $M=S=A[T_0,\ldots,T_r]$, et que la prop. 2 est applicable à $U=X$, puisque X est la réunion des $D_+(T_i)$; l'identification de l'application $S\to H^0(X,O_X(*))$ de la suite exacte (12) avec l'application α définie en II,3,3 résulte de l'identification canonique de $H^0(U,O_X(*))$ et de $H^0(\underline{U},O_X(*))$ et du fait que sur un schéma affine le foncteur Γ commute aux sommes directes infinies.

Corollaire 1 .— Les seules valeurs de (i,n) pour lesquelles on puisse avoir $H^i(X,O_X(n))\neq 0$ sont les suivantes : $i=0$ et $n\geq 0$, $i=r$ et $n\leq -(r+1)$.

On notera que si $A\neq 0$, on a effectivement $H^i(X,O_X(n))\neq 0$ pour les valeurs indiquées de (i,n) ; cela résulte de la prop.5, puisque S_n est alors $\neq 0$ pour tous les degrés.

Dans les applications qui ~~en~~ seront faites dans ce chapitre, nous n'utiliserons en fait que le résultat moins précis :

Corollaire 2 .- Les A-modules $H^i(X,O_X(n))$ sont de type fini ; si $i>0$, ils sont nuls pour $n>0$.

Indiquons encore que nous donnerons plus tard le théorème "global" dont la forme locale est la prop.5.

2 . Le théorème fondamental des morphismes projectifs.

Théorème 1 (Serre) .- Soient Y un préschéma noethérien, $\underline{S}$ une ~~XXXXX~~ O_Y-Algèbre quasi-cohérente graduée en degrés positifs, et engendrée par le O_Y-Module $\underline{S}_1$. On suppose qu'il existe un entier $r\geq 0$ tel que ~~XXXX~~ tout point de Y admette un voisinage ouvert U pour lequel il existe un homomorphisme surjectif $O_Y^{r+1}|U\rightarrow \underline{S}_1|U$. Soient $X=\mathrm{Proj}(\underline{S})$ le Y-préschéma projectif défini par $\underline{S}$, $f : X\rightarrow Y$ son morphisme structural. Pour tout O_X-Module cohérent $\underline{F}$:

(i) Les $R^if_*(\underline{F})$ sont des faisceaux cohérents.

(ii) $R^if_*(\underline{F})=0$ pour $i>r$.

(iii) Il existe un entier N tel que $n\geq N$ et $i>0$ entraîne $R^if_*(\underline{F}(n))=0$.

(iv) Il existe un entier N tel que $n\geq N$ entraîne que l'homomorphisme canonique $f^*(f_*(\underline{F}(n)))\rightarrow \underline{F}(n)$ est surjectif.

La forme locale de ce théorème est la suivante :

Corollaire 1 .- Supposons remplies les conditions du th.1, et supposons en outre que $Y=\mathrm{Spec}(A)$ soit un schéma affine. Alors, pour tout faisceau cohérent ~~XXX~~ $\underline{F}$ sur X :

(i) Les A-modules $H^i(X,\underline{F})$ sont de type fini.

(ii) $H^i(X,\underline{F})=0$ pour $i>r$.

(iii) Il existe un entier N tel que $n \geq N$ et $i > 0$ ~~entraîne~~ entraînent $H^i(X, \underline{F}(n)) = 0$.

(iv) Il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, $\underline{F}(n)$ soit engendré par ses sections au-dessus de X .

Comme Y est quasi-compact , le cor.1 entraîne le th.1 , car en recouvrant Y par un nombre fini d'ouverts affines , il suffira de prendre pour N dans (iii) et (iv) le plus grand des entiers correspondant à ces ouverts . On peut en outre supposer (pour la même raison) qu'il existe un homomorphisme surjectif $O_Y^{r+1} \to \underline{S}_1$. On sait alors (II,4,4,cor. de la prop.15) que X s'identifie à un sous-préschéma fermé de $\underline{P}_A^r$; en outre , si j est l'injection canonique $X \to \underline{P}_A^r$, ($j_*(\underline{F})$ est cohérent (FAC,I,2,17)), et $j_*(\underline{F}(n)) = (j_*(\underline{F}))(n)$ en vertu de la relation (14) de II,4,5 . On est donc ramené /(en tenant compte de (II, cor. du th. 4.9.2) à prouver le cor.1 dans le cas particulier où $X = \underline{P}_A^r$, $\underline{S} = \tilde{S}$, où $S = A[T_0, \ldots, T_r]$. Comme tout faisceau cohérent $\underline{F}$ sur X est alors de la forme $\tilde{M}$, où M est un S-module gradué de type fini , (ii) résulte de la formule (11) du n°1 , car X est alors recouvert par les $D_+(T_i)$ en nombre r+1 , et on sait (§ 1;n°1) que $H^k((\underline{f}), M) = 0$ lorsque $\underline{f}$ a moins de k éléments . Notons d'autre part que (iv) a déjà été démontré (II,3,4,cor.5 du th.1) . Nous allons démontrer simultanément (i) et (iii) . Notons que ces assertions sont vraies si $\underline{F} = O_X(m)$ (n°1, cor. 2 de la prop.5) ; elles le sont donc aussi lorsque $\underline{F}$ est somme directe d'un nombre fini de faisceaux $O_X(m_j)$, D'autre part , (i) et (iii) sont vraies trivialement pour $i > r$ en vertu de (ii) . Nous allons alors procéder par récurrence descendante sur i . On sait que $\underline{F}$ est isomorphe à un quotient d'une somme directe $\underline{E}$ d'un nombre fini de faisceaux $O_X(m_j)$ (II,3,4,cor.4 du th.1) , autrement dit , on a une suite exacte $0 \to \underline{R} \to \underline{E} \to \underline{F} \to 0$, où $\underline{R}$ est cohérent (puisque $\underline{F}$ et $\underline{G}$ le sont) et où $\underline{G}$ vérifie (i) et (iii) .

Comme $\underline{F} \to \underline{F}(n)$ est un foncteur exact , on a aussi une suite exacte

$$0 \to \underline{R}(n) \to \underline{G}(n) \to \underline{F}(n) \to 0$$

pour tout $n \in \underline{Z}$. La suite exacte de cohomologie donne donc la suite exacte $\quad H^{i-1}(X,\underline{G}(n)) \to H^{i-1}(X,\underline{F}(n)) \to H^{i}(X,\underline{R}(n))$

Comme $\underline{G}(n)$ est somme directe des $O_X(n+m_j)$, $H^{i-1}(X,\underline{G}(n))$ est de type fini, et il en est de même de $H^{i}(X,\underline{R}(n))$ par l'hypothèse de récurrence, donc $H^{i-1}(X,\underline{F}(n))$ est de type fini pour tout n, et en particulier pour $n=0$. D'autre part, il existe un N tel que pour $n \geqslant N$ on ait $H^{i}(X,\underline{R}(n))=0$ (par l'hypothèse de récurrence), et $H^{i-1}(X,\underline{G}(n))=0$ puisque $\underline{G}$ vérifie (iii) ; on a donc aussi $H^{i-1}(X,\underline{F}(n))=0$, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire 2. - Sous les hypothèses du th.1, soit</u> $\underline{F} \to \underline{G} \to \underline{H}$ <u>une suite exacte de faisceaux cohérents sur</u> X. <u>Il existe alors un entier</u> N <u>tel que pour</u> $n \geqslant N$, <u>la suite</u>

$$f_*(\underline{F}(n)) \to f_*(\underline{G}(n)) \to f_*(\underline{H}(n))$$

<u>soit exacte</u>.

Soient $\underline{F}'$, $\underline{G}'$, $\underline{G}''$ le noyau, l'image et le conoyau de $\underline{F} \to \underline{G}$; $\underline{G}'$ est le noyau et $\underline{G}''$ l'image de $\underline{G} \to \underline{H}$, soit $\underline{H}''$ le conoyau de cet homomorphisme. Comme $\underline{F} \to \underline{F}(n)$ est un foncteur exact, il suffit de prouver que si n est assez grand, chacune des suites

$$0 \to f_*(\underline{F}'(n)) \to f_*(\underline{F}(n)) \to f_*(\underline{G}'(n)) \to 0 \ , \ 0 \to f_*(\underline{G}'(n)) \to f_*(\underline{G}(n)) \to$$
$$\to f_*(\underline{G}''(n)) \to 0 \ , \ 0 \to f_*(\underline{G}''(n)) \to f_*(\underline{H}(n)) \to f_*(\underline{H}''(n)) \to 0$$

est exacte ; autrement dit, on peut supposer que $0 \to \underline{F} \to \underline{G} \to \underline{H} \to 0$ est exacte. On a alors la suite exacte de cohomologie

$$0 \to f_*(\underline{F}(n)) \to f_*(\underline{G}(n)) \to f_*(\underline{H}(n)) \to H^1 f_*(\underline{F}(n)) \to \dots$$

et la conclusion résulte du th.1, (iii).

<u>Corollaire 3. - Sous les hypothèses du th.1, soit</u> $\underline{M}$ <u>un S-Module vérifiant la condition</u> (TF') (II,4,3). <u>Alors il existe un entier</u> N <u>tel que, pour</u> $n \geqslant N$, <u>l'homomorphisme canonique</u> (II,4,2)

$$\alpha_n : \underline{M}_n \to f_*(\widetilde{\underline{M}}(n))$$

est un isomorphisme. En d'autres termes, le noyau et le conoyau de l'homomorphisme canonique

$$\alpha \ : \ \underline{M} \rightarrow \underline{\Gamma}_*(\widetilde{\underline{M}})$$

vérifient la condition (TN') (ou, comme on ~~XX~~ dit encore, α est un (TN')-isomorphisme).

Comme Y est noethérien, la question est locale et on peut donc supposer Y=Spec(A) et $\underline{M}=\widetilde{M}$, A étant noethérien, S_1 un ~~XXXXXX~~ A-module de type fini et M un S-module gradué de type fini. On a alors une suite exacte

$$L' \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow 0$$

où L et L' sont des modules gradués libres de type fini sur S. Supposons le résultat prouvé pour le cas où M=S ; il est alors vrai pour L et L'. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
L'_n \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_n"'] & L_n \arrow[r] \arrow[d] & M_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
f_*(\widetilde{L}'(n)) \arrow[r] & f_*(\widetilde{L}(n)) \arrow[r] & f_*(\widetilde{M}(n)) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La deuxième ligne est exacte d'après le cor.2, dès que n est assez grand ; comme il en est de même de la première et que les deux premiers homomorphismes α_n sont des isomorphismes, il en est de même du troisième.

Cela étant, si $S=A[T_0,\ldots,T_r]$, le corollaire (pour M=S) résulte de la prop.5 (ii) du n°1. Dans le cas général, S s'identifie à un anneau quotient d'un anneau $S'=A[T_0,\ldots,T_r]$ et X à un sous-préschéma fermé de $X'=\underline{P}^r_A$. Si j est l'injection canonique $X\rightarrow X'$, $j_*(\widetilde{S}(n))$ est un ~~XXX~~ $O_{X'}$-module vérifiant (TF'), donc l'homomorphisme canonique

$\alpha_n : S_n \rightarrow \Gamma(X',j_*(\widetilde{S}(n)))$ est bijectif pour n assez grand en vertu de ce qui précède, d'où le corollaire, puisque $\Gamma(X',j_*(\widetilde{S}(n)))=$ $=\Gamma(X,S(n))$.

Corollaire 4.- Pour tout faisceau cohérent $\underline{F}$ sur X, $\underline{\Gamma}_*(\underline{F})$ est *un S-Module vérifiant la condition* (TF') .

On sait en effet que $\underline{F}$ est isomorphe à un faisceau de la forme $\widetilde{\underline{M}}$, où $\underline{M}$ est un $\underline{S}$-Module de type fini (II,4,3,cor.2 du th.1); il suffit alors d'appliquer le cor.3 .

Scholie .- On peut donc dire que la donnée d'un faisceau algébrique cohérent sur X est *équivalente* à la donnée d'un $\underline{S}$-Module gradué quasi-cohérent satisfaisant à la condition (TF') , deux tels $\underline{S}$-Modules qui ne diffèrent que par un nombre *fini* de composants homogènes correspondant au *même* faisceau cohérent sur X .

On peut aussi dire qu'il y a équivalence entre la catégorie des faisceaux cohérents sur X , et la catégorie *quotient* (T,I,11) de la catégorie des $\underline{S}$-Modules gradués quasi-cohérents vérifiant (TF') , par la sous-catégorie épaisse des $\underline{S}$-Modules gradués quasi-cohérents vérifiant (TN') .

Les propriétés (iii) et (iv) du th.1 se généralisent de façon immédiate quand $O_X(1)$ est remplacé par un faisceau inversible *ample* (II, 4,6) :

Proposition 5 .- Soient Y *un préschéma noethérien* , X *un* Y-*préschéma projectif* , *de morphisme structural f* , $\underline{L}$ *un faisceau inversible sur* X , *ample pour f* , $\underline{F}$ *un faisceau cohérent sur* X . *Il existe alors un entier* N *tel que , pour* $n \geq N$, *on ait* $R^i f_*(\underline{F} \otimes \underline{L}^{\otimes n}) = 0$ *pour* $i > 0$, *et que l'homomorphisme canonique* $f^*(f_*(\underline{F} \otimes \underline{L}^{\otimes n})) \to \underline{F} \otimes \underline{L}^{\otimes n}$ *soit surjectif* .

Par définition , il existe un entier k tel que $\underline{L}^{\otimes k}$ soit très ample pour f ; (par définition X s'identifie à un sous-préschéma de $P = \underline{P}(\underline{E})$, où $\underline{E}$ est un O_Y-Module cohérent , et on a $\underline{L}^{\otimes k} = j^*(O_P(1))$, en désignant par j l'injection canonique $X \to P$; en outre , comme f est un morphisme projectif par hypothèse , X est un sous-préschéma *fermé* de P (II,4, ,prop.) . Cela étant , soit p le morphisme structural $P \to Y$; pour tout entier m tel que $0 \leq m \leq k-1$, il résulte du th.1 qu'il existe un entier N_m tel que pour $r \geqslant N_m$, $R^i f_*(\underline{F} \otimes \underline{L}^{\otimes(m+kr)}) = R^i p_*(j_*(\underline{F} \otimes \underline{L}^{\otimes m})(r)) = 0$ pour $i > 0$, [redacted] car on a $j_*(\underline{G} \otimes \underline{L}^{kr}) = j_*(\underline{G})(r)$ pour tout O_X-Module cohérent $\underline{G}$, j étant une immersion fermée , et pour la même raison $R^i f_*(\underline{G}) = R^i p_*(j_*(\underline{G}))$ (G;II, cor. du th.4.9.2)). De même , pour $r \geqslant N_m$, l'homomorphisme canonique $p^*(p_*(j_*(\underline{F} \otimes \underline{L}^{\otimes m})(r))) \to j_*(\underline{F} \otimes \underline{L}^{\otimes m})(r)$ est surjectif ; comme le foncteur j^* est exact (j étant une immersion) , et que $j^*(j_*(\underline{F} \otimes \underline{L}^{\otimes m})(r)) = \underline{F} \otimes L^{\otimes(m+kr)}$, on en conclut que $f^*(f_*(\underline{F} \otimes \underline{L}^{\otimes(m+kr)})) \to \underline{F} \otimes \underline{L}^{\otimes(m+kr)}$ est surjectif . Il suffit alors de prendre pour entier N le plus grand des entiers $m+kN_m$ pour répondre à la question .

<u>Corollaire .- Sous les hypothèses de la prop.6 , soit</u> $F \to G \to H$ <u>une suite exacte de faisceaux cohérents sur</u> X . <u>Il existe alors un entier</u> N <u>tel que , pour</u> $n \geqslant N$, <u>la suite</u>

$$f_*(\underline{F} \otimes \underline{L}^{\otimes n}) \to f_*(\underline{G} \otimes \underline{L}^{\otimes n}) \to f_*(\underline{H} \otimes \underline{L}^{\otimes n})$$

<u>soit exacte</u> .

Le raisonnement est exactement le même que dans le cor.2 du th.1.

<u>Remarques</u> .- 1) La seconde assertion de la prop.5 a déjà été démontrée (II,4,   ) sous des conditions plus larges , savoir lorsque X est seulement supposé <u>quasi-projectif</u> sur Y . Mais il faut noter que dans ce cas la propriété $R^i f_*(\underline{F} \otimes \underline{L}^{\otimes n}) = 0$ pour $i > 0$, à partir d'une certaine valeur de n , <u>n'est plus nécessairement vérifiée</u> . Soit en effet A un anneau noethérien , et prenons Y=Spec(A) , X'= =Spec($A[T_0,\dots,T_r]$) , et soit g le morphisme structural $X' \to Y$; alors $O_{X'}(n)$ est très ample (pour g) pour tout n (II,4,8,   ) ; pour tout sous-schéma X de X' , $O_X(n)$ est donc aussi très ample (pour la restriction de g à X) (II,4,6,   ). Or , prenons pour X la réunion des ouverts affines $D(T_i)$ de X' $(0 \leq i \leq r)$; il résulte du § 1,n°4,cor. de la prop.3 et

l'anneau $\Gamma(X,O_X)$ s'identifie à l'intersection des anneaux de fractions $(A[T_0,\dots,T_r])_{T_i}$ pour $0\leq i\leq r$ (I,6,2), donc à $A[T_0,\dots,T_r]$; on conclut alors du § 1,n°4, cor. de la prop.3 et de la formule (7) du § 1,n°1, que l'on a $H^r(X,O_X^{\otimes n})=H^r(X,O_X)=A\neq 0$ pour tout n.

3. Application aux faisceaux gradués d'algèbres.

Soit Y un préschéma ; nous dirons qu'une O_Y-Algèbre quasi-cohérente graduée (à degrés positifs) $\underline{S}$ est spéciale si $\underline{S}_1$ est un O_Y-Module de type fini et si, pour n assez grand, $\underline{S}_n=\underline{S}_1^n$.

Proposition 8. - Soit Y un préschéma noethérien.

(i) Soient X un Y-préschéma projectif, f : X→Y le morphisme structural ; $\underline{L}$ un O_X-Module très ample ; alors $\underline{S}=\bigoplus_{n\geq 0} f_*(\underline{L}^{\otimes n})$ est une O_Y-Algèbre graduée spéciale, X est isomorphe à Proj($\underline{S}$) et $\underline{L}$ est isomorphe à $(\underline{S}(1))^{\sim}$.

(ii) Inversement, soit $\underline{S}'$ une O_Y-Algèbre graduée spéciale, et soient X=Proj($\underline{S}'$), $\underline{L}=O_X(1)$; alors l'homomorphisme canonique $\underline{S}'\to\Gamma_*(\underline{S}')=\bigoplus_{n\geq 0} f_*(O_X(n))$ est un (TN')-isomorphisme.

De façon imagée, on peut dire que les couples (X,$\underline{L}$), où X est un Y-préschéma projectif et $\underline{L}$ un O_X-Module très ample, peuvent s'interpréter comme des O_Y-Algèbres graduées spéciales, modulo (TN').

L'assertion (ii) est un cas particulier du cor.3 du th.2 du n°2 ; prouvons (i). Par définition d'un faisceau très ample (II,4,8,déf.4) il existe une O_Y-Algèbre graduée spéciale $\underline{S}'$ et une immersion r de X dans P=Proj($\underline{S}'$) tels que $\underline{L}=r^*(O_P(1))$; comme X est projectif sur Y et de type fini et P séparé sur Y, r est un morphisme projectif (II,4,6,th.3 (v)), donc une application fermée (II,4,6,th.4), autrement dit X s'identifie à un sous-préschéma fermé de P. Remplaçant $\underline{S}'$ par une Algèbre quotient par un faisceau gradué convenable d'idéaux, on peut même supposer que X=P (II,4,4,prop.15 et cor.1 de la prop.15). On a alors $\underline{S}=\Gamma_*(O_X)$, et le cor.3 du th.1 du n°2 montre que l'homomorphisme canonique $\alpha_n : \underline{S}'_n\to\underline{S}_n=f_*(O_X(n))$ est un isomorphisme

Archives Grothendieck sept 59

pour n assez grand. D'autre part, chacun des $\underline{S}_n$ est un O_Y-Module cohérent en vertu du th.1 (i) du n°2, donc $\underline{S}$ est une O_Y-Algèbre spéciale (puisque $\underline{S}'$ en est une). En outre (II, 4, 4, *Remarque* finale), le morphisme déduit de $\alpha : \underline{S}' \to \underline{S}$ est alors un isomorphisme de $\mathrm{Proj}(\underline{S})$ sur $\mathrm{Proj}(\underline{S}')=X$, qui transforme le faisceau $(\underline{S}(1))^{\sim}$ en $O_X(1)$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. — Si on suppose seulement que L est un O_X-Module *ample*, $\underline{L}^{\otimes d}$ est très ample pour d assez grand, et comme les préschémas $\mathrm{Proj}(\underline{S}^{(d)})$ et $\mathrm{Proj}(\underline{S})$ sont canoniquement Y-isomorphes (II, 4, 1, prop.3 (i)), on voit que X est encore isomorphe à $\mathrm{Proj}(\underline{S})$; en outre le th.1 du n°2 s'applique encore à X, en remplaçant $\underline{S}$ par $\underline{S}^{(d)}$ (mais bien entendu $O_X(n)$ doit ici être pris isomorphe à $(\underline{S}^{(d)}(n))^{\sim}$). Il serait intéressant de savoir si $\underline{S}$ est alors une O_Y-Algèbre de type fini, et quels sont alors les énoncés qui doivent remplacer le th.1 du n°2 et ses corollaires, ainsi que la prop.~~7~~8 ci-dessus. D'une façon générale, le rôle joué par les faisceaux inversibles dans la théorie des morphismes projectifs n'est pas éclairci. Des progrès dans ce sens permettraient peut-être de résoudre des questions telles que la suivante : si Y est un préschéma noethérien, X un Y-préschéma séparé et de type fini, X' un Y-préschéma projectif, $X' \to X$ un morphisme entier surjectif, est-il vrai que X soit un Y-préschéma *projectif* ? On l'ignore même lorsque Y=Spec(k) où k est un corps algébriquement clos.

Proposition 9. — *Soient* Y *un préschéma noethérien*, $f : X \to Y$ *un morphisme projectif*, $\underline{L}$ *un* O_X-*Module inversible. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) L *est ample*.

(ii) *Pour tout* O_X-*Module cohérent* $\underline{F}$, *il existe un entier* n_0 *tel que pour* $n \geqslant n_0$, *on ait* $R^q f_*(\underline{F} \otimes \underline{L}^{\otimes n})=0$ *pour tout* $q>0$.

(iii) Pour tout faisceau cohérent $\underline{J}$ d'idéaux dans O_X , il existe un entier n_0 tel que , pour $n \geqslant n_0$, on ait $R^1 f_*(\underline{J}\otimes\underline{L}^{\otimes n})=0$.

On a déjà démontré que (i) entraîne (ii) (n°2,prop.7) , et (ii) implique trivialement (iii) . Pour démontrer que (iii) entraîne (i) , on peut se borner au cas où Y est affine (II,4,9,cor. de la prop.34); nous allons appliquer le critère de II,4,9,prop.35 (iv) . Soit donc $\underline{J}$ un faisceau cohérent d'idéaux dans O_X , et soit x un point fermé de X ; désignons par $\underline{K}$ le faisceau cohérent d'anneaux sur X dont la fibre est nulle aux points $\neq x$, et la fibre en x égale à $\kappa(x)$. Le raisonnement du critère de Serre (§ 1,n°5,th.2) montre que l'on a une suite exacte $0\to\underline{J}'\to\underline{J}\to\underline{J}\otimes\underline{K}\to 0$, où $\underline{J}'$ est un faisceau cohérent d'idéaux , et comme $\underline{L}$ est localement libre , on en déduit une suite exacte $0\to\underline{J}'\otimes\underline{L}^{\otimes n}\to\underline{J}\otimes\underline{L}^{\otimes n}\to\underline{J}\otimes\underline{K}\otimes\underline{L}^{\otimes n}\to 0$ pour tout n . L'hypothèse (iii) entraîne que pour $n\geqslant n_0$, $H^1(X,\underline{J}'\otimes\underline{L}^{\otimes n})=0$, et on en conclut , par la suite exacte de cohomologie , que $\Gamma(X,\underline{J}\otimes\underline{L}^{\otimes n})\to\Gamma(X,\underline{J}\otimes\underline{K}\otimes\underline{L}^{\otimes n})$ est surjective . Donc (loc.cit.) il existe un nombre fini de sections

$\underline{J}\otimes\underline{L}^{\otimes n}$ h_j de $\mathcal{J}$ au-dessus de X $(1\leq j\leq n)$ et un voisinage ouvert $U(x)$ de x tels que les restrictions des h_j à $U(x)$ engendrent $\underline{J}\otimes\underline{L}^{\otimes n}|U(x)$. Comm X est noethérien , il y a un nombre fini de points fermés x_i $(1\ i\ m)$ tels que les $U(x_i)$ forment un recouvrement fermé de X (I,4,1,lemme 1)

$\underline{J}\otimes\underline{L}^{\otimes n}$ On en conclut aussitôt que $\mathcal{J}$ est engendré par un nombre fini de ses sections au-dessus de X ; a fortiori le critère de II,4,9,prop.35 (iv est vérifié .

Proposition 10 .- Soient Y un préschéma noethérien , $f : X \to Y$ un morphisme projectif , L un O_X-module inversible , $g : X' \to X$ un morphisme fini dominant . Pour que L soit ample , il faut et il suffit que son image réciproque $L' = g^*(L) = L \otimes_X O_{X'}$ le soit .

On sait déjà que la condition est nécessaire (II;4,8,cor.3 de la prop.31) . Comme g_{red} est fini (II,2,7,prop.15) et f_{red} projectif (II,4,6,th.3) , on peut supposer X et X' réduits en vertu de II,4,9, cor.2 de la prop.35 . Par le raisonnement de récurrence habituel dans les espaces noethériens , on peut supposer que pour toute partie fermée $Z \neq X$, en désignant par j l'injection dans X du sous-préschéma réduit dont Z est l'espace sous-jacent , $j^*(L)$ est ample . Nous allons en déduire tout d'abord que si un O_X-module cohérent F a son support contenu dans une telle partie Z , il satisfait à la condition (ii) de la prop.9 . En effet , si J est le faisceau cohérent d'idéaux définissant le sous-préschéma réduit Z , on a alors $J^nF=0$ pour un entier $n>0$ (II,1,4,prop.14) ; filtrant F par les sous-faisceaux J^kF et utilisant la suite exacte de cohomologie , on est ramené au cas où $JF=0$, autrement dit au cas où F est de la forme $j_*(G)$, où G est un O_Z-module cohérent . Comme l'injection j est affine , on sait (§ 1,n°3,cor.3 du th.1) que

$R^q(f \circ j)_*(G \otimes j^*(L^{\otimes m})) = R^qf_*(F \otimes L^{\otimes m})$ pour tout $q>0$ et tout m (II,2,4, cor. de la prop.9) ; mais comme par hypothèse $j^*(L)$ est ample , on a $R^q(f \circ j)_*(G \otimes j^*(L^{\otimes m}))=0$ pour m assez grand , ce qui établit notre assertion .

Cela étant , posons $A=O_X$, $B=g_*(O_{X'})$; il existe deux entiers k,m et un homomorphisme de A-modules $u : A^k \to B \otimes L^{\otimes m}$ ayant la propriété suivante : il existe un ensemble ouvert non vide $V \subset X$ tel que $u|V$ soit un isomorphisme . La démonstration de ce fait suit pas à pas celle de l'assertion analogue dans la prop.6 du § 1,n°5 ; il faut seulement utiliser le fait que si

U est un voisinage ouvert affine de x X , x'_j $(1\leq j\leq m)$ les points de la fibre (discrète) $g^{-1}(x)$, s une section de $\underline{O}_{X'}$ au-dessus de $g^{-1}(U)$, il existe pour chaque j une section f_j de $\underline{L}'^{\otimes m}$ au-dessus de X' telle que $x_j \in X'_{f_j} \subset g^{-1}(U)$ et que $s\otimes f_j$ se prolonge en une section de $\underline{O}_{X'}\otimes\underline{L}'^{\otimes m}$ au-dessus de X' . La possibilité de réaliser la première condition (en prenant m assez grand) résulte de ce que $\underline{L}'$ est ample et du critère (ii) de II,4,9,prop.35 ; on considère les composantes irréductibles (en nombre fini) de $X'-g^{-1}(U)$, et on applique le critère cité à x'_j et au point générique de chacune de ces composantes . Quant à la possibilité de réaliser la seconde condition elle résulte de II,1,4,th.2 .

Cela étant, supposons d'abord que $\underline{F}$ soit un $\underline{B}$-Module cohérent sur X et prouvons alors que $R^qf_*(\underline{F}\otimes\underline{L}^{\otimes n})=0$ pour tout $q>0$ dès que n est assez grand . Comme g est affine, il existe un $\underline{O}_{X'}$-Module cohérent $\underline{G}$ tel que $\underline{F}=g_*(\underline{G})$ (II,2,4,prop.9), et on a $R^q(f\circ g)_*(\underline{G}\otimes\underline{L}'^{\otimes n})=$ $=R^qf_*(\underline{F}\otimes\underline{L}^{\otimes n})$ pour tout $q>0$ et tout n (§ 1,n°3,cor.3 du th.1) ; l'hypothèse que $\underline{L}'$ est ample entraîne donc la conclusion pour n assez grand en vertu de la prop.9 .

Abordons maintenant le cas général ; l'homomorphisme u défini plus haut donne un homomorphisme

$$v : \underline{Hom}_{\underline{A}}(\underline{B}\otimes\underline{L}^{\otimes m},\underline{F}) \to \underline{Hom}_{\underline{A}}(\underline{A}^k,\underline{F})=\underline{F}^k$$

dont la restriction à V est un isomorphisme . Mais on a

$$\underline{Hom}_{\underline{A}}(\underline{B}\otimes\underline{L}^{\otimes m},\underline{F})=\underline{Hom}_{\underline{A}}(\underline{L}^{\otimes m},\underline{Hom}_{\underline{A}}(\underline{B},\underline{F}))=\underline{Hom}_{\underline{A}}(\underline{B},\underline{F})\otimes\underline{L}^{\otimes(-m)}$$

(II,1,3,prop.11), et par suite , pour tout $n>0$, on déduit de v un homomorphisme

$$w : \underline{F}'\otimes\underline{L}^{\otimes n} \to (\underline{F}\otimes\underline{L}^{\otimes(m+n)})^k$$

où on a posé $\underline{F}'=\underline{Hom}_{\underline{A}}(\underline{B},\underline{F})$; en outre la restriction de w à V est un isomorphisme , autrement dit les supports de Ker w et de Coker w sont contenus dans une partie fermée de X distincte de X . Comme $\underline{F}'$ est un B-module cohérent , on a $R^q f_*(\underline{F}'\otimes \underline{L}^{\otimes n})=0$ pour $q>0$ et n assez grand d'après ce qui a été vu plus haut . On conclut comme dans la démonstration de la prop.6 du § 1,n°5 , en appliquant deux fois la suite exacte de cohomologie .

Corollaire .- *Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de sous-préschémas fermés de X, telle que X soit réunion des espaces de base X_i . Pour que $\underline{L}$ soit ample , il faut et il suffit que pour chaque i , $g_i^*(\underline{L})$ soit ample , en désignant par g_i l'injection canonique $X_i \to X$.*

Il suffit de considérer le préschéma X' somme des X_i , et le morphisme surjectif $g : X' \to X$ dont la restriction à chaque X_i est g_i ; ce morphisme étant fini (§ 1,n°5,cor.1 de la prop.6) , on peut lui appliquer la prop.10 .

4 . Préschémas éclatés .

Soit Y un préschéma , $\underline{R}(Y)$ le faisceau des pseudo-fonctions sur Y (I,5,3) ; nous dirons pour abréger qu'un sous-faisceau de $\underline{R}(Y)$ est un *faisceau d'idéaux fractionnaires* sur Y . On dira qu'un faisceau d'idéaux (ou d'idéaux fractionnaires) $\underline{J}$ sur Y est *localement principal* si pour tout $y\in Y$, il existe un voisinage ouvert U de y tel que $\underline{J}|U$ soit engendré par une de ses sections au-dessus de U ; si Y est intègre et $\underline{J}_y\neq 0$ pour tout $y\in Y$, un tel faisceau $\underline{J}$ est *inversible* .

Définition 1 .- *Soit $\underline{J}$ un faisceau quasi-cohérent d'idéaux (ou d'idéaux fractionnaires) sur Y , et soit $\underline{S}=\bigoplus_{n\geq 0} \underline{J}^n$ (où on pose $\underline{J}^0=\underline{O}_Y$) , qui est une $\underline{O}_Y$-Algèbre graduée quasi-cohérente . On dit que le Y-préschéma X=Proj($\underline{S}$) est obtenu en faisant éclater le faisceau d'idéaux (resp. d'idéaux fractionnaires) $\underline{J}$.*

Lorsque $\underline{J}$ est un faisceau d'idéaux quasi-cohérent , qui définit un sous-préschéma fermé Y' de Y, on dit encore que $\mathrm{Proj}(\underline{S})$ est obtenu en faisant éclater le sous-préschéma Y'. Lorsque $\underline{J}$ est de type fini, $X=\mathrm{Proj}(\underline{S})$ est un Y-schéma projectif.

Si on remplace $\underline{J}$ par $\underline{J}^d$ $(d>0)$, ou par $\underline{J}\underline{L}$, où $\underline{L}$ est un sous-faisceau inversible de O_Y (resp. de $\underline{R}(Y)$ si $\underline{J}$ est un faisceau d'idéaux fractionnaires), $\mathrm{Proj}(\underline{S})$ est remplacé par un Y-préschéma isomorphe (II,4,1,prop.3). En particulier, si $\underline{J}$ est inversible, X s'identifie à Y.

Proposition 11.- Soient Y un préschéma intègre, $\underline{J}$ un faisceau quasi cohérent non nul d'idéaux entiers ou fractionnaires sur Y. Alors le préschéma X obtenu en faisant éclater $\underline{J}$ est intègre, et le morphisme structural $f : X \to Y$ est birationnel.

La première assertion résulte de ce que $\underline{S}=\bigoplus_{n\geq 0} \underline{J}^n$ est alors intègre (II,4,1,prop.4). Soient x,y les points génériques de X et Y; on a $f(x)=y$ et il faut prouver que $k(x)$ est de rang 1 sur $k(y)$. Or x est aussi le point générique de la fibre $f^{-1}(y)$; si ψ est le morphisme canonique $\xi \to Y$, où $\xi=\mathrm{Spec}(k(y))$, le préschéma $f^{-1}(y)$ s'identifie à $\mathrm{Proj}(\underline{S}')$, où $\underline{S}'=\psi^*(\underline{S})$ (II,4,4,prop.14). Mais il est clair que $\underline{S}'=\bigoplus_{n\geq 0}(\underline{J}_y)^n$, et comme $\underline{J}_y\neq 0$ est un idéal de $O_y=k(y)$, on a $\underline{J}_y=k(y)$ et $\mathrm{Proj}(\underline{S}')$ s'identifie par suite à ξ, d'où la seconde assertion.

Proposition 12.- Soient Y un préschéma intègre noethérien, X un préschéma intègre, $f : X\to Y$ un morphisme projectif birationnel. Il existe alors un faisceau cohérent $\underline{J}\subset\underline{R}(Y)$ d'idéaux fractionnaires tel que X soit isomorphe au préschéma obtenu en faisant éclater $\underline{J}$. En outre, si U est un ouvert de Y tel que la restriction de f à $f^{-1}(U)$ soit un isomorphisme $f^{-1}(U)\to U$ (I,4,3,prop.16), on peut supposer que $\underline{J}|U$ est localement principal.

Si $\underline{L}$ est un faisceau très ample sur X, X s'identifie à $\mathrm{Proj}(\underline{S})$, où $\underline{S}=\bigoplus_{n\geq 0} f_*(\underline{L}^{\otimes n})$ (n°3, prop.8); il est clair en outre que $f_*(\underline{L})|U$

est inversible, et il en est de même de chacun des $f_*(\underline{L}^{\otimes n})|U$ $(n \geqslant 0)$. Comme les $f_*(\underline{L}^{\otimes n})$ sont cohérents (n°2, th.1), la propriété précédente entraîne que les $f_*(\underline{L}^{\otimes n})$ sont <u>sans torsion</u>, donc il en est de même du O_Y-Module $\underline{S}$, et par suite $\underline{S}$ s'identifie à un sous-O_Y-Module du faisceau simple $\underline{S} \otimes \underline{R}(Y)$ (I,5,3,cor.3 de la prop.8). Ce dernier est connu lorsqu'on connaît sa restriction à un ouvert non vide, par exemple à un ouvert non vide $U' \subset U$ tel que $\underline{L}|f^{-1}(U')$ soit isomorphe à $O_X|f^{-1}(U')$. On voit donc que $\underline{S} \otimes \underline{R}(Y)$ est une O_Y-Algèbre isomorphe à $\underline{R}(Y)[T]$, où T est une indéterminée, et $\underline{S}$ s'identifie à la sous-O_Y-Algèbre graduée engendrée par l'image de $f_*(\underline{L})$ dans $\underline{S} \otimes \underline{R}(Y)$ identifié à $\underline{R}(Y)[T]$; il est clair que cette image est de la forme $\underline{J}.T$, où $\underline{J}$ est un sous-faisceau cohérent de $\underline{R}(Y)$, donc $\underline{S}$ est isomorphe à $\bigoplus_{n \geqslant 0} \underline{J}^n$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1.- Sous les hypothèses de la prop.12, supposons en outre que, pour tout sous-faisceau cohérent $\underline{J}$ de $\underline{R}(Y)$, il existe un O_Y-Module inversible $\underline{L}$ tel que $\Gamma(Y, \underline{L} \otimes_{O_Y} \underline{Hom}(\underline{J}, O_Y)) \neq 0$; alors, dans l'énoncé de la prop.12, on peut supposer que $\underline{J}$ est un sous-faisceau de O_Y. Cette condition supplémentaire est toujours vérifiée si Y est un schéma quasi-projectif sur un anneau A.

En effet, on a $\underline{L} \otimes \underline{Hom}(\underline{J}, O_Y) = \underline{Hom}(\underline{L}^{-1}, \underline{Hom}(\underline{J}, O_Y)) = \underline{Hom}(\underline{J} \otimes \underline{L}^{-1}, O_Y)$ (II,1,3,prop.11) ; l'hypothèse signifie donc qu'il existe un homomorphisme non nul u de $\underline{J} \otimes \underline{L}^{-1}$ dans O_Y. Comme pour tout $y \in Y$, $(\underline{J} \otimes \underline{L}^{-1})_y$ s'identifie à un sous-O_y-module du corps $(\underline{R}(Y))_y$, u_y est nécessairement injectif, donc u est un isomorphisme de $\underline{J} \otimes \underline{L}^{-1}$ sur un sous-faisceau $\underline{J}'$ de O_Y. On peut par suite remplacer $\underline{J}$ par $\underline{J}'$ sans changer Proj$(\underline{S})$ à un isomorphisme près (II,4,1,prop.3). La dernière assertion du corollaire résulte du

Lemme 2.- Si Y est un schéma quasi-projectif sur un anneau A, pour tout faisceau quasi-cohérent $\underline{F} \neq 0$ sur Y, il existe un O_Y-Module inversible

L *tel que* $\Gamma(Y,L\otimes F)\neq 0$.

En effet , on peut identifier Y à un sous-préschéma induit sur un ouvert partout dense d'un A-schéma projectif Z (II,4,7,prop.24) , et F est alors induit sur Y par un O_Z-Module quasi-cohérent G (II,1,2,th.1). On peut donc se ramener au cas où Y est *projectif* sur A ; en outre , comme F est limite inductive de ses sous-faisceaux cohérents (II,1,2,cor. du th.1) on peut se borner au cas où F est cohérent et $\neq 0$. Mais alors $F(n)=F\otimes_{O_Y}O_Y(n)$ est $\neq 0$ pour tout n , et il est engendré par ses sections au-dessus de Y lorsque n est assez grand (n°2,cor.1 du th.1) , d'où le lemme .

En particulier :

Corollaire 2 .-Soient X et Y deux schémas projectifs intègres sur un corps k , et soit f : X→Y un k-morphisme birationnel . Alors X est isomorphe à un Y-préschéma obtenu en faisant éclater un sous-schéma fermé Y' (non nécessairement réduit) de Y .

En effet , f est projectif (II,4,6,th.3 (v)) , et comme Y est projectif sur un corps), la condition supplémentaire du cor.1 est vérifiée ; il suffit alors de considérer le sous-schéma fermé Y' de Y défini par le faisceau d'idéaux J du cor.1 .

Remarque .- Au chap.IV , en étudiant la notion de diviseur , nous verrons que si , dans l'énoncé de la prop.12 , on suppose que les O_y ($y\in Y$) sont factoriels (ce qui est le cas par exemple si Y est non singulier), alors X peut se déduire de Y en faisant éclater un sous-schéma Y' de Y dont l'espace sous-jacent est contenu dans Y-U .

5 . Caractéristique d'Euler-Poincaré et polynôme de Hilbert .

Soient A un anneau *artinien* , S une A-algèbre graduée spéciale , X=Proj(S) son spectre premier homogène . Si F est un O_X-Module cohérent , les $H^i(X,F)$ ($i\geq 0$) sont des A-modules de type fini (n°2, cor. 1 du th.1) , et par suite de *longueur finie* puisque A est artinien

En outre, on sait que $H^i(X,\underline{F})=0$ sauf pour un nombre fini de valeurs de i (*loc.cit.*) ; le nombre entier

(15) $$\chi_A(\underline{F})=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \operatorname{long}(H^i(X,\underline{F}))$$

est donc défini pour tout O_X-module cohérent $\underline{F}$; on l'appelle la *caractéristique d'Euler-Poincaré de* $\underline{F}$ (*par rapport à l'anneau A*). Pour $\underline{F}=O_X$, on dit que $\chi_A(O_X)$ est le *genre arithmétique* de X.

Proposition 13.- Soit $0\to\underline{F}'\to\underline{F}\to\underline{F}''\to 0$ *une suite exacte de* O_X-*modules cohérents. On a alors*

(16) $$\chi_A(\underline{F})=\chi_A(\underline{F}')+\chi_A(\underline{F}'') .$$

On a en effet, par la suite exacte de cohomologie, une suite exacte

$$0\to H^0(X,\underline{F}')\to H^0(X,\underline{F})\to H^0(X,\underline{F}'')\to H^1(X,\underline{F}')\to\cdots$$
$$\cdots\to H^r(X,\underline{F}')\to H^r(X,\underline{F})\to H^r(X,\underline{F}'')\to 0$$

les modules de cohomologie d'indice $>r$ étant nuls pour $\underline{F},\underline{F}'$ et $\underline{F}''$. Or on sait que dans une suite exacte de modules de longueur finie, ayant des 0 aux deux extrémités, la somme alternée des longueurs est nulle ; appliquant ce résultat, on trouve immédiatement (16).

Soit $\underline{F}$ *un* O_X-*Module cohérent*.

Théorème 2.- (i) *La fonction* $n\to\chi_A(\underline{F}(n))$ *est un polynôme en n*.

(ii) *Pour n assez grand, on a* $\chi_A(\underline{F}(n))=\operatorname{long}\Gamma(X,\underline{F}(n))$; *si* $\underline{F}=\tilde{M}$, (*où M est un* S-*module gradué de type fini*), *on a* $\chi_A(\underline{F}(n))$ $=\operatorname{long}(M_n)$ *pour n assez grand*.

(iii) *Le terme de plus haut degré de* $\chi_A(\underline{F}(n))$ *a un coefficient* >0.

(iv) *Le degré de* $\chi_A(\underline{F}(n))$ *est égal à la dimension du support de* $\underline{F}$.

Soient $\xi_1,\ldots,\xi_m$ les points de $Z=\operatorname{Spec}(A)$; on sait que Z est somme des schémas $Z_i=\operatorname{Spec}(A_i)$, où les A_i sont les composants locaux de A, et l'espace de base de Z_i est $\{\xi_i\}$ (I,4,1,prop.4) ; si $f : X\to Z$ est le morphisme structural, X est alors somme des présch mes induits sur les ouverts $X_i=f^{-1}(Z_i)$. Si $\underline{F}_i$ est le faisceau égal à $\underline{F}|X_i$ dans X_i , à 0 dans les X_j tels que $j\neq i$, $\underline{F}$ est la somme directe des $\underline{F}_i$, donc (prop.13)

(17) $$\chi_A(\underline{F}(n))=\sum_{i=1}^{m}\chi_A(\underline{F}_i(n)) .$$

Par ailleurs , il est clair que les A_j d'indice $j\neq i$ annulent les modules $H^q(X,\underline{F}_i)$, et par suite ces derniers peuvent être considérés comme des A_i-modules et leur longueur est la même en tant que A-modules ou A_i-modules , d'où

(18) $$\chi_A(\underline{F}_i(n))=\chi_{A_i}(\underline{F}_i(n)) \quad (1\leq i\leq m) .$$

Les relations (17) et (18) montrent que pour prouver (i) , on peut supposer que A est un anneau artinien <u>local</u> . Soit $\underline{m}$ son idéal maximal ; il existe un entier s tel que $\underline{m}^s=0$, et $\underline{F}(n)$ admet donc la filtration finie $\underline{F}(n)\supset\underline{m}\underline{F}(n)\supset\dots\supset\underline{m}^{s-1}\underline{F}(n)\supset 0$. Par récurrence , on déduit de la prop.13 que

(19) $$\chi_A(\underline{F}(n))=\sum_{k=1}^{s}\chi_A(\underline{m}^{k-1}\underline{F}(n)/\underline{m}^k\underline{F}(n)) .$$

Chacun des faisceaux $\underline{F}_k'(n)=\underline{m}^{k-1}\underline{F}(n)/\underline{m}^k\underline{F}(n)$ (où $\underline{F}_k'=\underline{m}^{k-1}\underline{F}/\underline{m}^k\underline{F}$) est annulé par $\underline{m}$, donc peut être considéré comme un faisceau sur $X'=$ $=\mathrm{Proj}(S')$, où $S'=S/\underline{m}S$ (II,4,5,prop.21); d'ailleurs , si $K=A/\underline{m}$ est le corps résiduel de A , S' peut être considéré comme K-algèbre graduée , et comme $H^i(X',\underline{F}_k(n))=H^i(X,\underline{F}_k(n))$ (G,II 4.9.1) , on a $\chi_K(\underline{F}_k(n))=\chi_A(\underline{F}_k(n))$. Pour démontrer (i) , on peut donc se ramener au cas où A est un corps ; enfin , X peut alors être considéré comme un sous-préschéma fermé de $P=\underline{P}_A^r$ pour un r convenable (II,4,6,prop.21) , et comme $H^i(X,\underline{F}(n))=H^i(P,\underline{F}(n))$, on voit finalement qu'on peut supposer que $S=K[T_0,\dots,T_r]$. On a alors $\underline{F}=\widetilde{M}$, où M est un S-module gradué de type fini (II,3,4,cor.1du th.1) ; il existe donc une résolution finie de M par des S-modules gradués <u>libres</u> de type fini

$$0\to L_q\to L_{q-1}\to\dots\to L_1\to M\to 0$$

(   ) et comme $\tilde{M}$ est un foncteur additif exact (II,3,3,prop.10) , on a aussi une suite exacte

$$0\to \tilde{L}_q \to \tilde{L}_{q-1}\to \dots\dots \to \tilde{L}_1 \to \tilde{M}\to 0$$

et par suite aussi pour tout n

$$0\to \tilde{L}_q(n)\to \tilde{L}_{q-1}(n)\to \dots\to \tilde{L}_1(n)\to \tilde{M}(n)\to 0$$

est exacte ; en appliquant la prop.13 par récurrence sur q , on en déduit

$$\chi_A(\tilde{M}(n))=\sum_{j=1}^{q}(-1)^{j+1}\chi_A(\tilde{L}_j(n))$$

et pour prouver (i) , on est donc ramené au cas où M est libre et gradué de type fini , donc au cas où $M=S(h)$ pour un $h\in \underline{Z}$. Comme alors $\tilde{M}(n)=(M(n))^{\sim}=(S(n+h))^{\sim}$ (II,3,3,cor.2 de la prop.14) , on est finalement ramené à prouver que $\chi_A(O_X(n))$ est égale à un polynôme ; mais en fait , pour $n\geq 0$ on a alors $\chi_A(O_X(n))=$ $=\text{long}\ H^0(X,O_X(n))=\text{long}\ S_n=\dim_A S_n$ en vertu de la prop.5 du n°1, on a $\dim_A S_n=\binom{n+r}{r}$; pour $n\leq -r-1$ on a de même $\chi_A(O_X(n))=(-1)^r\text{long}\ H^r(X,O_X(n))$, et si $n=-r-h$, la dimension sur A de $H^r(X,O_X(n))$ est le nombre des suites $(p_i)_{0\leq i\leq r}$ d'entiers $p_i>0$ tels que $\sum_{i=0}^{r}p_i=r+h$, ou encore le nombre des suites d'entiers $q_i\geq 0$ $(0\leq i\leq r)$ telles que $\sum_{i=0}^{r}q_i=h-1$, autrement dit $\binom{h+r-1}{r}$; comme $\binom{h+r-1}{r}=(-1)^r\binom{n+r}{r}$, on a encore $\chi_A(O_X(n))=\binom{n+r}{r}$; enfin , cette relation est aussi vérifiée pour $-r\leq n<0$, car alors $\binom{n+r}{r}=0$ et $H^i(X,O_X(n))=0$ pour tout $i\geq 0$ (loc.cit.). La démonstration de (i) est ainsi achevée .

Comme on a $H^i(X,\underline{F}(n))=0$ pour tout $i>0$ dès que n est assez grand (n°2,cor.1 du th.1) , on a bien $\chi_A(\underline{F}(n))=\text{long}\ H^0(X,\underline{F}(n))=$ $=\text{long}\ \Gamma(X,\underline{F}(n))$ pour ces valeurs de n , d'où la première assertion de (ii) ; la seconde résulte du n°2,cor.3 du th.2 . Comme on a donc $\chi_A(\underline{F}(n))\geq 0$ pour n assez grand , (iii) résulte de (ii) . Reste donc à démontrer (iv). Avec les notations du début de la démonstration , le support de $\underline{F}$ est réunion des supports des $\underline{F}_i$, donc $\dim(\mathrm{supp}(\underline{F}))=\sup_i(\dim(\mathrm{supp}(\underline{F}_i)))$ (I,7,1,prop.1) et tenant compte de (iii) et de (17) , on est ramené à prouver (iv) pour chacun des $\underline{F}_i$, donc on peut supposer l'anneau A local . De même , le support de $\underline{F}$ (lorsque A est local) est réunion des supports des $\underline{F}'_k$, et en utilisant (19) et (iii) , on est ramené au cas où A est un corps . Enfin , comme ci-dessus , en considérant X comme sous-préschéma fermé de $\underline{P}^r_A$, on se ramène au cas où $X=\underline{P}^r_A$. Considérons alors la catégorie $\underline{K}'$ des O_X-Modules cohérents $\underline{F}$ tels que $\deg(\chi_A(\underline{F}(n)))=\dim(\mathrm{supp}(\underline{F}))$; cette catégorie n'est peut-être a priori pas exacte , mais la somme directe de deux faisceaux de $\underline{K}'$ appartient à $\underline{K}'$ (prop.13) , la relation $\underline{F}^q\in\underline{K}'$ entraîne $\underline{F}\in\underline{K}'$ en vertu de la prop.13 , puisque $\mathrm{supp}(\underline{F}^q)=\mathrm{supp}(\underline{F})$; enfin , si $u : \underline{F}\to\underline{G}$ est un homomorphisme de O_X-Modules tel que $\underline{G}$, Ker u et Coker u appartiennent à $\underline{K}'$ et que les supports de Ker u et de Coker u aient une dimension strictement inférieure à celle du support de $\underline{G}$, on en conclut que $\underline{F}\in\underline{K}'$. En effet , on a d'abord

$$\chi_A(\underline{G}(n))=\chi_A((\mathrm{Im}\ u)(n))+\chi_A((\mathrm{Coker}\ u)(n))$$

et comme le degré de $\chi_A((\mathrm{Coker}\ u)(n))$ est par hypothèse strictement inférieur au degré de $\chi_A(\underline{G}(n))$, les polynômes $\chi_A(\underline{G}(n))$ et $\chi_A((\mathrm{Im}\ u)(n))$ ont même degré ; d'autre part , comme $\mathrm{supp}(\underline{G})$ est réunion des supports de Im u et de Coker u , l'hypothèse entraîne que $\mathrm{supp}(\underline{G})$ et $\mathrm{supp}(\mathrm{Im}\ u)$ ont même dimension (I,7,1,prop.1) , d'où Im u $\in\underline{K}'$. On a ensuite

$$\chi_A(\underline{F}(n))=\chi_A((\mathrm{Ker}\ u)(n))+\chi_A((\mathrm{Im}\ u)(n))$$

et comme le degré de $\chi_A((\mathrm{Ker}\ u)(n))$ est strictement inférieur à celui de $\chi_A((\mathrm{Im}\ u)(n))$ d'après ce qu'on vient de voir , les degrés de $\chi_A(\underline{F}(n))$ et de $\chi_A((\mathrm{Im}\ u)(n))$ sont égaux , d'où on conclut comme précédemment que $\underline{F}\in\underline{K}'$. On prouve de même que $\underline{G}\in\underline{K}'$ lorsqu'on suppose que $\underline{F}\in\underline{K}'$ et que les supports de Ker u et de Coker u aient une dimension strictement inférieure à celle de supp($\underline{F}$) . La Remarque suivant le corollaire du lemme de dévissage (II,1,5) montre que ce corollaire s'applique , et pour montrer que $\underline{K}'$ est la catégorie de tous les O_X-Modules cohérents , on est ramené à prouver que pour tout sous-préschéma fermé intègre Y de $X=\underline{P}^r_A$, le faisceau O_Y (identifié à un O_X-Module) appartient à $\underline{K}'$. On peut identifier le sous-préschéma Y à Proj(S') , où S'=S/$\underline{I}$, $\underline{I}$ étant un idéal premier gradué de S_+ (II,3,5, prop.21) et il résulte de (ii) que pour n grand $\chi_A(O_Y(n))=\dim_A S'_n$; on peut d'ailleurs remplacer S' par $S'^{(d)}$, où $d>0$, et supposer par suite que $S'_n=(S'_1)^n$ pour tout n (II,4,1,cor.3 de la prop.3) . D'où

$$\dim_A S'_n=\dim_A(S'/S'^{n+1}_+)-\dim_A(S'/S'^{n}_+) \quad .$$

Or , $n\to\dim_A(S'/S'^{n}_+)$ est , pour n grand , un polynôme de degré égal à la dimension de l'anneau local $B=S'_{S'_+}$. Comme Y'=Spec(S') est strictement équidimensionnel (I,7,2,prop.7) , dim(Y') est égal à la dimension de chacun des anneaux locaux de ses points fermés , et en particulier à dim(B) , qui correspond au "sommet" c de Y' (Y' n'étant autre que le cône projetant de Y (II,3,6)) ; on voit donc que $\deg(\chi_A(O_Y(n)))=\dim Y'-1$. D'autre part , dim(Y')=dim(Y'−{c}) , et on a un morphisme canonique surjectif de type fini g : Y'−{c}→Y dont toutes les fibres sont de dimension 1 (II,3,6,prop.22) ; donc dim Y'=dim Y +1 (I,7,3, cor.4 du th.1) , ce qui achève de démontrer le th.2 .

Corollaire .- *Soient A un anneau artinien , S une A-algèbre graduée spéciale , X=Proj(S) . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *X est artinien* ; a') *X est fini sur A* .

b) *Il existe une A-algèbre A' , finie sur A , et un homomorphisme S→A'[T] de A-algèbres graduées, qui est un isomorphisme modulo* (TN).

c) *Il existe une constante a telle que* long(S_n)=a *pour n assez grand*

d) <u>Il existe une constante a telle que</u> $\mathrm{long}(S_n) \leq a$ <u>pour n assez grand</u> .

Comme un module de type fini sur un anneau artinien est artinien , il est clair que si X est fini sur A , X est artinien . Inversement , si X est artinien , $A' = \Gamma(X, O_X)$ est artinien et l'espace sous jacent X est fini et discret (I,4,1,prop.4) , donc $O_X(1)$ est isomorphe à O_X ; par suite $\bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, O_X(n))$ est isomorphe à $A'[T]$ Appliquant à S le cor.3 du th.1,n°2 , on voit que a) implique b) ; en outre Proj(S)=Spec(A') (II,4,1,cor.3 de la prop.2) , donc X est fini sur A . Il est clair que b) entraîne c) et c) implique trivialement d). Enfin , le th.2 (ii) montre que d) implique que le support de O_X (c'est-à-dire X) est de dimension 0 ; les composantes irréductibles de X sont donc des points , ce qui implique que les points de X sont fermés , et comme X est noethérien, X est artinien (I,4,1,prop.4), donc d) implique a) .

<u>Remarque</u> .- La constante <u>a</u> dans le d) du corollaire n'est autre que la longueur de $A' = \Gamma(X, O_X)$; si A est un corps , c'est le <u>rang</u> du schéma algébrique fini X .On verra que lorsque <u>F</u> est un faisceau algébrique cohérent sur $\underline{P}_k^r$ (k étant un corps), le terme dominant $c_d n^d$ du polynôme $\chi_k(\underline{F}(n))$ est tel que $d!\,c_d$ puisse s'interpréter comme le "degré" du "cycle dominant" de F .

Archives Grothendieck sept 89

§ 3 . Etude cohomologique des morphismes propres .

1 . Le théorème de finitude .

Bien que le théorème suivant soit contenu dans le théorème fondamental des morphismes propres (n° ,th.) , sa démonstration directe est beaucoup plus simple , et nous la donnons à part tout d'abord.

Théorème 1 (théorème de finitude) .- Soient Y un préschéma localement noethérien , $f : X \to Y$ un morphisme propre . Pour tout O_X-Module $\underline{F}$ cohérent , les O_Y-Modules $R^q f_*(\underline{F})$ sont cohérents ($q \geqslant 0$).

La question étant locale sur Y , on peut supposer Y affine , donc noethérien , et par suite X noethérien . Les O_X-Modules cohérents satisfaisant à la conclusion du th.1 forment une sous-classe exacte $\underline{K}'$ de la catégorie $\underline{K}$ des faisceaux cohérents sur X . En effet , soit $0 \to \underline{F}' \to \underline{F} \to \underline{F}"$ 0 une suite exacte de O_X-Modules cohérents ; supposons par exemple que $\underline{F}'$ et $\underline{F}"$ appartiennent à $\underline{K}'$; la suite exacte de cohomologie montre que la suite

$$R^{q-1}f_*(\underline{F}") \xrightarrow{\partial} R^q f_*(\underline{F}') \longrightarrow R^q f_*(\underline{F}) \longrightarrow R^q f_*(\underline{F}") \xrightarrow{\partial} R^{q+1}f_*(\underline{F}')$$

est exacte ; comme $R^{q-1}f_*(\underline{F}")$ et $R^q f_*(\underline{F}')$ sont cohérents , il en est de même de l'image $\underline{I}_q$ de l'homomorphisme $R^{q-1}f_*(\underline{F}") \xrightarrow{\partial} R^q f_*(\underline{F}')$; de même , comme $R^q f_*(\underline{F}")$ et $R^{q+1}f_*(\underline{F}')$ sont cohérents , il en est de même du noyau $\underline{N}_{q+1}$ de l'homomorphisme $R^q f_*(\underline{F}") \xrightarrow{\partial} R^{q+1}f_*(\underline{F}')$; enfin , comme la suite $0 \to \underline{I}_q \to R^q f_*(\underline{F}) \to \underline{N}_{q+1} \to 0$ est exacte et $\underline{I}_q$ et $\underline{N}_{q+1}$ cohérents , $R^q f_*(\underline{F})$ est cohérent . On montre de même que lorsque $\underline{F}$ et $\underline{F}'$ (resp. $\underline{F}$ et $\underline{F}"$) appartiennent à $\underline{K}'$, $\underline{F}"$ (resp. $\underline{F}'$) appartient à $\underline{K}'$. En outre , tout facteur direct $\underline{F}'$ d'un faisceau $\underline{F}$ appartenant à $\underline{K}'$ appartient aussi à $\underline{K}'$; en effet , $R^q f_*(\underline{F}')$ est alors facteur direct de $R^q f_*(\underline{F})$ (G,II,4.4.4) , donc est de type fini , et par suite cohérent (F C,I,2,12,prop.3) . En vertu du corollaire du lemme de dévissage (II,1,5,cor. du th.3) , on est ramené à prouver que lorsque X est irréductible , il existe <u>un</u> O_X-Module cohérent de support X appartenant à $\underline{K}'$: en effet , si ce point est établi , on pourra l'appliquer à toute partie fermée irréductible Y de X , car si $\underline{G}$ est un O_Y-Module cohérent et j l'injection canonique $Y \to X$, on a $R^q(f \circ j)_*(\underline{G}) = R^q f_*(j_*(\underline{G}))$ (G,II,4.9.1) , et le corollaire du lemme de dévissage s'applique .

En vertu du lemme de Chow (II,5,2,cor.1 du th.1) , il existe un préschéma irréductible X' et un morphisme projectif et birationnel g : $X' \to X$ tels que $f \circ g : X' \to Y$ soit <u>projectif</u> . Comme X est noethérien X' est isomorphe à un préschéma Proj($\underline{S}$) , où $\underline{S}$ est une O_X-Algèbre quasi-cohérente graduée à degrés positifs , engendrée par $\underline{S}_1$, où $\underline{S}_1$ est un O_X-Module cohérent (II,4,6,prop.21 (ii)) . Le th.1 du § 2,n°2 est applicable à g : $X' \to X$, et il existe donc un entier $n > 0$ tel que $\underline{F} = g_*(O_{X'}(n))$ soit cohérent et $R^q g_*(O_{X'}(n)) = 0$ pour tout $q > 0$; en outre , comme g est birationnel , le support de $\underline{F}$ contient un ouvert partout dense de X (F.C.I,2,12,prop.1) , et comme ce support est fermé , il est identique à X . D'autre part , comme $f \circ g$ est projectif et Y noethérien , le même raisonnement (II,4,6,prop.21 (ii) et § 2,n°2,th.1) montre que les $R^p(f \circ g)_*(O_{X'}(n))$ sont cohérents . Cela étant , $R^{\cdot}(f \circ g)_*(O_{X'}(n))$ est l'aboutissement d'une suite spectrale dont le terme E_2 est donné par $E_2^{pq} = R^p f_*(R^q g_*(O_{X'}(n)))$ (suite spectrale de Leray ; § 0,n°). D'après ce qui précède , on a $E_2^{pq} = 0$ pour $q > 0$; on sait alors que $E_2^{p0} = R^p f_*(\underline{F})$ est isomorphe à $R^p(f \circ g)_*(O_{X'}(n))$ (G,I,4.4.1) , ce qui achève la démonstration .

<u>Corollaire 1 .- Soit</u> Y <u>un préschéma localement noethérien . Pour tout morphisme propre</u> f : $X \to Y$, <u>l'image directe par</u> f <u>de</u>

<u>tout faisceau cohérent sur</u> X <u>est un faisceau cohérent sur</u> Y .

<u>Corollaire 2 .- Soient</u> A <u>un anneau noethérien</u> , X <u>un schéma propre sur</u> A , $\underline{F}$ <u>un</u> O_X<u>-module cohérent . Alors les</u> $H^p(X,\underline{F})$ <u>sont des</u> A<u>-modules de type fini</u> .

En particulier , si X est un <u>schéma algébrique propre</u> sur un corps k , alors , pour tout O_X-module cohérent $\underline{F}$, les $H^p(X,\underline{F})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie .

<u>Remarque</u> .- Dans ce dernier cas , on sait que l'on a $H^p(X,\underline{F})=0$ pour
(G, II, 4.15.2) $p > \dim.X$; les $H^p(X,\underline{F})$ sont donc nuls sauf pour un nombre fini de valeurs de p . Nous verrons plus loin que ce résultat est encore vrai sous les conditions générales du th.1 , lorsque Y est noethérien.

<u>2 . Complété d'un faisceau cohérent le long d'une partie fermée</u> .

Soient X un préschéma noethérien , X' une partie fermée de l'espace de base de X ; désignons par Φ l'ensemble des faisceaux cohérents d'idéaux $\underline{J}$ dans O_X tels que le support de $O_X/\underline{J}$ soit X' . L'ensemble Φ n'est pas vide (I,3,4,prop.9 et I,3,1,prop.1) ; nous l'ordonnerons par la relation $\supset$.

<u>Lemme 1 .- L'ensemble ordonné</u> Φ <u>est filtrant ; pour tout</u> $\underline{J}\in\Phi$, <u>l'ensemble des puissances</u> $\underline{J}^n$ $(n>0)$ <u>est cofinal à</u> Φ .

En effet , si $\underline{J}_1$ et $\underline{J}_2$ appartiennent à Φ , et si on pose $\underline{J}=\underline{J}_1\cap\underline{J}_2$,
(FAC, I, 2, cor. du th.2) $\underline{J}$ est ~~quasi~~-cohérent et on a $\underline{J}(x)=\underline{J}_1(x)\cap\underline{J}_2(x)$ donc $\underline{J}(x)=O_X(x)$ pour $x\notin X'$ et $\underline{J}(x)\neq O_X(x)$ pour $x\in X'$, ce qui prouve que $\underline{J}\in\Phi$. D'autre part , si $\underline{J}$ et $\underline{J}'$ sont dans Φ , il existe un entier $n>0$ tel que $\underline{J}^n(O_X/\underline{J}')=0$ (II,1,4,prop.14) , ce qui signifie que $\underline{J}^n\subset\underline{J}'$.

Soit maintenant $\underline{F}$ un O_X-module cohérent ; pour tout $\underline{J}\in\Phi$, $\underline{F}\otimes_{O_X}(O_X/\underline{J})$ est un faisceau cohérent sur X , de support contenu dans X' ; on l'identifiera le plus souvent à sa restriction à X' . Lorsque J parcourt Φ , ces faisceaux forment un <u>système projectif</u> de faisceaux de groupes abéliens .

Définition 1 .- On appelle complété de $\underline{F}$ le long de X' , et on désigne par $\underline{F}_{/X'}$ ou par $\hat{\underline{F}}$ (lorsqu'aucune confusion n'est possible) le faisceau $\varprojlim_{\Phi} (\underline{F}\otimes_{\underline{O}_X}(\underline{O}_X/\underline{J}))$ sur X . Ses sections s'appellent les sections formelles de $\underline{F}$ le long de X' et sa cohomologie $H^*(X',\underline{F}_{/X'})$ la cohomologie formelle de $\underline{F}$ le long de X' .

Le support de $\underline{F}_{/X'}$ est contenu dans X' , et on identifie d'ordinaire ce faisceau à sa restriction à X' ; rappelons que par définition , on a , pour tout ouvert $U\subset X$

$$(1)\quad \Gamma(U,\underline{F}_{/X'})=\Gamma(U\cap X',\underline{F}_{/X'})=\varprojlim_{\Phi}\ \Gamma(U\cap X',\underline{F}\otimes_{\underline{O}_X}\underline{O}_X/\underline{J})=\varprojlim_{n}\ \Gamma(U\cap X',\underline{F}\otimes_{\underline{O}_X}\underline{O}_X/\underline{J}^n)$$

pour tout $\underline{J}\in\Phi$ (cf. lemme 1). Il est clair que pour tout ouvert $U\subset X$ on a $(\underline{F}_{/X'})|U=(\underline{F}|U)_{/(X'\cap U)}$.

Il est immédiat , par passage à la limite projective , que $(\underline{O}_X)_{/X'}$ est un faisceau d'anneaux , et que $\underline{F}_{/X'}$ peut être considéré comme un $(\underline{O}_X)_{/X'}$-Module (les sections de $(\underline{O}_X)_{/X'}$ ne sont autres que les "fonctions holomorphes" de Zariski le long de X') . Les homomorphismes $\underline{O}_X\to\underline{O}_X/\underline{J}$ ($\underline{J}\in\Phi$) donnent d'ailleurs par passage à la limite projective un homomorphisme canonique $\underline{O}_X\to(\underline{O}_X)_{/X'}$, ce qui permet de considérer $\underline{F}_{/X'}$ comme un $\underline{O}_X$-Module , mais ce faisceau ne sera pas nécessairement quasi-cohérent . D'autre part , $\underline{F}_{/X'}$, bien qu'étant un faisceau sur l'espace topologique X' , ne peut être en général considéré comme un $\underline{O}_{X'}$-Module , pour une quelconque des structures de sous-préschéma fermé de X ayant pour espace de base X' (car $\underline{O}_X/\underline{J}^n$ n'est pas muni d'une structure de Module sur $\underline{O}_X/\underline{J}$ en général). On peut seulement dire que X' , muni de $(\underline{O}_X)_{/X'}$, est un espace annelé sur lequel les $\underline{F}_{/X'}$ sont des faisceaux algébriques (au § de ce chapitre , nous étudierons sous le nom de "préschémas formels" une catégorie d'espaces annelés généralisant à la fois les espaces annelés du type précédent et les préschémas ordinaires).

Il est clair que $\underline{F}_{/X'}$ est un foncteur additif en $\underline{F}$, de la catégorie des faisceaux algébriques cohérents sur X, dans la catégorie des faisceaux algébriques sur l'espace annelé $(X', (O_X)_{/X'})$.

Proposition 1.4 Le foncteur $\underline{F}_{/X'}$ est exact.

La question étant locale, la prop.1 est équivalente à son

Corollaire 1.- Si $0 \to \underline{F}' \to \underline{F} \to \underline{F}'' \to 0$ est une suite exacte de O_X-modules cohérents, et U un ouvert affine de X, alors la suite

$$0 \to \Gamma(U, \underline{F}'_{/X'}) \to \Gamma(U, \underline{F}_{/X'}) \to \Gamma(U, \underline{F}''_{/X'}) \to 0$$

est exacte.

On a en effet alors U=Spec(A), où A est un anneau noethérien, et $\underline{F}|U=\tilde{M}$, $\underline{F}'|U=\tilde{M}'$, $\underline{F}''|U=\tilde{M}''$, où M, M', M'' sont trois A-modules de type fini, tels que la suite $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ soit exacte (I,1.5,th.3 et I,1,3,cor.3 du th.1). Soit $\underline{I}$ un idéal de A tel que $V(X' \cap U)=\underline{I}$; on a alors (U X', F $_{O_X}O_X/J^n$)=M $_A(A/I^n)$ en désignant par $\underline{J}$ un faisceau d'idéaux tel que $O_X/\underline{J}$ ait pour support X' et que $\underline{J}|U=\tilde{\underline{I}}$ (I,1,3, cor.6 du th.1). Il résulte donc de la formule (1) que $\Gamma(U, \underline{F}_{/X'})=\hat{M}$, complété de M pour la topologie $\underline{I}$-adique, et de même $\Gamma(U, \underline{F}'_{/X'})=\hat{M}'$, $\Gamma(U, \underline{F}''_{/X'})=\hat{M}''$; le cor.1 résulte alors de ce que, lorsque A est noethérien, le foncteur $\hat{M}$ est exact sur la catégorie des A-modules de type fini (Bourbaki, Alg.comm.).

Corollaire 2.- $H^*(X', \underline{F}_{/X'})$ est un foncteur cohomologique en $\underline{F}$, à valeurs dans la catégorie des modules sur l'anneau $A(X/X')=\Gamma((O_X)_{/X'})$ des sections formelles de O_X le long de X'.

Les homomorphismes canoniques $\underline{F}\otimes\underline{O}_X/\underline{J} \to \underline{F}\otimes\underline{O}_X/\underline{J}'$ pour $\underline{J}, \underline{J}'$ dans Φ et $\underline{J} \subset \underline{J}'$ définissent canoniquement des homomorphismes

$$H^i(X', \underline{F}\otimes\underline{O}_X/\underline{J}) \to H^i(X', \underline{F}\otimes\underline{O}_X/\underline{J}') \quad (i \geq 0)$$

qui font de $(H^i(X', \underline{F}\otimes\underline{O}_X/\underline{J}))_{\underline{J}\in\Phi}$ un système projectif de groupes abéliens ; en vertu de l'existence des homomorphismes canoniques

$(\mathcal{O}_X)_{/X'} \to \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ pour tout $\mathcal{J} \in \Phi$, il s'agit même d'un système projectif de $A(X/X')$-*modules*. En outre, les $A(X/X')$-homomorphismes canoniques $\mathcal{F}_{/X'} \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ $(\mathcal{J} \in \Phi)$ définissent un système projectif de $A(X/X')$-homomorphismes

$$H^i(X', \mathcal{F}_{/X'}) \to H^i(X', \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{J}) \qquad (i \geqslant 0)$$

d'où, en passant à la limite projective, un homomorphisme canonique de $A(X/X')$-modules

$$(2) \quad \psi_i : H^i(X', \mathcal{F}_{/X'}) \to \varprojlim_{\Phi} H^i(X', \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{J}) = \varprojlim_n H^i(X', \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n) .$$

Nous verrons plus loin des cas divers où les ψ_i sont des *isomorphismes*.

Proposition 2. - Le système des $H^i(X/X', \mathcal{F}) = \varprojlim_n H^i(X', \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n)$ est un ∂-foncteur en $\mathcal{F}$, à valeurs dans la catégorie des $A(X/X')$-modules et le système des ψ_i est un homomorphisme de ∂-foncteurs.

En effet, soit $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-Modules cohérents ; nous devons définir un $A(X/X')$-homomorphisme

$$\partial : H^i(X/X', \mathcal{F}'') \to H^{i+1}(X/X', \mathcal{F}') \qquad (i \geqslant 0)$$

ayant les propriétés usuelles (T, II, 2.1). Or, pour tout n, on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}'/(\mathcal{J}^n\mathcal{F} \cap \mathcal{F}') = (\mathcal{F}' + \mathcal{J}^n\mathcal{F})/\mathcal{J}^n\mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{J}^n\mathcal{F} \to (\mathcal{F}' + \mathcal{J}^n\mathcal{F})/\mathcal{J}^n\mathcal{F} = \mathcal{F}''/\mathcal{J}^n\mathcal{F}'' \to 0$$

d'où des homomorphisme

$$H^i(X', \mathcal{F}''/\mathcal{J}^n\mathcal{F}'') \to H^{i+1}(X', \mathcal{F}'/(\mathcal{J}^n\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'))$$

qui, ainsi que leur limite projective, ont les propriétés caractérisant les opérations ∂. Or, on a $\mathcal{F}''/\mathcal{J}^n\mathcal{F}'' = \mathcal{F}'' \otimes \mathcal{O}_X/\mathcal{J}^n$, donc $\varprojlim_n H^i(X', \mathcal{F}''/\mathcal{J}^n\mathcal{F}'') = H^i(X/X', \mathcal{F}'')$ par définition. Pour achever la démonstration, on voit que tout revient à prouver que *la filtration sur $\mathcal{F}'$ définie par les $\mathcal{J}^n\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ est cofinale à la filtration définie par les $\mathcal{J}^n\mathcal{F}'$*. Cela résulte immédiatement du fait que l'on a

$$(3) \qquad \mathcal{J}^n\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \mathcal{J}^{n-h}(\mathcal{J}^h\mathcal{F} \cap \mathcal{F}')$$

dès que $n \geqslant h$, pour un entier h convenable. En effet, si X est affine , ce résultat n'est autre que le lemme d'Artin-Rees (Bourbaki, Alg. comm.,) car si $X=\mathrm{Spec}(A)$, $\underline{J}=\tilde{I}$, $\underline{F}=\tilde{M}$, $\underline{F}'=\tilde{M}'$ (I idéal de l'anneau noethérien A , M A-module de type fini , M' sous-module de M) , on a $\underline{J}^n\underline{F}\cap\underline{F}'=(I^nM\cap M')^{\sim}=(I^{n-h}(I^hM\cap M'))^{\sim}=\underline{J}^{n-h}(\underline{J}^h\underline{F}\cap\underline{F}')$ (I,1,3, cor. du th.1) . Dans le cas général , il y a un recouvrement fini de X par des ouverts affines U_i , et pour chaque i , on a une relation analogue à (3) en remplaçant $\underline{J},\underline{F},\underline{F}'$ par leurs restrictions à U_i et h par un entier h_i ; il suffit alors de prendre pour h le plus grand des h_i pour obtenir (3) . Enfin , le résultat précédent montre aussi que les ψ_i constituent un homomorphisme de ∂-foncteurs , car les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} H^i(X',\underline{F}''/X') & \xrightarrow{\partial} & H^{i+1}(X',\underline{F}'/X') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(X',\underline{F}''/\underline{J}^n\underline{F}'') & \xrightarrow{\partial} & H^{i+1}(X',\underline{F}'/(\underline{J}^n\underline{F}\cap\underline{F}')) \end{array}$$

étant commutatifs , il en est de même , par passage à la limite projective , des diagrammes

$$\begin{array}{cccc} & H^i(X',\underline{F}''/X') & \xrightarrow{\partial} & H^{i+1}(X',\underline{F}'/X') & \\ \psi_i & \downarrow & & \downarrow & \psi_{i+1} \\ & H^i(X/X',\underline{F}'') & \xrightarrow{\partial} & H^{i+1}(X/X',\underline{F}') & \end{array}$$

Il n'est pas certain que le ∂-foncteur ainsi défini soit <u>exact</u> , puisqu'une limite projective de suites exactes n'est pas nécessairement exacte ; on saura seulement <u>a posteriori</u> que ce ∂-foncteur est exact lorsqu'on saura que les ψ_i sont des isomorphismes pour tout O_X-Module cohérent .

<u>Proposition 3 .- Si $\underline{F}$ et $\underline{G}$ sont deux O_X-Modules cohérents , il existe des isomorphismes canoniques</u> <u>fonctoriel</u>

$$(\underline{F}\otimes_{O_X}\underline{G})_{/X'} \xrightarrow{\sim} (\underline{F}_{/X'})\otimes_{(O_X)_{/X'}}(\underline{G}_{/X'})$$

<u>et</u> $$(\underline{\mathrm{Hom}}_{O_X}(\underline{F},\underline{G}))_{/X'} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Hom}}_{(O_X)_{/X'}}(\underline{F}_{/X'},\underline{G}_{/X'})$$

Il suffit de définir ces homomorphismes sur les sections au-dessus de V ouvert dans X

~~[illegible]~~, on est ramené au cas où ~~X~~ V $=\mathrm{Spec}(A)$, A étant noethérien , $\underline{F}=\tilde{M}$, $\underline{G}=\tilde{N}$, M,N étant des A-modules de type fini

Or , on sait qu'on a alors des homomorphismes canoniques fonctoriels

$$(M\otimes_A N)^\wedge \simeq \hat{M}\otimes_{\hat{A}}\hat{N}$$

$$(\mathrm{Hom}_A(M,N))^\wedge \simeq \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(\hat{M},\hat{N})$$

où les accents désignent les complétés des modules considérés pour une topologie $\underline{I}$-adique , $\underline{I}$ étant un idéal de A . La conclusion en résulte aussitôt (I,1,3,cor.6 du th.1).

Soient X,Y deux préschémas noethériens , $f=(\psi,\theta)$: $X\to Y$ un morphisme , X' (resp. Y') une partie fermée de X (resp. Y) telles que $\psi(X')\subset Y'$. Nous allons définir un <u>morphisme d'espaces annelés</u> $\hat{f}$: $(X',(O_X)_{/X'})\to$ $\to(Y',(O_Y)_{/Y'})$; nous prendrons $\hat{f}=(\psi|X',\hat{\theta})$, où $\hat{\theta}=\omega^{*}$ et ω est un homomorphisme de faisceaux d'anneaux $\psi^{*}((O_Y)_{/Y'})\to(O_X)_{/X'}$, que nous définirons de la façon suivante . Il suffit de considérer le cas où X=Spec(A) et Y=Spec(B) sont affines , f correspondant à un homomorphisme d'anneaux φ : $B\to A$, et on a $X'=V(\underline{a})$, $Y'=V(\underline{b})$, $\underline{a}$ (resp $\underline{b}$) étant un idéal de A (resp. B) . L'hypothèse $\psi(X')\subset Y'$ équivaut à $\underline{b}\subset\varphi^{-1}(\underline{p})$ pour tout idéal premier $\underline{p}\supset\underline{a}$, donc à $\underline{b}\subset\varphi^{-1}(\underline{r}(\underline{a}))$. Comme on peut supposer $\underline{a}$ égal à sa racine , on peut donc supposer $\varphi(\underline{b})\subset\underline{a}$; alors pour tout n , l'homomorphisme $B\to A$ définit , par passage aux quotients , un homomorphisme $B/\underline{b}^n\to A/\underline{a}^n$, et en passant à la limite projective , un homomorphisme $\hat{B}\to\hat{A}$, $\hat{A}$ (resp. $\hat{B}$) étant le complété de A (resp. B) pour la topologie $\underline{a}$-adique (resp. $\underline{b}$-adique). Revenant au cas général , cela définit , pour deux ouverts affines $U\subset X$, $V\subset Y$ tels que $\psi(U)\subset V$, un homomorphisme $\Gamma(V,(O_Y)_{/Y'})\to\Gamma(U,(O_X)_{/X'})$, et on vérifie aussitôt que ces homomorphismes sont compatibles avec les opérateurs de restriction (il suffit de le faire pour deux ouverts $U'=D(g)\subset U=\mathrm{Spec}(A)$, $V'=D(h)\subset V=\mathrm{Spec}(B)$, avec $g=\varphi(h)$, ce qui est immédiat) ; on a donc bien défini l'homomorphisme ω cherché .

<u>Proposition 4 .- Pour tout O_Y-Module cohérent $\underline{G}$, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel de $(O_X)_{/X'}$-Modules</u>

(4) $$(f^*_\cdot(\underline{G}))_{/X'} \xrightarrow{\sim} \hat{f}^*_\cdot(\underline{G}_{/Y'}) \ .$$

Il suffit de définir l'homomorphisme (4) et l'homomorphisme réciproque comme homomorphismes de préfaisceaux ; donc sur les sections au-dessus de l'intersection avec X' d'un ouvert affine $U \subset X$; on peut par suite supposer $U=X$ et $f(X)$ contenu dans un ouvert affine V de Y, qu'on peut aussi supposer égal à Y. On peut par suite prendre $\underline{G}=\tilde{N}$, où $N=\Gamma(Y,\underline{G})$; on sait qu'on a alors (avec les notations précédentes) $f^*_\cdot(\underline{G})=(N\otimes_B A)^\sim$ (I,1,6,prop.8), donc $\Gamma(X',(f^*_\cdot(\underline{G}))_{/X'})$ est le complété de $N\otimes_B A$ pour la topologie $\underline{a}$-adique. Comme il s'agit d'un A-module de type fini sur un anneau noethérien A ; ce complété s'identifi à $(N\otimes_B A)\otimes_A \hat{A}$ (Bourbaki, Alg. comm.,), qu'on peut aussi écrire $N\otimes_B \hat{A}$. Pour définir l'homomorphisme $(f^*_\cdot(\underline{G}))_{/X'} \to \hat{f}^*_\cdot(\underline{G}_{/Y'})$, il suffit donc de faire correspondre à tout élément $s\in N$ un élément de $\Gamma(X',\hat{f}^*_\cdot(\underline{G}_{/Y'}))$. Comme s est une section de $\underline{G}$ au-dessus de Y, il lui correspond canoniquement une section de $\underline{G}_{/Y'}$ au-dessus de Y', d'où une section de $\hat{f}^*(\underline{G}_{/Y'})$ au-dessus de X'. La vérification de la compatibilité avec les opérations de restriction est immédiate. En sens inverse, on a $\Gamma(Y,\underline{G}\otimes_{\underline{O}_Y}\underline{O}_Y/\underline{J}^n)$ (où $\underline{J}=\tilde{\underline{b}}$) n'est autre que $N\otimes_B(B/\underline{b}^n)$, et le B-homomorphisme $B/\underline{b}^n \to A/\underline{a}^n$ définit par suite un B-homomorphisme $N\otimes_B(B/\underline{b}^n) \to N\otimes_B(A/\underline{a}^n)$, d'où, par passage à la limite projective, un $\hat{B}$-homomorphisme $\Gamma(Y',\underline{G}_{/Y'})\to\Gamma(X',(f^*_\cdot(\underline{G}))_{/X'})$. Ces homomorphismes sont encore compatibles avec les opérations de restriction, donc donnent un $\psi^*_\cdot((O_Y)_{/Y'})$-homomorphisme $\psi^*_\cdot(\underline{G}_{/Y'})\to(f^*_\cdot(\underline{G}))_{/X'}$, et par suite un $(O_X)_{/X'}$-homomorphisme $\hat{f}^*_\cdot(\underline{G}_{/Y'})=\psi^*_\cdot(\underline{G}_{/Y'})\otimes_{\psi^*_\cdot((O_Y)_{/Y'})}(O_X)_{/X'} \to (f^*_\cdot(\underline{G}))_{/X'}$. Il reste à voir que les deux homomorphismes ainsi définis sont réciproques l'un de l'autre, ce qui est immédiat en vertu de ce qui précède.

<u>Remarque</u> .- On peut donc dire que $\underline{F}_{/X'}$ est un <u>foncteur par rapport</u>

au triplet (F,X,X'), un morphisme $(F,X,X')\rightarrow(G,Y,Y')$ consistant en un morphisme de préschémas $f : X\rightarrow Y$ tel que $f(X')\subset Y'$ et en un homomorphisme $f^{*}(G)\rightarrow F$, qui donne par complétion le long de X' un homomorphisme $(f^{*}(G))_{/X'}\rightarrow F_{/X'}$, et à l'aide de (4), un homomorphisme $\hat{f}^{*}(G_{/Y'})\rightarrow F_{/X'}$, qu'on vérifie aussitôt être un $(O_X)_{/X'}$-homomorphisme En outre, pour chaque n, on a vu ci-dessus qu'on a un homomorphisme $f^{*}(G\otimes_{O_Y}(O_Y/J^n))\rightarrow f^{*}(G)\otimes_{O_X}(O_X/I^n)$ (où I est un faisceau d'idéaux convenable tel que le support de O_X/I soit X'), d'où (chap.0, § , n°) pour chaque i un homomorphisme

$$H^i(Y',G\otimes O_Y/J^n)\rightarrow H^i(X',f^{*}(G)\otimes O_X/I^n)$$

et par passage à la limite projective, un homomorphisme

$$H^i(Y/Y',G)\rightarrow H^i(X/X',f^{*}(G))$$

On a de même un homomorphisme $H^i(Y',G_{/Y'})\rightarrow$ $\rightarrow H^i(X',\hat{f}^{*}(G_{/Y'}))$ (loc.cit.), et il résulte des définitions que pour les homomorphismes ψ_i définis dans (2), les diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^i(Y',G_{/Y'}) & \xrightarrow{\psi_i} & H^i(Y/Y',G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^i(X',\hat{f}^{*}(G_{/Y'})) & \xrightarrow[\psi_i]{} & H^i(X/X',f^{*}(G)) \end{array}$$

sont commutatifs. On peut donc dire que les ψ_i sont des homomorphismes fonctoriels pour les triplets (F,X,X').

Proposition 5.- *Pour tout O_X-Module cohérent F, le noyau de l'homomorphisme canonique i : $\Gamma(X,F)\rightarrow\Gamma(X',F_{/X'})$ est formé des sections nulles dans un voisinage de X'.*

Il est évident d'après (1) que l'image canonique d'une telle section est nulle. Réciproquement, si $i(s)=0$, il suffit de voir que tout point $x\in X'$ admet un voisinage dans X dans lequel s est nulle, et on peut donc se ramener au cas où $X=\mathrm{Spec}(A)$ est affine, $X'=V(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, et $F=\tilde{M}$, M étant un A-module de type fini. Alor $\Gamma(X',F_{/X'})$ est le complété $\hat{M}$ de M pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique, et i l'homomorphisme canonique $M \to \hat{M}$. On sait que le noyau de cet homomorphisme est l'ensemble des $z \in M$ annulés par un élément de $1+\underline{a}$ (Bourbaki, Alg. comm.,). On a donc $(1+f)s=0$ avec $f \in \underline{a}$; pour tout $x \in X'$ on en déduit $(1+f_x)s_x=0$ et comme $1+f_x$ est inversible dans O_x, $s_x=0$, d'où la proposition.

Corollaire 1 .- Soit $u : \underline{F} \to \underline{G}$ un homomorphisme de O_X-Modules cohérents. Pour que $u_{/X'} : \underline{F}_{/X'} \to \underline{G}_{/X'}$ soit nul, il faut et il suffit que u soit nul dans un voisinage de X'.

Tenant compte de ce que le foncteur $\underline{F}_{/X'}$ est exact (prop.1), il suffit d'appliquer la prop.5 au faisceau Im u.

Corollaire 2 .- Soient X, Y deux S-préschémas noethériens, Y étant de type fini sur S. Soient f, g, deux S-morphismes de X dans Y tels que $f(X') \subset Y'$, $g(X') \subset Y'$. Pour que $\hat{f}=\hat{g}$, il faut et il suffit que f et g coïncident dans un voisinage de X'.

La condition est évidemment suffisante (sans condition de finitude pour Y). Pour voir qu'elle est nécessaire, remarquons d'abord que par définition on a $f(x)=g(x)$ pour tout $x \in X'$. D'autre part, la question étant locale, on peut supposer que X et Y sont des voisinages affines respectifs de x et de $y=f(x)=g(x)$. Alors f et g correspondent à deux $\Gamma(S,O_S)$-homomorphismes de $\Gamma(Y,O_Y)$ dans $\Gamma(X,O_X)$, soient ρ et σ, et par hypothèse, pour toute section $s \in \Gamma(Y,O_Y)$, les images canoniques de $\rho(s)$ et $\sigma(s)$ dans $\Gamma(X',(O_X)_{/X'})$ sont les mêmes ; par la prop.5 on en conclut que $\rho(s)$ et $\sigma(s)$ coïncident dans un voisinage de X', et par suite les deux homomorphismes de O_y dans O_x déduits de f et de g coïncident. On en conclut (I,4,3,prop.15) que f et g coïncident dans un voisinage de x, d'où le corollaire.

Proposition 6 .- Soient X un préschéma noethérien, X' une partie fermée de X, $\underline{F}$ un O_X-Module cohérent. Alors l'homomorphisme canonique $\psi_i : H^i(X',\underline{F}_{/X'}) \to H^i(X/X',\underline{F}) = \varprojlim H^i(X',\underline{F} \otimes O_X/\underline{J}^n)$ est sur-

jectif pour tout i . Si en outre , pour une valeur de i , le système projectif $(H^{i-1}(X',\underline{F}\otimes O_X/\underline{J}^n))_{n\in\underline{N}}$ *vérifie la condition* (ML) (chap.0, compléments) , *alors* ψ_i *est bijectif* .

Il suffit de voir qu'on est dans les conditions d'application de la prop.2 de chap.0, compléments , en prenant pour $\underline{B}$ une base de la topologie de X formée d'ouverts affines . Comme $O_X/\underline{J}^n \to O_X/\underline{J}^m$ est surjectif pour $m\leq n$, la condition (iii) est vérifiée . Pour tout ouvert affine U de X , on a $H^i(U,\underline{F}\otimes O_X/\underline{J}^n)=0$ pour $i>0$ (§ 1,n°3,th.1) , donc la condition (ii) est trivialement vérifiée ; il en est de même de la condition (i) pour $i>0$; enfin , pour $i=0$, $H^0(U,\underline{F}\otimes O_X/\underline{J}^n)=$ $=\Gamma(U,\underline{F}\otimes O_X/\underline{J}^n)$, et les homomorphismes $\Gamma(U,\underline{F}\otimes O_X/\underline{J}^n)\to\Gamma(U,\underline{F}\otimes O_X/\underline{J}^m)$ sont surjectifs pour $m\leq n$ et tout ouvert affine U (I,1,3,cor.5 du th.1), et par suite la condition (ML) est vérifiée ; cela achève la démonstration .

Corollaire 1 .- Si X *est un schéma affine noethérien , on a* $H^i(X',\underline{F}_{/X'})=0$ *pour* $i>0$, *pour tout* O_X*-Module cohérent* $\underline{F}$ *et toute partie fermée* X' *de* X .

Dans la démonstration de la prop.6 , on a vu que le système projectif $(H^i(X',\underline{F}\otimes O_X/\underline{J}^n))_{n\in\underline{N}}$ vérifie alors la condition (ML) pour tout $i\geqslant 0$; la prop.6 entraîne alors le corollaire , compte tenu du § 1,n°3,th.1 .

Corollaire 2 .- Supposons que pour tout n , $\Gamma(X',O_X/\underline{J}^n)$ *soit un anneau artinien : alors les homomorphismes* ψ_i *sont des isomorphismes pour tout i* .

En effet $\Gamma(X',\underline{F}\otimes O_X/\underline{J}^n)$ est un module de type fini sur $\Gamma(X',O_X/\underline{J}^n)$ (car si (U_i) est un recouvrement ouvert fini de X tel que pour tout i , $\Gamma(U_i,\underline{F}\otimes O_X/\underline{J}^n)$ soit de type fini sur $\Gamma(U_i,O_X/\underline{J}^n)$, $\Gamma(X,\underline{F}\otimes O_X/\underline{J}^n)$ est isomorphe en tant que $\Gamma(X,O_X/\underline{J}^n)$-module , à un sous-module du produit des $\Gamma(U_i,\underline{F}\otimes O_X/\underline{J}^n)$) .

Comme X est un schéma, la cohomologie $H^*(X,\underline{G})$ d'un faisceau quasi-cohérent quelconque $\underline{G}$ est égale à la cohomologie $H^*(\underline{U},\underline{G})$ pour un recouvrement fini $\underline{U}$ par des ouverts affines (§ 1, n°4, prop. 3), d'où résulte que les $H^i(X',\underline{F}\otimes \underline{O}_X/\underline{J}^n)$ sont des modules <u>de type fini</u> sur l'anneau $\Gamma(X',\underline{O}_X/\underline{J}^n)$. Ce dernier étant artinien, on sait (chap. 0, compl.) que les systèmes projectifs $(H^i(X',\underline{F}\otimes O_X/\underline{J}^n))_{n\in \underline{N}}$ vérifient la condition (ML) pour tout i, d'où le corollaire.

On notera que ce corollaire s'applique par exemple lorsque le sous-préschéma $(X',\underline{O}_X/\underline{J}^n)$ (pour tout n) est <u>complet</u> (n°2,   ).

<u>4. Le théorème fondamental des morphismes propres : énoncé et corollaires.</u>

Soient X, Y deux préschémas noethériens, $f : X\to Y$ un morphisme <u>propre</u>, Y' une partie fermée de Y, X' son image réciproque $f^{-1}(Y')$. Pour tout $\underline{O}_X$-Module cohérent $\underline{F}$, nous allons considérer sur Y' (pour tout $p\geq 0$), muni du faisceau d'anneaux $(O_Y)_{/Y'}$, les faisceaux suivants :

1° $R^p\hat{f}_*(\underline{F}_{/X'})$, $\hat{f}$ étant le morphisme $(X',(O_X)_{/X'})\to(Y',(O_Y)_{/Y'})$ défini au n°3.

2° Le complété $(R^pf_*(\underline{F}))_{/Y'}$ de $R^pf_*(\underline{F})$, ce dernier étant un O_Y-Module <u>cohérent</u>, en vertu du n°1, th. 1.

3° Si $\underline{J}$ est un faisceau cohérent d'idéaux dans O_Y tel que $\mathrm{supp}(O_Y/\underline{J})=Y'$, on sait (II, 1, 1, cor. de la prop. 2) que $\underline{I}=f^*(\underline{J})$ est un faisceau cohérent d'idéaux dans O_X tel que $\mathrm{supp}(O_X/\underline{I})=X'$ et que $\underline{I}^n=f^*(\underline{J}^n)$ et $O_X/\underline{I}^n=f^*(O_Y/\underline{J}^n)$; par suite $\underline{F}\otimes_{O_X}(O_X/\underline{I}^n)=\underline{F}\otimes_{O_Y}(O_Y/\underline{J}^n)$. Les faisceaux $R^pf_*(\underline{F}\otimes_{O_Y}(O_Y/\underline{J}^n))$ ($n\in\underline{N}$) forment un système projectif de O_Y-Modules <u>cohérents</u> (n°1, th. 1). Nous noterons la limite projective de ce système $R^pf_{X/X'}(\underline{F})$.

Si V est une partie ouverte affine de Y, le module des sections de $R^pf_*(\underline{F})$ au-dessus de V est $H^p(f^{-1}(V),\underline{F})$

(§ 1,n°4,cor. de la prop.4) . Le faisceau $(R^pf_*(\underline{F}))_{/Y'}$ est donc associé au préfaisceau $V \to \varprojlim_n (H^p(f^{-1}(V),\underline{F}) \otimes \Gamma(V,O_Y/\underline{J}^n))$, le produit tensoriel étant pris sur $\Gamma(V,O_Y)$ (I,1,3,cor.6 du th.9) . De même, le faisceau $R^pf_{X/X'}(\underline{F})$ est associé au préfaisceau $V \to \varprojlim_n H^p(f^{-1}(V),\underline{F}\otimes_{O_Y}(O_Y/\underline{J}^n))$ (ce qui montre déjà que son support est bien contenu dans Y') . Enfin , on sait que $R^p\hat{f}_*(\underline{F}_{/X'})$ est associé par définition au préfaisceau $V\cap Y' \to H^p(f^{-1}(V)\cap X',\underline{F}_{/X'})$. Cela étant , on a pour chaque $p \geqslant 0$, deux homomorphismes

$$(D_V) \qquad \begin{tikzcd} \varprojlim_n H^p(f^{-1}(V),\underline{F}\otimes O_Y/\underline{J}^n) & H^p(f^{-1}(V)\cap X',\underline{F}_{/X'}) \arrow[l, "\psi_p^V"'] \\ \varprojlim_n (H^p(f^{-1}(V),\underline{F})\otimes\Gamma(V,O_Y/\underline{J}^n)) \arrow[u, "\varphi_p^V"] & \end{tikzcd}$$

où ψ_p^V a été défini au n°3 , formule (2) , et φ_p^V est l'homomorphisme obtenu par passage à la limite projective , à partir des homomorphismes $H^p(f^{-1}(V),\underline{F}) \to H^p(f^{-1}(V),\underline{F}\otimes O_Y/\underline{J}^n)$, eux-mêmes déduits des homomorphismes $\underline{F} \to \underline{F}\otimes O_Y/\underline{J}^n$.

On vérifie aussitôt que les homomorphismes φ_p^V et ψ_p^V sont compatibles avec les opérations de restriction , et définissent donc deux homomorphismes de $(O_Y)_{/Y'}$-Modules :

$$(D) \qquad \begin{tikzcd} R^pf_{X/X'}(\underline{F}) & R^p\hat{f}_*(\underline{F}_{/X'}) \arrow[l, "\psi_p"'] \\ (R^pf_*(\underline{F}))_{/Y'} \arrow[u, "\varphi_p"] & \end{tikzcd}$$

On notera encore que le système des $(R^pf_*(\underline{F}))_{/Y'}$ est un <u>foncteur cohomologique</u> (T,II,2.1) en $\underline{F}$, en vertu de la prop.1 du n°3 ; il en est de même du système des $R^p\hat{f}_*(\underline{F}_{/X'})$ (n°3,cor.2 de la prop.1) ; enfin (n°3,prop.2) le système des $R^pf_{X/X'}(\underline{F})$ est un ∂-foncteur , qui deviendra un foncteur cohomologique lorsque nous aurons prouvé qu'il est <u>exact</u> . Les mêmes remarques s'appliquent aux systèmes de modules des diagrammes (D_V) ; enfin , il est immédiat que les φ_p^V et ψ_p^V forment des systèmes d'homomorphismes compatibles avec les opérateurs cobords ~~[illegible]~~ , autrement dit , sont des morphismes de ∂-foncteurs (T,II,2.1) ; il en est donc de même de φ_p et ψ_p .

Théorème 2 (théorème fondamental des morphismes propres) .- *Soient* $f : X \to Y$ *un morphisme propre de préschémas noethériens* , Y' *une partie fermée de* Y , $X'=f^{-1}(Y')$. *Alors , pour tout* ~~[illegible]~~ O_X-*Module cohérent* F , *les* $R^pf_*(F)$ *sont des* O_Y-*Modules cohérents , et les homomorphismes* φ_p *et* ψ_p *du diagramme* (D) *sont des isomorphismes* .

Faisant en particulier p=0 , on trouve l'énoncé suivant , généralisation naturelle du théorème fondamental des "fonctions holomorphes de Zariski" :

Corollaire 1 .- Avec les notations du th.2 , le groupe des sections formelles de $f_*(F)$ *le long de* Y' *est canoniquement isomorphe au groupe des sections formelles de* F *le long de* X' .

En particulier , prenant $F=O_X$ (qui est le cas considéré par Zariski)

Corollaire 2 .- L'homomorphisme $A(Y/Y') \to A(X/X')$ *déduit du morphisme* $\hat{f} : (X',(O_X)_{/X'}) \to (Y',(O_Y)_{/Y'})$ *est un isomorphisme lorsque* $f_*(O_X)=O_Y$.

Nous développerons au § 4 certaines conséquences importantes de ce dernier corollaire , généralisant des résultats classiques dûs à Zariski . On notera que , dans les conditions du cor.2 , l'isomorphisme du cor.1 est un isomorphisme de modules sur $A(Y/Y')=A(X/X')$.

Nous démontrerons en fait un résultat en apparence plus fort que le th.2 , savoir :

Corollaire 3 .- Sous les hypothèses du th.2 , pour tout ouvert affine V *de* Y , *les homomorphismes* φ_p^V *et* ψ_p^V *du diagramme* (D_V) *sont des isomorphismes* .

Mais en fait , ce corollaire est équivalent au th.2 . En effet , il suffit de déduire de ce dernier le

Archives Grothendieck - sept 89

Corollaire 4 .- Sous les conditions du th.2 , le préfaisceau $V\cap Y' \to H^p(f^{-1}(V)\cap X', \underline{F}_{/X'})$ est identique à son faisceau associé $R^p\hat{f}_*(\underline{F}_{/X'})$.

Nous déduirons ce dernier d'un autre corollaire du th.2 :

Corollaire 5 .- Sous les conditions du th.2 , le foncteur cohomologique $H^*(X', \underline{F}_{/X'})$ est l'aboutissement d'un foncteur spectral cohomologique dont le terme E_2 est

$$E_2^{pq} = H^p(Y', (R^q f_*(\underline{F}))_{/Y'}) .$$

En effet , la suite spectrale de Leray pour le morphisme $\hat{f} : X' \to Y'$ et le faisceau $\underline{F}_{/X'}$ a un terme $E_2^{pq} = H^p(Y', R^q\hat{f}_*(\underline{F}_{/X'}))$ et un aboutissement $H^*(X', \underline{F}_{/X'})$ (G, II, 4.17.1) , et il suffit d'utiliser l'isomorphisme fonctoriel $R^q\hat{f}_*(\underline{F}_{/X'}) \xrightarrow{\sim} (R^q f_*(\underline{F}))_{/Y'}$ défini dans le th.2 .

Pour démontrer alors le cor.4 ; il suffit de remarquer que l'on a $H^p(V\cap Y', (R^q f_*(\underline{F}))_{/Y'})=0$ pour tout $p>0$ et tout $q\geq 0$, en vertu du cor.1 de la prop.6 du n°3 , les $R^q f_*(\underline{F})$ étant cohérents (n°1, th.1) . Alors on sait que $H^q(f^{-1}(V)\cap X', \underline{F}_{/X'}) = \Gamma(V, (R^q f_*(\underline{F}))_{/Y'}) = \Gamma(V, R^q\hat{f}_*(\underline{F}_{/X'}))$ (G, II, 4.4.1 appliqué avec $q(n)=n$).

Un cas particulier important du th.2 est celui où Y' est réduit à un point (fermé) y : on obtient alors l'expression des complétés , pour la topologie $\underline{m}_y$-adique , des $\underline{O}_y$-modules de type fini $(R^p f_*(\underline{F}))_y$
Plus généralement , sans supposer le point $y\in Y$ fermé :

Corollaire 6 .- Soient Y un préschéma localement noethérien , f : $X\to Y$ un morphisme propre , $\underline{F}$ un O_X-Module cohérent . Alors les O_Y-Modules $R^p f_*(\underline{F})$ sont cohérents , et pour tout $y\in Y$, on a un isomorphisme canonique de ∂-foncteurs

$$\varprojlim_n (R^p f_*(\underline{F}))\otimes(O_y/\underline{m}_y^n) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n H^p(f^{-1}(y), \underline{F}\otimes(O_y/\underline{m}_y^n))$$

où la fibre $f^{-1}(y)$ est considérée comme espace de base du préschéma $X\otimes_Y \mathrm{Spec}(O_y/\underline{m}^n)$ (I, 2, 7, prop. 17).

Comme on l'a déjà remarqué, lorsque Y est noethérien et $\{y\}$ est fermé, ce corollaire est un cas particulier du th.2. Dans le cas général, posons $Y_1 = \mathrm{Spec}(O_y)$, $X_1 = X \times_Y Y_1$, $\underline{F}_1 = \underline{F} \otimes_{O_Y} O_{Y_1}$, et soit f_1 le morphisme $f \times 1 : X_1 \to Y_1$; Y_1 est noethérien et f_1 est propre (II,5,1,prop. 2) et $\underline{F}_1$ est cohérent (II,1,1,remarque suivant la déf.1). Soit y_1 l'unique point fermé de Y_1 ; le th. s'applique à $f_1, \underline{F}_1$ et y_1 ; on a $O_{y_1} = O_y$, $f_1^{-1}(y_1) = f^{-1}(y)$, les préschémas $X \times_Y \mathrm{Spec}(O_y/\underline{m}_y^n)$ et $X_1 \times_{Y_1} \mathrm{Spec}(O_y/\underline{m}_y^n)$ étant identifiés canoniquement (I,2,5,formule (1)), et $\underline{F}_1 \otimes_{O_{Y_1}} (O_y/\underline{m}_y^n)$ s'identifie à $\underline{F} \otimes_{O_Y} (O_y/\underline{m}_y^n)$ (II,1,1,prop.5). Il reste donc à voir que $R^p f_{1*}(\underline{F}_1)$ est canoniquement isomorphe à $R^p f_*(\underline{F}) \otimes_{O_Y} O_{Y_1}$, ce qui résulte du § 1,n°4,prop.5.

Notons aussi le corollaire suivant, qui sera obtenu au § par une méthode plus élémentaire (n'utilisant que le th. de finitude au lieu du th.2) :

Corollaire 7.- *Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \to Y$ un morphisme propre, y un point de Y, r la dimension de $f^{-1}(y)$; Alors, pour tout O_X-Module cohérent $\underline{F}$, les faisceaux $R^p f_*(\underline{F})$ sont nuls au voisinage de y pour tout $p > r$.*

En effet, on a alors $H^p(f^{-1}(y), \underline{F} \otimes (O_y/\underline{m}_y^n)) = 0$ (G,II,4.15.2) pour tout n, donc (cor.6) le complété du O_y-module $(R^p f_*(\underline{F}))_y$ pour la topologie $\underline{m}_y$-adique est nul, et a fortiori $(R^p f_*(\underline{F}))_y = 0$. Le faisceau $R^p f_*(\underline{F})$ étant cohérent (n°1, th.1), on en conclut le corollaire.

Corollaire 8.- *Soient $Y = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau noethérien, $f : X \to Y$ un morphisme propre. Soit $\underline{m}$ un idéal* faisceau $\varprojlim_k \underline{F}_k$, où $\underline{F}_k = \underline{F} \otimes_A (A/\underline{m}^k)$. Si $\underline{F}$ et $\underline{G}$ sont deux O_X-Modules cohérents, désignons par $\overline{\mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(\underline{F},\underline{G})}$ le complété m-adique du A-module $\mathrm{Hom}_{\underline{O}_X}(\underline{F},\underline{G})$; on a un isomorphisme canonique

$$(4) \qquad \overline{\mathrm{Hom}_{O_X}(\underline{F},\underline{G})} \simeq \mathrm{Hom}_{\overline{O}_X}(\overline{\underline{F}},\overline{\underline{G}}) = \varprojlim_k \mathrm{Hom}_{(O_X)_k}(\underline{F}_k,\underline{G}_k) \ .$$

En effet, le faisceau $\underline{L} = \underline{\mathrm{Hom}}_{O_X}(\underline{F},\underline{G})$ est cohérent (II,1,1,prop.3) et on a $\Gamma(X,\underline{L}) = \mathrm{Hom}_{O_X}(\underline{F},\underline{G})$ (FAC,I,2,14,prop.5). En vertu du cor.3, appliqué pour p=0 et V=Y, on a un isomorphisme canonique $\overline{\Gamma(X,\underline{L})} \simeq \varprojlim_k \Gamma(X,\underline{L}_k) = \Gamma(X,\overline{\underline{L}})$. Or, pour tout faisceau cohérent $\underline{F}$ sur X, $\overline{\underline{F}}$ n'est autre que $\underline{F}_{/X'}$, où $X' = f^{-1}(Y')$, comme il résulte des définitions, et on a $\underline{L}_{/X'} = \underline{\mathrm{Hom}}_{(O_X)_{/X'}}(\underline{F}_{/X'},\underline{G}_{/X'})$ (n°3, prop.3), donc $\Gamma(X,\overline{\underline{L}}) = \mathrm{Hom}_{\overline{O}_X}(\overline{\underline{F}},\overline{\underline{G}})$. On sait d'autre part que si B est une A-algèbre de type fini, M, N des B-modules de type fini, $\overline{B},\overline{M},\overline{N}$ les complétés m-adiques de B, M, N, on a $\mathrm{Hom}_{\overline{B}}(\overline{M},\overline{N}) = \varprojlim_k (\mathrm{Hom}_{B_k}(M_k,N_k))$, où $B_k = B \otimes_A (A/\underline{m}^k)$, $M_k = M \otimes_A (A/\underline{m}^k)$ et $N_k = N \otimes_A (A/\underline{m}^k)$ (Bourbaki, Alg. comm) d'où la dernière relation (4).

Corollaire 9.- Les hypothèses étant celles du cor.6, désignons par $\underline{F}_n$ le faisceau $\underline{F} \otimes (O_y/\underline{m}_y^n)$ sur $f^{-1}(y)$. Alors, si $\overline{\mathrm{Hom}_{O_X}(\underline{F},\underline{G})}$ désigne le complété $\underline{m}_y$-adique de $\mathrm{Hom}_{O_X}(\underline{F},\underline{G})$, on a un isomorphisme canonique

$$(5) \qquad \overline{\mathrm{Hom}_{O_X}(\underline{F},\underline{G})} \simeq \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{(O_X)_n}(\underline{F}_n,\underline{G}_n) \ .$$

Comme dans la démonstration du cor.6, on se ramène au cas où le point y est fermé, et le résultat est alors un cas particulier du cor.8 (car on peut évidemment supposer Y affine).

Remarques.- La partie la plus importante du th.2 est le fait que φ_p est un isomorphisme, ce qui peut s'exprimer sans introduire explicitement la cohomologie formelle, et est de nature locale sur Y. Mais pour en déduire le résultat plus fort contenu dans le cor.5, (qui est global à la fois en X et Y) , il faut avoir su interpréter les deux membres ~~XXXX~~ isomorphes par φ_p comme étant $R^p\hat{f}_*(\underline{F}_{/X'})$. D'ailleurs , comme on ne sait pas a priori si $R^p f_{X/X'}(\underline{F})$ est un ∂-foncteur exact en $\underline{F}$, il semble qu'il faille commencer par démontrer que ψ_p est un isomorphisme . On notera enfin qu'on a énoncé à nouveau le th.1 du n°1 dans l'énoncé du th.2 , car il semble qu'il n'y ait pas d'exemple d'application du th.2 où on ne se serve aussi du th.1 .

5 . Démonstration du théorème fondamental : résultats préliminaires.

Théorème 3 .- Soient Y un préschéma noethérien , $\underline{S}$ une $\underline{O}_Y$-Algèbre quasi-cohérente graduée à degrés positifs , engendrée par $\underline{S}_1$, ce dernier étant un $\underline{O}_Y$-Module cohérent . Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre , $\underline{S}' = \underline{S} \otimes_Y \underline{O}_X = f^*(\underline{S})$, $\underline{M} = \bigoplus_k \underline{M}_k$ un $\underline{S}'$-Module gradué , quasi-cohérent et de type fini sur $\underline{S}'$. Soit enfin $Y' = \mathrm{Proj}(\underline{S})$, et soit $g : Y' \to Y$ le morphisme structural correspondant . Alors :

(i) Il existe un entier h et , pour tout $p \in \underline{Z}$, un $O_{Y'}$-Module cohérent $\underline{G}_p$ (unique à un isomorphisme près), tel que la relation $k \geq h$ implique que

(6) $$R^p f_*(\underline{M}_k) \simeq g_*(\underline{G}_p(k))$$

ces isomorphismes étant compatibles avec les structures de $\underline{S}$-Modules

(ii) Supposons en outre que $X = \mathrm{Proj}(\underline{T})$, où $\underline{T}$ est une O_Y-Algèbre quasi cohérente graduée à degrés positifs , engendrée par $\underline{T}_1$, ce dernier étant un O_Y-Module cohérent . Alors il existe un entier n_o tel que pour tout $n \geq n_o$, on ait

(7) $$R^p f_*(\underline{M}_k(n)) = 0 \quad \text{pour tout } p > 0 \text{ et tout } k \text{ ,}$$

et que l'homomorphisme canonique $f^*(f_*(\underline{M}_k(n))) \to \underline{M}_k(n)$ soit surjectif pour tout k .

Soit $X' = \mathrm{Proj}(\underline{S}') = X \times_Y Y'$ (II, 4, 4, prop. 14) , de sorte que l'on a le diagramme commutatif
$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xleftarrow[g]{} & Y' \end{array}$$

et $O_{X'}(n) = O_X \otimes_Y O_{Y'}(n)$ (loc. cit.) . En vertu du § 2, n°2, cor. 3 du th. 1, si on pose $\underline{F}=\widetilde{\underline{M}}$, $\underline{F}$ est un $O_{X'}$-module cohérent et il existe un entier $h\geqslant 0$ tel que pour $k\geqslant h$, on ait

(8) $$\underline{M}_k=g'_*(\underline{F}(k))$$

et en outre

(9) $$R^p g'_*(\underline{F}(k))=0 \quad \text{pour } p>0$$

en vertu du § 2, n°2, th. 1 .

Nous utiliserons le lemme élémentaire suivant :

<u>Lemme 2 .- Soient</u> Z, Z' <u>deux espaces annelés</u> , $u : Z'\rightarrow Z$ <u>un morphisme</u> <u>$\underline{E}$ un O_Z-module localement libre de type fini</u> , $\underline{N}$ <u>un $O_{Z'}$-module . Pour tout</u> $p\geqslant 0$, <u>on a un isomorphisme canonique fonctoriel en $\underline{N}$</u>

(10) $$\underline{E}\otimes_{O_Z} R^p u_*(\underline{N}) \simeq R^p u_*(u^*(\underline{E})\otimes_{O_{Z'}}\underline{N}) \quad .$$

On peut en effet définir un homomorphisme du premier membre de (10) dans le second sans hypothèse sur $\underline{E}$; pour tout ouvert $U\subset Z$, on définit un homomorphisme

(11) $$\Gamma(U,\underline{E})\otimes H^p(u^{-1}(U),\underline{N}) \rightarrow H^p(u^{-1}(U),u^*(\underline{E})\otimes \underline{N})$$

en considérant la résolution simpliciale canonique $\underline{F}^*(\underline{N})$ de $\underline{N}$ (G, II, 6.4) ; il est clair en effet que l'on a un homomorphisme canonique

$$\Gamma(U,\underline{E})\otimes \Gamma(u^{-1}(U),\underline{F}^p(\underline{N})) \longrightarrow \Gamma(u^{-1}(U),\underline{F}^p(u^*(\underline{E})\otimes\underline{N}))$$

d'où on déduit l'homomorphisme (11) , et ces homomorphismes sont compatibles avec les opérations de restriction , d'où l'homomorphisme (10) . Si maintenant $\underline{E}$ est localement libre de type fini , on peut se restreindre aux U tels que $\underline{E}|U$ soit isomorphe à $O_Z^n|U$, et comme la cohomologie commute aux sommes directes finies , on est ramené au cas où $\underline{E}=O_Z$; comme alors $u^*(\underline{E})=O_{Z'}$, les deux membres de (10) sont identifiés canoniquement par l'homomorphisme qui vient d'être défini .

Revenant à la démonstration du th. 3 , le lemme 2 montre que , pour tout O_X-module cohérent localement libre $\underline{E}$, on a

(12) $$\underline{E}\otimes_{O_X}\underline{M}_k=g'_*(\underline{E}\otimes_{O_{X'}}\underline{F}(k))$$

(13) $$R^p g'_*(\underline{E}\otimes_{O_{X'}}\underline{F}(k))=0 \qquad \text{pour } p>0 \ ,$$

dès que $k\geq h$. ~~XXXXX~~ appliquons la suite spectrale de Leray au foncteur composé $f_*g'_*$; $R^*(f\circ g')_*(\underline{E}\otimes_{O_{X'}}\underline{F}(k))$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de terme $E_2^{pq}=R^pf_*(R^qg'_*(\underline{E}\otimes_{O_{X'}}\underline{F}(k)))$; comme $E_2^{pq}=0$ pour $q>0$ d'après (13), on a donc un isomorphisme canonique (G,I,4.4.1)

(14) $$R^pf_*(\underline{E}\otimes_{O_X}\underline{M}_k)\cong R^p(f\circ g')_*(\underline{E}\otimes_{O_{X'}}\underline{F}(k)) \qquad (k \quad h) \ .$$

Mais on a $f\circ g'=g\circ f'$, et la suite spectrale de Leray appliquée au foncteur composé $g_*f'_*$ montre donc que ~~XXXXXXXXXXXXXX~~, pour $k\geq h$, $R^*f_*(\underline{E}\otimes_{O_X}\underline{M}_k)$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de terme $E_2^{pq}=R^pg_*(R^qf'_*(\underline{E}\otimes_{O_{X'}}\underline{F}(k)))$. D'ailleurs $\underline{F}(k)=\underline{F}\otimes_{O_{X'}}O_{X'}(k)=$ $=(\underline{F}\otimes_{O_{X'}}O_X)\otimes_{O_{Y'}}O_{Y'}(k)=$ ~~XXXX~~ $\underline{F}\otimes_{O_{Y'}}O_{Y'}(k)$, et par suite $\underline{E}\otimes_{O_{X'}}\underline{F}(k)=$ $=(\underline{E}\otimes_{O_{X'}}\underline{F})\otimes_{O_{X'}}O_{Y'}(k)$; le lemme 2 appliqué à f' et au $O_{Y'}$-module localement libre $O_{Y'}(k)$ montre que $R^qf'_*(\underline{E}\otimes_{O_{X'}}\underline{F}(k))=(R^qf'_*(\underline{E}\otimes_{O_{X'}}\underline{F}))(k)$. En outre, les $R^qf'_*(\underline{E}\otimes_{O_{X'}}\underline{F})$ sont cohérents (n°1, th.1) puisque f' est propre (II,5,1,prop.2).

Prenons en particulier $\underline{E}=O_X$, d'où $\underline{E}\otimes_{O_{X'}}\underline{F}=\underline{F}$, et posons $\underline{G}_q=R^qf'_*(\underline{F})$. On peut alors supposer h_q assez grand pour que, dès que $k\geq h_q$, on ait $R^pg_*(\underline{G}_q(k))=0$ pour tout $p>0$ (§ 2, n°2, th.1) ; d'autre part, il existe N tel que $\underline{G}_q=0$ pour tout $q\geq N$ (§ 1, n°4, prop.4) ; si on prend ~~pour~~ h ~~le~~ supérieur au plus grand des h_q tels que $q<N$, on aura donc

$$\cancel{XXXX} \quad R^pg_*(R^qf'_*(\underline{F}(k)))=0 \ \text{pour } p>0, q\geq 0 \text{ et } k\geq h \ .$$

D'après (G,I,4.4.1), appliqué pour $q(n)=n$), on a donc bien un isomorphisme canonique

$$\cancel{(XX)} \qquad R^pf_*(\underline{M}_k)\cong g_*(\underline{G}_p(k))$$

pour tout $p \quad 0$ et tout $k \quad h$, ce qui prouve (i).

~~XXX~~ la relation (6). L'unicité des $\underline{G}_p$ à un isomorphisme près résulte de ce que l'on a un isomorphisme canonique $\beta^{-1}: \underline{G}\to\tilde{\underline{N}}$, où $\underline{N}=\bigoplus_{k\in \underline{Z}} g_*(\underline{G}(k))$ (II,4,3,th.1) pour tout $O_{Y'}$-module cohérent $\underline{G}$; utilisant le fait que le foncteur $\tilde{\underline{N}}$ est exact (II,4,2,prop.7), on a aussi $\tilde{\underline{N}}=\tilde{\underline{N}}'$, où $N'=\bigoplus_{k\geq h} g_*(\underline{G}(k))$ pour tout h ; il suffit d'appliquer cette remarque aux $\underline{G}_p$ en tenant compte de (6) .

Prouvons maintenant (ii) ; la question étant locale sur Y , on peut supposer Y affine d'anneau A noethérien . Pour chaque k <u>fixé</u> , (ii) est valable pour tout $n \geqslant n_k$ (§ 2,n°2,th.1) ; on peut se borner à ne considérer que les $k \geqslant h$ et à montrer que les n_k pour $k \geqslant h$ sont <u>bornés</u> . Appliquant alors (14) à $\underline{E}=O_X(n)$, on est d'une part ramené à prouver que si l'on pose $\underline{F}(n,k)=\underline{F}\otimes_{O_{X'}}O_{X'}(n,k)$, où $O_{X'}(n,k)=O_X(n)\otimes_{O_Y}O_{Y'}(k)$, on a $R^p(f\circ g')_*(\underline{F}(n,k))=0$ pour tout $p>0$, dès que $n \geqslant n_0$ et $k \geqslant h$. D'autre part , pour prouver que $f^*(f_*(\underline{M}_k(n)))\to \underline{M}_k(n)$ est surjectif , il suffit de prouver que

$$g'^*(f^*(f_*(\underline{M}_k(n))))\to g'^*(\underline{M}_k(n))$$

est surjectif , puisque g'^* est exact à droite ; comme d'après (14), et en utilisant le lemme 2, $f_*(\underline{M}_k(n))=f_*(g'_*(\underline{F}(n,k)))$, on voit , en posant $u=f\circ g'$, qu'on est ramené à prouver que $u^*(u_*(\underline{F}(n,k)))\to g'^*(g'_*(\underline{F}(n,k)))$ est surjectif pour $n \geqslant n_0$ et $k \geqslant h$; il suffira (chap.0,§ 2,n°) de montrer que $\underline{F}(n,k)$ est <u>engendré par ses sections</u>. D'ailleurs on sait que X (resp. Y') peut s'identifier à un sous-préschéma fermé de $\underline{P}_A^r$ (resp. $\underline{P}_A^s$) (II,4,6,prop.21) ; X' s'identifie donc à un sous-préschéma fermé de $\underline{P}_A^r \times_A \underline{P}_A^s$ (I,2,2,prop.5) ; en outre , si j_1 (resp. j_2) est l'injection canonique de X (resp. Y') dans $P_1=\underline{P}_A^r$ (resp. $P_2=\underline{P}_A^s$) on a $O_X(n)=j_1^*(O_{P_1}(n))$, $O_{Y'}(k)=j_2^*(O_{P_2}(k))$ (II,4,4,cor.1 de la prop.15 et par suite $O_{X'}(n,k)=j^*(O_P(n,k))$, où j est l'injection canonique de X' dans $P=P_1\times_A P_2$ et $O_P(n,k)=O_{P_1}(n)\otimes_{O_Y}O_{P_2}(k)$; on a donc $j^*(F(n,k))=j^*(F)\otimes_{O_P}\mathcal{O}_P(n,k)$. Si f_0 et g'_0 sont les morphismes $P_1\to Y$ et $P\to P_1$, de sorte que $f=f_0\circ j_1$ et $j_1\circ g'=g'_0\circ j$, on a $f\circ g'=(f_0\circ g'_0)\circ j$. Pour démontrer que $R^p(f\circ g')_*(\underline{F}(n,k))=0$ pour $p>0$, il suffira donc de prouver que $R^p(f_0\circ g'_0)_*(j^*(\underline{F})(n,k))=0$ (G,II,4.9.1) , et de même pour montrer que $\underline{F}(n,k)$ est engendré par ses sections, il suffit de prouver que $j^*(\underline{F})(n,k)$ l'est. On est donc ramené à prouver le

Lemme 3. — Soient A *un anneau noethérien*, r, s *deux entiers* >0, $P=\underline{P}^r_A\times_A\underline{P}^s_A$. *Pour tout* O_P-*Module cohérent* $\underline{F}$, *il existe deux entiers* n_0, k_0 *tels que, pour* $n\geqslant n_0, k\geqslant k_0$:

(i) *on ait* $H^p(P,\underline{F}(n,k))=0$ *pour tout* $p>0$;

(ii) $\underline{F}(n,k)$ *soit engendré par ses sections*.

Prouvons d'abord (ii). Posons, comme ci-dessus, $P_1=\underline{P}^r_A$, $P_2=\underline{P}^s_A$; on peut identifier P au fibré projectif $\underline{P}^r_{P_2}$ (II, 4, 5, formule (15)), et aussi au fibré $\underline{P}^s_{P_1}$; on peut écrire $\underline{F}(n,k)=(\underline{F}(n))(k)$, où $\underline{F}(n)$ se rapporte à la seconde identification et $(\underline{F}(n))(k)$ à la première. Il existe un entier n_0 tel que pour $n\geqslant n_0$, $\underline{F}(n)$ soit isomorphe à un quotient (II, 3, 4, cor. 3 du th. 1) d'une somme directe de faisceaux isomorphes à O_P ; donc, pour n n_0 et pour tout k, $\underline{F}(n,k)$ est isomorphe à un quotient d'une somme directe de faisceaux isomorphes à $O_P(k)$. Mais par le même raisonnement (lorsque P est identifié à $\underline{P}^r_{P_2}$) on conclut qu'il existe k_0 tel que pour $k\geqslant k_0$, $O_P(k)$ soit isomorphe à un quotient d'une somme directe de faisceaux isomorphes à O_P, et finalement, pour $n\geqslant n_0$ et $k\geqslant k_0$, $\underline{F}(n,k)$ est isomorphe à un quotient d'une somme directe de faisceaux isomorphes à O_P, ce qui établit notre assertion.

Notons maintenant que l'on a $H^i(P,\underline{F})=0$ pour $i>r$ ou $i>s$ et pour tout O_P-Module cohérent $\underline{F}$ (§ 2, n° 2, th. 1 et § 1, n° 4, cor. de la prop. 4). Supposons démontré le lemme 3 (i) dans le cas particulier où $\underline{F}=O_P$; pour un F quelconque et pour n et k assez grands, prouvons alors que $H^p(P,\underline{F}(n,k)=0$ par récurrence descendante sur p. Comme $\underline{F}$ est isomorphe à un quotient d'une somme directe $\underline{G}$ d'un nombre fini de faisceaux $O_P(n_j,k_j)$, on a une suite exacte $0\to \underline{R}\to \underline{G}\to \underline{F}\to 0$, où $\underline{R}$ est cohérent ($\underline{F}$ et $\underline{G}$ l'étant) d'où une suite exacte

$$0\to \underline{R}(n,k)\to \underline{G}(n,k)\to \underline{F}(n,k)\to 0$$

quels que soient n et k dans $\underline{Z}$. La suite exacte de cohomologie donne alors une suite exacte

$$H^{i-1}(P,\underline{G}(n,k))\to H^{i-1}(P,\underline{F}(n,k))\to H^{i}(P,\underline{R}(n,k))$$

Par hypothèse de récurrence, il existe n_i' et k_i' tels que $H^i(P,\underline{R}(n,k))=0$ pour $n\geqslant n_i'$ et $k\geqslant k_i'$, et puisque (i) est supposé démontré pour $\underline{F}=O_P$, il existe aussi n_i'',k_i'' tels que $H^{i-1}(P,\underline{G}(n,k))=0$ pour $n\geqslant n_i''$, $k\geqslant k_i''$; d'où $H^{i-1}(P,\underline{F}(n,k))=0$ pour n $\sup(n_i',n_i'')$ et k $\sup(k_i',k_i'')$; la récurrence descendante étant finie , cela achèvera la démonstration .

Reste donc à prouver que $H^p(P,\underline{O}_P(n,k))=0$ pour tout $p>0$ dès que n et k sont assez grands. Considérons la projection v : $P\to \underline{P}^s_A$; la suite spectrale de Leray montre que la cohomologie $H^*(P,O_P(n,k))$ est l'aboutissement d'une suite spectrale dont le terme $E_2^{pq}=H^p(\underline{P}^s_A,R^qv_*(O_P(n,k)))$. On a d'autre part (lemme 2) $R^qv_*(O_P(n,k))=(R^qv_*(O_P(n)))(k)$ pour tout $q\geqslant 0$, et on est donc ramené à calculer $R^qv_*(O_P(n))$, ou , ce qui revient au même (§ 1,n°4,cor. de la prop.4) $H^q(v^{-1}(U),O_P(n))$ pour tout ouvert affine U de $\underline{P}^s_A$. Mais (en considérant comme ci-dessus P comme fibré projectif sur $\underline{P}^s_A$) , on sait (§ 2,n°1,prop.6) que ces groupes sont nuls pour $n\geqslant 0$ et $q>0$, d'où $R^qv_*(O_P(n,k))=0$ pour $n\geqslant 0,k\geqslant 0$ et $q>0$, donc (G,I,4.4.1), $H^p(P,O_P(n,k))=H^p(\underline{P}^s_A,v_*(O_P(n))(k))$. Mais , en posant $Z=\underline{P}^s_A$, on a (§ 2,n°1,prop.6) $v_*(O_P(n))=S^n_{O_Z}(O_Z^{r+1})$, qui est évidemment de la forme O_Z^t , pour un entier t dépendant de n et r . Par suite $H^p(P,O_P(n,k))=H^p(Z,(O_Z(k))^t)=(H^p(Z,O_Z(k)))^t$, qui est nul (pour $p>0$) dès que $k\geqslant 0$ (§ 2,n°1,cor.1 de la prop.5). Ceci achève donc la démonstration du th.3 .

Corollaire 1 .- Sous les conditions du th.3 (i), les $R^pf_*(\underline{M})$ $(p\geqslant 0)$ sont des $\underline{S}$-Modules gradués de type fini. En particulier, pour chaque $p\geqslant 0$, il existe k_p tel que pour $k\geqslant k_p$, $r\geqslant 0$, on ait

(15) $$R^pf_*(\underline{M}_{k+r})=\underline{S}_r R^pf_*(\underline{M}_k) .$$

En effet, d'après le § 2, cor.4 du th.1, $\underline{\Gamma}_*(\underline{G}_p)=\bigoplus_{k\geqslant 0} g_*(\underline{G}_p(k))$ est un $\underline{S}$-Module vérifiant la condition (TF') ; d'après (6) on voit donc qu'il existe un h_p tel que $\bigoplus_{k\geqslant h_p} R^pf_*(\underline{M}_k)$ soit un $\underline{S}$-Module de type fini. Comme en outre chacun des $R^pf_*(\underline{M}_k)$ pour $k<h_p$ est un O_Y-Module cohérent (n°1, th.1), donc un O_Y-Module de type fini, $R^pf_*(\underline{M})$ est un $\underline{S}$-Module de type fini. En outre, il y a un recouvrement ouvert affine (U_i) de Y tel que les restrictions à U_i des deux membres de (15) soient égaux pour $k\geqslant n_i$; il suffit de prendre pour k_p le plus grand des n_i.

Corollaire 2 .- Soient A un anneau noethérien, $\underline{m}$ un idéal de A, X un A-schéma propre, $\underline{F}$ un O_X-Module cohérent. Alors, pour tout $p\geqslant 0$, la somme directe $\bigoplus_{k\geqslant 0} H^p(X,\underline{m}^k\underline{F})$ est un module de type fini sur l'anneau $S=\bigoplus_{k\geqslant 0}\underline{m}^k$; en particulier, il existe un entier k_p tel que, pour $k\geqslant k_p$ et $r\geqslant 0$, on ait

(16) $$H^p(X,\underline{m}^{k+r}\underline{F})=\underline{m}^r H^p(X,\underline{m}^k\underline{F}) .$$

Il suffit d'appliquer le cor.1 avec $Y=\mathrm{Spec}(A)$, $\underline{S}=\tilde{S}$, $\underline{M}_k=\underline{m}^k\underline{F}$, compte tenu du § 1, n°4, cor. de la prop.4.

Corollaire 3 .- Sous les hypothèses du cor.2, on pose $\underline{F}_k=\underline{F}/\underline{m}^k\underline{F}$; on munit $H^p(X,\underline{F})$ de la topologie $\underline{m}$-adique et chacun des A-modules $H^p(X,\underline{F}_k)$ de la topologie discrète. Alors l'homomorphisme canonique

$$H^p(X,\underline{F})\to\varprojlim_k H^p(X,\underline{F}_k)$$

déduit des homomorphismes $\underline{F}\to\underline{F}_k$, est un isomorphisme topologique de $H^p(X,\underline{F})$ sur un sous-groupe de $\varprojlim_k H^p(X,\underline{F}_k)$.

Par définition de la topologie d'une limite projective, il suffit de montrer que tout voisinage de 0 dans $H^p(X,\underline{F})$ contient le noyau d'un homomorphisme $H^p(X,\underline{F}) \to H^p(X,\underline{F}_k)$. Or , en vertu du cor.2, il existe $h \geqslant 0$ tel que pour $k \geqslant h$, on ait

$$H^p(X,\underline{m}^k\underline{F}) = \underline{m}^{k-h}H^p(X,\underline{m}^h\underline{F}) \quad .$$

Considérons alors la suite exacte $0 \to \underline{m}^k\underline{F} \to \underline{F} \to \underline{F}_k \to 0$; il en résulte la suite exacte de cohomologie

$$H^p(X,\underline{m}^k\underline{F}) \longrightarrow H^p(X,\underline{F}) \to H^p(X,\underline{F}_k) \ ;$$

elle montre que pour $k \geqslant h$, le noyau de $H^p(X,\underline{F}) \to H^p(X,\underline{F}_k)$ est contenu dans l'image de $\underline{m}^{k-h}H^p(X,\underline{m}^h\underline{F})$, et a fortiori dans $\underline{m}^{k-h}H^p(X,\underline{F})$, ce qui prouve le corollaire .

<u>Corollaire 4 .- Sous les hypothèses du cor.2 , le système projectif</u> $(H^p(X,\underline{F}_k))_{k \geqslant 0}$ <u>vérifie la condition</u> (ML) .

En effet , pour deux entiers $r \leq s$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \underline{m}^r\underline{F}/\underline{m}^s\underline{F} \arrow[r] & \underline{F}_s \arrow[r] & \underline{F}_r \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \underline{m}^r\underline{F} \arrow[r] \arrow[u] & \underline{F} \arrow[r] \arrow[u] & \underline{F}_r \arrow[r] \arrow[u] & 0 \end{tikzcd}$$

les lignes étant exactes ; d'où , par la suite exacte de cohomologie un diagramme commutatif de A-modules

$$\begin{tikzcd} H^p(\underline{F}_s) \arrow[r] & H^p(\underline{F}_r) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dr, "\partial"'] & H^{p-1}(\underline{m}^r\underline{F}/\underline{m}^s\underline{F}) \\ & & H^{p-1}(\underline{m}^r\underline{F}) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où la ligne horizontale est exacte . Soit H' l'image de $H^p(\underline{F}_r)$ dans $H^{p-1}(\underline{m}^r\underline{F})$. Comme A est noethérien et que $H^{p-1}(\underline{m}^r\underline{F})$ est un A-module de type fini (n°1, cor.2 du th.1) , la topologie induite sur H' par la topologie $\underline{m}$-adique de $H^{p-1}(\underline{m}^r\underline{F})$ est la topologie $\underline{m}$-adique sur ce A-module (Bourbaki, Alg. comm.) ; mais comme $\underline{F}_r$ est annulé, par $\underline{m}^r$, il en est de même de $H^p(\underline{F}_r)$, et a fortiori de H' ; donc la topologie $\underline{m}$-adique sur H' est <u>discrète</u> . Or , le cor.2 appliqué à $\underline{m}^r\underline{F}$ au lieu de $\underline{F}$, montre que la topologie de $H^{p-1}(\underline{m}^r\underline{F})$ est induite par la topologie limite projective des $H^{p-1}(\underline{m}^r\underline{F}/\underline{m}^s\underline{F})$ $(s \geqslant r)$

Il existe par suite un $s_0 \geq r$ tel que la restriction à H' de l'homomorphisme $H^{p-1}(\underline{m}^r\underline{F}) \to H^{p-1}(\underline{m}^r\underline{F}/\underline{m}^s\underline{F})$ soit injective pour $s \geq s_0$. Pour $s \geq s_0$, le noyau de $H^p(\underline{F}_r) \to H^{p-1}(\underline{m}^r\underline{F}/\underline{m}^s\underline{F})$ est donc égal au noyau de $H^p(\underline{F}_r) \to H^{p-1}(\underline{m}^r\underline{F})$, et en particulier est indépendant de s, d'où la conclusion puisque ce noyau est l'image de $H^p(\underline{F}_s) \to H^p(\underline{F}_r)$.

Corollaire 5. - Sous les hypothèses du cor. 2, si $\hat{\underline{F}}$ désigne le complété de $\underline{F}$ pour la topologie $\underline{m}$-adique, l'homomorphisme canonique

$$\psi_p : \qquad H^p(X,\hat{\underline{F}}) \to \varprojlim_k H^p(X,\underline{F}_k)$$

est un isomorphisme.

En effet, soit $\underline{J}$ le faisceau d'idéaux $\underline{m}O_X$ sur X, qui est cohérent ; on a $\underline{m}^k\underline{F} = \underline{F} \otimes_{O_X} \underline{J}^k$, et $\hat{\underline{F}}$ est donc le faisceau complété $\underline{F}_{/X'}$, où X' désigne la partie fermée de X définie par le faisceau $\underline{J}$. Le cor. 4, joint à la prop. 6 du n°3, montre alors que ψ_p est bijectif.

6. Fin de la démonstration du théorème fondamental.

Le th. 2 étant de caractère local sur Y, on peut supposer $Y = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau noethérien ; X est alors un A-schéma propre, et $Y' = V(\underline{m})$, où $\underline{m}$ est un idéal de A. Alors $X' = f^{-1}(Y')$ est défini par le faisceau d'idéaux $\underline{J} = \underline{m}O_X$, et avec les notations des cor. 2, 3, 4, 5 du th. 3, on a $\underline{F}_{/X'} = \hat{\underline{F}}$, $\underline{F}_k = \underline{F} \otimes_{O_X} O_X/\underline{J}^k$; on est ramené à démontrer que dans le diagramme

$$(D') \qquad \begin{array}{ccc} \varprojlim_k H^p(X,\underline{F}_k) & \xleftarrow{\psi_p} & H^p(X,\hat{\underline{F}}) \\ \uparrow {\scriptstyle \varphi_p} & & \\ \overline{H^p(X,\underline{F})} & & \end{array}$$

où $\overline{H^p(X,\underline{F})}$ est le complété $\underline{m}$-adique de $H^p(X,\underline{F})$, ψ_p et φ_p sont des isomorphismes. On sait déjà (cor. 5 du th. 3) qu'il en est ainsi de ψ_p, et il suffit donc de le démontrer pour φ_p. Le fait que ψ_p soit bijectif entraîne que $\varprojlim_k H^p(X,\underline{F}_k)$ est un foncteur cohomologique en $\underline{F}$, ce qui va être utilisé dans la suite.

A) Cas où f est projectif. On peut alors identifier X à un sous-préschéma fermé d'un préschéma de la forme $\underline{P}^r_A$ (II,4,6,prop.21) ; X' s'identifie donc à un sous-préschéma fermé de $\underline{P}^r_A$ défini par le faisceau d'idéaux $\underline{m}\underline{O}_P$, et si j est l'injection canonique $X \to P$, $H^p(P, j_*(\underline{F}_k))$ et $H^p(P, j_*(\underline{F}))$ s'identifient respectivement à $H^p(X,\underline{F}_k)$ et $H^p(X,\underline{F})$ (G,II,4.9.1) . On peut donc supposer que $X=\underline{P}^r_A$.

Considérons d'abord le cas particulier où $\underline{F}=O_X(n)$ $(n\in \underline{Z})$; $\underline{F}_k$ s'identifie au faisceau $\underline{F}\otimes_A(A/\underline{m}^k)$ sur le sous-préschéma fermé $X_k=X\otimes_A(A/\underline{m}^k)$ de X correspondant au faisceau d'idéaux $\underline{m}^k O_X$; par ailleurs X_k s'identifie à $\underline{P}^r_{A/\underline{m}^k}$ (II,4,5,formule (15)). Or , on a alors l'expression explicite de $H^p(X,O_X(n))$ et de $H^p(X_k,O_{X_k}(n))$ (§ 2,n°1,prop.5) ; ce sont des modules libres sur A et $A/\underline{m}^k$ respectivement , dont la dimension ne dépend que de p et n (et non de k) ;le fait que φ_p est un isomorphisme est alors trivial .

Passons au cas où $\underline{F}$ est un O_X-Module cohérent quelconque ; nous allons utiliser le fait que $\varprojlim_k H^p(X,\underline{F}_k)$ est un foncteur cohomologique et que les (φ_p) forment un <u>morphisme</u> de foncteurs cohomologiques (n° 4) ; l'assertion relative aux φ_p sera conséquence du lemme général suivant :

<u>Lemme 4 .- Soient</u> A <u>un anneau noethérien</u> , <u>X=Proj(S)</u> , <u>où S est une</u> A-<u>algèbre graduée</u> de type fini engendrée par S_1 . Soient T^* <u>et</u> T'^* <u>des foncteurs cohomologiques covariants de la catégorie</u> $\underline{K}$ <u>des</u> O_X-<u>Modules cohérents dans une catégorie abélienne</u> $\underline{C}$, <u>et soit</u> $T^*\to T'^*$ <u>un morphisme de foncteurs cohomologiques</u> (T,II,2.1) . <u>On suppose que</u> :

(i) <u>Pour tout n assez grand</u> , $T^*(O_X(-n))\to T'^*(O_X(-n))$ <u>est un isomorphisme</u> .

(ii) <u>Pour tout i assez grand</u> , $T^i\to T'^i$ <u>est un isomorphisme</u> .

<u>Alors</u> $T^*\to T'^*$ <u>est un isomorphisme</u> .

L'hypothèse (ii) permet de raisonner par <u>récurrence descendante</u> sur la dimension p. Pour tout $\underline{F} \in \underline{K}$, on sait (II,3,4,cor.4 du th.1) que $\underline{F}$ est quotient d'une somme directe finie $\underline{G}$ de faisceaux de la forme $O_X(-n)$, où n peut être pris arbitrairement grand. On peut donc, par l'hypothèse (i), supposer que $T^*(\underline{G}) \to T'^*(\underline{G})$ est un isomorphisme. La suite exacte $0 \to \underline{R} \to \underline{G} \to \underline{F} \to 0$ donne alors un diagramme commutatif

$$(17)\qquad \begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \to & T^p(\underline{R}) & \to & T^p(\underline{G}) & \to & T^p(\underline{F}) & \to & T^{p+1}(\underline{R}) & \to & T^{p+1}(\underline{G}) & \to \cdots \\
& \downarrow{\scriptstyle u_1} & & \downarrow{\scriptstyle u_2} & & \downarrow{\scriptstyle u_3} & & \downarrow{\scriptstyle u_4} & & \downarrow{\scriptstyle u_5} & \\
\cdots \to & T'^p(\underline{R}) & \to & T'^p(\underline{G}) & \to & T'^p(\underline{F}) & \to & T'^{p+1}(\underline{R}) & \to & T'^{p+1}(\underline{G}) & \to \cdots
\end{array}$$

où les lignes sont exactes. Dans ce diagramme, u_2 et u_5 sont des isomorphismes d'après le choix de $\underline{G}$, et u_4 d'après l'hypothèse de récurrence. D'après le lemme des cinq, u_3 est surjectif. Ceci s'applique à tout faisceau cohérent sur X, en particulier à $\underline{R}$, donc u_1 est surjectif. Le lemme des cinq prouve alors que u_3 est injectif, ce qui achève la démonstration du lemme 4, et par suite du th.2 lorsque f est projectif.

B) Cas général. Soit $\underline{K}$ la catégorie des O_X-Modules cohérents, $\underline{K}'$ la sous-classe de $\underline{K}$ formée des O_X-Modules $\underline{F}$ tels que dans les diagrammes (D'), les φ_p soient des isomorphismes. Comme les φ_p forment un morphisme de ∂-foncteurs exacts, $\underline{K}'$ est une sous-classe exacte (II,1,5) de $\underline{K}$, comme il résulte aussitôt du lemme des cinq appliqué aux diagrammes (17). En outre, si $\underline{F} \in \underline{K}'$, tout facteur direct de $\underline{F}$ appartient aussi à $\underline{K}'$, les foncteurs $H^p(X,\underline{F})$ et $\underleftarrow{\lim}_k H^p(X,\underline{F}_k)$ commutent aux sommes directes finies, et φ_p transforment une somme directe en somme directe. Par application du corollaire du lemme de dévissage (II,1,5,cor. du th.3, on est ramené à prouver que lorsque X est irréductible, il existe un O_X-Module cohérent de support X appartenant à $\underline{K}'$; en effet, si ce point est établi, on pourra l'appliquer à toute partie fermée irréductible Z de X, car si j est l'injection canonique $Z \to X$ et

$\underline{G}$ un O_Z-module cohérent, $H^p(Z,\underline{G})$ et $H^p(Z,\underline{G}_k)$ s'identifient respectivement à $H^p(X,j^{\wedge}_{.}(\underline{G}))$ et $H^p(X,j^*(\underline{G})_k)$.

En vertu du lemme de Chow (II,5,2,cor.1 du th.1), il existe un préschéma irréductible Z et un morphisme projectif, surjectif et birationnel $g : Z \to X$ tel que $f\circ g : Z \to Y$ soit projectif. Posons $Z' = g^{-1}(X') = (f\circ g)^{-1}(Y')$. En vertu du th.1 du § 2, n°2, il existe un entier n tel que $\underline{F} = g_*(O_Z(n))$ soit cohérent et $R^q g_*(O_Z(n)) = 0$ pour tout $q > 0$; en outre, comme g est birationnel, le support de $\underline{F}$ contient un ouvert partout dense de X, donc est identique à X. Le th.2 appliqué au morphisme projectif g et au faisceau cohérent $O_Z(n)$ montre que $R^q\hat{g}_*((O_Z(n))_{/Z'}) = (R^q g_*(O_Z(n)))_{/X'}$. Cela étant, $R^p(f\circ g)^{\wedge}_*((O_Z(n))_{/Z'})$ est l'aboutissement d'une suite spectrale de terme $E_2^{pq} = R^p\hat{f}_*(R^q\hat{g}_*((O_Z(n))_{/Z'}))$, et on en conclut des isomorphismes

(18) $$R^p(f\circ g)^{\wedge}_*((O_Z(n))_{/Z'}) \simeq R^p\hat{f}_*(\underline{F}_{/X'}) .$$

Le même raisonnement appliqué à $O_Z(n)$ au lieu de $(O_Z(n))_{/Z'}$, donne des isomorphismes

(19) $$R^p(f\circ g)_*(O_Z(n)) \simeq R^p f_*(\underline{F})$$

Enfin, le th.2 appliqué au morphisme projectif $f\circ g$ et au faisceau cohérent $O_Z(n)$, montre que

(20) $$\psi_p^{-1}\circ\varphi_p : (R^p(f\circ g)_*((O_Z(n)))_{/Y'} \to R^p(f\circ g)^{\wedge}_*((O_Z(n))_{/Z'})$$

est un isomorphisme. Or les homomorphismes φ_p et ψ_p, qui proviennent d'homomorphismes de modules, commutent avec les homomorphismes des suites spectrales, ces derniers étant fonctoriels. On conclut donc de (18), (19) et (20) que

$$\psi_p^{-1}\circ\varphi_p : (R^p f_*(\underline{F}))_{/Y'} \to R^p\hat{f}_*(\underline{F}_{/X'})$$

est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration du th.2. En outre, on a vu en cours de route (cor.3 du th.3) :

<u>Corollaire</u>.- <u>Lorsque Y est affine, les φ_p sont des isomorphismes de groupes topologiques</u>.

Archives

Grothendieck – Sept 59

§ 4. Application aux théorèmes fondamentaux de la géométrie algébrique qualitative.

1. Théorème de connexion.

Les résultats de ce n° (et du suivant) généralisent des théorèmes bien connus de Zariski. On notera que, bien que les énoncés de ces théorèmes ne soient pas de nature cohomologique, nous les déduisons du th. 2 du § 3, de nature cohomologique. En fait, le cor. 2 du th. 2 du § 3 est suffisant pour les applications du présent n°, et est lui-même de nature non cohomologique, mais c'est dans sa démonstration que les méthodes cohomologiques ont joué leur rôle, en permettant une récurrence descendante sur la dimension.

Tous les résultats de ce n° sont conséquences du théorème fondamental suivant :

Théorème 1 (théorème de connexion). — Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \to Y$ un morphisme propre. Alors $\underline{A}(X) = f_*(O_X)$ est une O_Y-Algèbre cohérente. Soit Y' le préschéma fini au-dessus de Y tel que $\underline{A}(Y') = \underline{A}(X)$, qui est déterminé à un Y-isomorphisme près (II, 2, 3, prop. 7) : si $f' = \underline{A}(e)$ est le Y-morphisme $X \to Y'$ déduit (II, 2, 2, prop. 6) de l'isomorphisme identique $e : \underline{A}(Y') \to \underline{A}(X)$, on a $f'_*(O_X) = O_{Y'}$ et les fibres $f'^{-1}(y')$ du morphisme f' ($y' \in Y'$) sont connexes et non vides.

(cf II, 2, 7, prop. 13

Soit $g : Y' \to Y$ le morphisme structural. Pour prouver que l'homomorphisme $\theta : O_{Y'} \to f'_*(O_X)$ entrant dans la définition du morphisme f' est l'identité, il suffit de prouver, puisque Y' est affine sur Y (II, 2, 4, prop. 8), que $g_*(\theta) : g_*(O_{Y'}) \to g_*(f'_*(O_X)) = f_*(O_X)$ est l'identité, ce qui résulte des définitions puisque $g_*(O_{Y'}) = \underline{A}(Y')$ et $f_*(O_X) = \underline{A}(X)$. Le fait que $\underline{A}(X)$ est cohérent est un cas particulier du th. de finitude (§ 3, n°1, th. 1). Comme f est propre et g séparé, f' est propre (II, 5, 1, prop. 2 (v)) ; pour terminer la démonstration du th. 1, il suffit donc d'en prouver le

Corollaire 1 .- Sous les hypothèses du th.1 , supposons de plus que $f_*(O_X)=O_Y$. Alors les fibres $f^{-1}(y)$ de f ($y\in Y$) sont connexes et non vides.

L'hypothèse entraîne déjà que f est dominant , et comme f est une application fermée (II,5,1,prop.1) , f est surjectif . Appliquons le cor.6 du th.2 du § 3,n°4 , au cas $\underline{F}=O_X$ et pour $p=0$; $\varprojlim_n (O_Y\otimes(O_y/\underline{m}_y^n))$ n'est autre que le complété $\hat{O}_y$ pour la topologie $\underline{m}_y$-adique . Si $f^{-1}(y)$ n'est pas connexe , il est clair que chacune des composantes connexes donne un facteur direct non nul dans $H^0(f^{-1}(y),O_X\otimes(O_y/\underline{m}_y^n))$, qui , par passage à la limite projective , donne un facteur direct $\neq 0$ dans cette limite ; or , comme $\hat{O}_y$ est un anneau local , le $\hat{O}_y$-module $\hat{O}_y$ n'a pas de facteur direct $\neq 0$.

Corollaire 2 .- Sous les hypothèses du th.1 , pour tout $y\in Y$, l'ensemble des composantes connexes de la fibre $f^{-1}(y)$ est en correspondance biunivoque avec l'ensemble (fini) des points de la fibre $g^{-1}(y)$ (g étant le morphisme structural $Y'\to Y$) , autrement dit avec l'ensemble des idéaux maximaux de $(\underline{A}(X))_y$.

On sait en effet , puisque Y' est fini sur Y , que $g^{-1}(y)$ est un espace fini discret (II,2,7,prop.17) . Comme $f^{-1}(y)=f'^{-1}(g^{-1}(y))$, le corollaire résulte de cette remarque et du th.1 .

On a ainsi une interprétation géométrique remarquable du Y-préschéma Y' . La factorisation $f=g\circ f'$ du morphisme propre f est analogue à la factorisation obtenue par K.Stein pour les applications holomorphes d'espaces analytiques , et nous l'appellerons par la suite la factorisation de Stein de f .

Corollaire 3 .- Sous les conditions du th.1 , supposons X et Y intègres et f dominant ; soient $R(X)\supset R(Y)$ leurs corps de fractions rationnelles (I,6,2,prop.3). Pour tout $y\in Y$, le nombre de composantes connexes de $f^{-1}(y)$ est au plus égal au nombre des idéaux maximaux de la fermeture intégrale O'_y de O_y dans $R(X)$.

En effet , comme $f(X)$ est fermé , on a $f(X)=Y$, donc g est aussi surjectif . Comme $(\underline{A}(X))_y$ est un O_y-module de type fini , donc contenu dans O'_y , tout idéal maximal de $(\underline{A}(X))_y$ est l'intersection de cet anneau et d'un idéal maximal de O'_y (th. de Cohen-Seidenberg) .

Définition 1 .- On dit qu'un anneau local intègre A est unibranche si sa clôture intégrale est un anneau local . On dit qu'un point y d'un préschéma intègre est unibranche si l'anneau local O_y est unibranche.

On notera que si le complété de A est intègre (ce qu'on exprime en disant que A est analytiquement irréductible), A est unibranche (

) .

Corollaire 4 .- Sous les hypothèses du cor.3 , supposons que la fermeture ~~intégrale~~ algébrique de $R(Y)$ dans $R(X)$ soit radicielle sur $R(Y)$ et que y Y soit unibranche . Alors la fibre $f^{-1}(y)$ est connexe .

Si O''_y est la clôture intégrale de O_y , la fermeture intégrale O'_y de O_y dans $R(X)$ est aussi celle de O''_y ; ~~[illegible]~~ comme le corps des fractions de O'_y est radiciel sur $R(Y)$, on sait que si O''_y est un anneau local , il en est de même de O'_y (Bourbaki, Alg. commg.   )

Ce dernier corollaire est essentiellement la forme sous laquelle Zariski énonce son "théorème de connexion" pour les schémas algébriques , en supposant toutefois que O_y est analytiquement irréductible.

Corollaire 5 .- La conclusion du cor.4 reste valable si , au lieu de supposer Y unibranche en y , on suppose que f est universellement ouvert (I,7,5) au-dessus de y .

Nous utiliserons la conséquence suivante du lemme de Hironaka , qui sera démontrée plus tard (§   ) : Y étant noethérien et intègre , pour tout point $y \in Y$ il existe un voisinage ouvert affine U de y dans Y , un anneau local noethérien normal A , dont le corps des fractions est $R(Y)$, qui domine O_y et qui est de la forme $B_{\mathfrak{p}}$, où B est une algèbre de type fini sur l'anneau $C=A(U)$, est contenue dans $R(Y)$, et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de B . Soit $Y_1=\mathrm{Spec}(B)$; l'injection $\varphi : O_y \to B_{\mathfrak{p}}$ définit un morphisme $h=(\psi,\theta)$ de type fini d'un ouvert affine Y' de Y_1 contenant $\mathfrak{p}$, dans U , tel que $\psi(\mathfrak{p})=y$ et $\theta^b_{\mathfrak{p}}=\varphi$ (I,4,3,prop.15) ; en outre ce morphisme correspond à un homomorphisme injectif de C dans $A(Y')$ donc il est dominant (I,1,2,cor.4 de la prop.5) . Comme par ailleurs Y' est intègre et U dense dans Y , on voit qu'on a défini un morphisme dominant de type fini $h : Y' \to Y$ tel que $h(\mathfrak{p})=y$. En outre , comme le corps des fractions de $B_{\mathfrak{p}}$ est $R(Y)$, h est birationnel . L'hypothèse que f est universellement ouvert au-dessus de y entraîne alors , en posant $X'=X^{Y'}$ et $f'=f^{Y'}$, que X' a une seule composante irréductible X'' dont l'image par f' est dense dans Y' , et que $f'^{-1}(\mathfrak{p})$ est contenu dans cette composante (I,7,5,cor.4 de la prop.15) . On peut en outre remplacer f' par f'_{red} et supposer donc X'' intègre . Alors , comme l'anneau local de $\mathfrak{p}$ est intégralement clos , $\mathfrak{p}$ est unibranche ; en outre , en considérant un voisinage affine du point générique de Y' dans lequel h est un isomorphisme sur un voisinage du point générique de Y , on voit aussitôt qu'il existe une application birationnelle de X'' dans X ; autrement dit , on a $R(Y')=R(Y)$, $R(X'')=R(X)$, et la fermeture algébrique de $R(Y')$ dans $R(X'')$ est donc radicielle sur $R(Y')$. Les conditions d'application du cor.4 étant remplies , $f'^{-1}(\mathfrak{p})$ est connexe , et comme la projection de $f'^{-1}(\mathfrak{p})$ dans

$f^{-1}(y)$ est surjective (I,2,7,prop.18 et I,2,6,prop.10)., $f^{-1}(y)$ est connexe .

<u>Remarque</u> .- Le raisonnement précédent est dû en substance à Zariski (Theory and applications of Holomorphic functions) , à cela près qu'il peut prendre le normalisé de O_y puisque , pour un anneau local de la géométrie algébrique , on sait que son normalisé est <u>noethérien</u>. D'autre part , Zariski prouve que si Y est la variété de Chow d'un espace projectif $\underline{P}^r_k$ sur un corps k , et si X est la partie fermée de $\underline{P}^r \times_k Y$ qui définit la correspondance de Chow entre $\underline{P}^r$ et Y , alors la projection $X \to Y$ est un morphisme universellement ouvert (<u>loc.cit.</u>,lemme de la p.82) . Il semble bien que ce soit la seule propriété formelle des "coordonnées de Chow" dont on se serve dans beaucoup d'applications ; il y a par suite intérêt , dans une telle situation , à substituer le langage : fibres d'un morphisme propre (éventuellement supposé universellement ouvert , ou soumis à d'autres restrictions analogues de régularité locale) au langage : spécialisation de cycles de l'espace projectif .*

<u>Corollaire 6 .- Sous les conditions du cor.3 , supposons</u> R(Y) <u>algébriquement fermé dans</u> R(X) , <u>et soit y un point normal de</u> Y . <u>Alors</u> $f^{-1}(y)$ <u>est connexe , et il existe un voisinage ouvert</u> U <u>de y tel que</u> $\underline{A}(f^{-1}(U))=O_Y|U$. <u>En particulier , si</u> Y <u>est normale (et</u> R(Y) <u>algébriquement fermé dans</u> R(X)) , <u>on a</u> $f_*(O_X)=O_Y$ <u>et</u> $f^{-1}(y)$ <u>est connexe pour tout</u> $y \in Y$.

La première assertion résulte du cor.3 , puisque l'hypothèse entraîne que O_y est intégralement fermé dans R(X) . D'autre part , si $f : X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$ est la factorisation de Stein de f (th.1) , on a $R(Y) \subset R(Y') \subset R(X)$, et R(Y') est algébrique sur R(Y) , donc égal à R(Y) par hypothèse ; si y' est l'unique point (cor.2) de Y' au-dessus de y , on a donc $O_{y'}=O_y$, et par suite (I,4,3,prop.16) , g est un isomorphisme local au point y' , ce qui achève de prouver la première partie du corollaire . Sous les hypothèses de la seconde partie, on a alors $O_{y'}=O_{g(y')}$ pour tout $y'\in Y'$, et par suite g est un isomorphisme , ce qui achève la démonstration .

Le fait que le cor.4 est établi dans le cadre des schémas permet des applications telles que la suivante :

Corollaire 7 .- Soient A *un anneau local noethérien unibranche , k son corps résiduel* , $S=G(A)$ *l'anneau gradué associé à* A , *considéré comme k-algèbre graduée spéciale . Alors* Proj(S) *est un k-schéma connexe* .

Soient $\underline{m}$ l'idéal maximal de A , Y=Spec(A) , X=Proj(S') le Y-schéma obtenu en faisant éclater l'idéal $\underline{m}$; on a donc $S'=\bigoplus_{n\geq 0}\underline{m}^n$ (§ 2,n°4). On applique le cor.4 au morphisme structural f : X→Y qui est projectif, et à l'unique point fermé y de Y ; on a $\kappa(y)=k$, et $f^{-1}(y)$ s'identifie à Proj(S) (II,3,5,prop.20); comme $R(f^{-1}(y))$ est le corps des fractions de l'anneau local du point générique de $f^{-1}(y)$, on voit que c'est un corps de fractions rationnelles sur $k=R(\{y\})$; on en conclut aussitôt que R(X) ne contient pas d'élément algébrique sur R(Y) . Les conditions du cor.4 sont par suite remplies , d'où la conclusion.

Le résultat suivant est dû à Chevalley dans le cas des schémas algébriques ; nous en donnerons au § une démonstration plus élémentaire due à Serre n'utilisant que le th. de finitude (mais utilisant le critère de Serre).

Proposition 1 .- Soient Y *un préschéma localement noethérien* , f : X→Y *un morphisme . Les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) *f est fini* .

b) *f est affine et propre* .

c) *f est propre et pour tout* $y\in Y$, *l'ensemble* $f^{-1}(y)$ *est fini* .

On a déjà démontré l'équivalence de a) et b) (II,5,1,cor.2 de la prop.3); il est clair que a) entraîne c), et il reste donc à prouver que c) entraîne a). En considérant la factorisation de Stein $f=g\circ f'$ de f, on est ramené à prouver que f' est fini, puisque g l'est par construction (II,2,7,prop.15 (ii)); on peut donc supposer en plus que $f_*(O_X)=O_Y$. En vertu du th. de connexion, les fibres $f^{-1}(y)$ sont alors connexes ; d'autre part, $f^{-1}(y)$ étant un schéma algébrique sur $\kappa(y)$ dont l'espace de base est fini, $f^{-1}(y)$ est discret (I,4,2,prop.12), donc $f^{-1}(y)$ est réduit à un point, autrement dit f est injectif. Comme f est une application fermée et que $f_*(O_X)=O_Y$, f est surjective, donc un homéomorphisme de X sur Y, et la relation $f_*(O_X)=O_Y$ entraîne enfin que f est un isomorphisme ce qui achève la démonstration.

Corollaire .- Soient X,Y deux préschémas intègres ; on suppose en outre Y normal et localement noethérien. Si $f : X\to Y$ est un morphisme propre, birationnel et tel que $f^{-1}(y)$ soit fini pour tout $y\in Y$, f est un isomorphisme.

Comme les hypothèses du cor.4 du th.1 sont remplies pour tout $y\in Y$, on en conclut que $f^{-1}(y)$ est connexe ; donc on voit comme dans la prop.1 que f est un homéomorphisme (puisque f est dominant, étant birationnel). En outre, pour tout $y\in Y$, si x est l'unique point de X tel que $f(x)=y$, O_x est entier sur O_y en vertu de la prop.1 et a même corps des fractions par hypothèse, donc $O_x=O_y$, ce qui achève de prouver que f est un isomorphisme.

2 . Le "main theorem" de Zariski.

Proposition 2 .- Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X\to Y$ un morphisme propre. Soit X' l'ensemble des points $x\in X$ qui sont isolés dans leur fibre $f^{-1}(f(x))$. Alors l'ensemble X' est ou-

vert dans X , *et si* $f=g\,f'$ *est la factorisation de Stein de* f , *la restriction de* f' *à* X' *est un isomorphisme de* X' *sur un sous-préschéma de* Y' *induit sur un ouvert* $U\subset Y'$, *et on a* $X'=f'^{-1}(U)$.

Comme $f'^{-1}(f'(x))\subset f^{-1}(f(x))$, tout x X' est isolé dans $f'^{-1}(f'(x))$ et on peut par suite se borner au cas où $f'=f$, donc $f_*(O_X)=O_Y$; on en conclut que si $x\in X'$, $f^{-1}(f(x))$, qui est connexe (n°1, cor. 1 du th. 1) , est réduite au point x . Comme f est fermée , pour tout voisinage ouvert V de x dans X , $f(X-V)$ est fermé dans Y et ne contient pas $y=f(x)$, puisque $f^{-1}(y)=\{x\}$; si U est son complémentaire dans Y , on a donc $f^{-1}(U)\subset V$, d'où on conclut que les images réciproques par f d'un système fondamental de voisinages ouverts de y forme un système fondamental de voisinages ouverts de x . L'hypothèse $f_*(O_X)=O_Y$ et la définition de l'image directe d'un faisceau entraînent alors que , si $f=(\psi,\theta)$, l'application $\theta_x^{\flat} : O_y\to O_x$ est un *isomorphisme*. On en conclut qu'il existe un voisinage ouvert V de x et un voisinage ouvert U de y tel que la restriction de f à V soit un isomorphisme de V sur U (I,4,3,prop.16) ; en outre , d'après ce qu'on vient de voir , on peut supposer que $f^{-1}(U)=V$, d'où on conclut aussitôt , par définition , que $V\subset X'$, et cela achève la démonstration .

Théorème 2 ("Main theorem" de Zariski) .- *Soient* Y *un préschéma noethérien* , $f : X\to Y$ *un morphisme quasi-projectif* , X' *l'ensemble des points* $x\in X$ *qui sont isolés dans leur fibre* $f^{-1}(f(x))$. *Alors* X' *est une partie ouverte de* X , *et le sous-préschéma induit* X' *est isomorphe à un préschéma induit sur une partie ouverte d'un* Y*-préschéma* Y' *fini sur* Y .

Nous avons déjà démontré que X' est ouvert , en utilisant un lemme de Nagata (I,7,3,cor.1 du th.2) , mais nous en obtenons ici une démonstration directe . Par hypothèse , il existe un Y-préschéma projectif Z tel que X soit Y-isomorphe à un sous-préschéma induit sur un ouvert de Z (II,4,7,prop.24). On est donc ramené à démontrer le théorème pour Z, et il résulte alors aussitôt de la prop.2./

Corollaire 1.- Soient Y *un schéma localement noethérien*, $f : X \to Y$ *un morphisme de type fini*, *x un point de* X *isolé dans sa fibre* $f^{-1}(f(x))$. *Alors il existe un voisinage ouvert de x dans* X *qui est isomorphe à une partie ouverte d'un* Y-*préschéma fini sur* Y.

Soient en effet $y=f(x)$, U un voisinage affine de y dans Y et V un voisinage affine de x dans X, contenu dans $f^{-1}(U)$. Comme Y est séparé, U est affine sur Y (I,3,7,cor.3 de la prop.22), et comme V est affine sur U, V est affine sur Y (II,2,3,cor.3 de la prop.7), et a fortiori quasi-projectif sur Y (II,4,7,prop.27). Il suffit alors d'appliquer à V le th.2.

Lorsque Y est affine, le cor.1 s'énonce en termes d'algèbre commutative :

Corollaire 2.- Soient A *un anneau noethérien*, B *une* A-*algèbre de type fini*, $\mathfrak{q}$ *un idéal premier de* B, $\mathfrak{p}$ *son image réciproque dans* A. *On suppose que* $\mathfrak{q}$ *soit à la fois maximal et minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de* B *dont l'image réciproque est égale à* $\mathfrak{p}$. *Alors il existe* $g \in B-\mathfrak{q}$, *une* A-*algèbre finie* A' *et un élément* $f' \in A'$ *tels que les* A-*algèbres* B_g *et* $A'_{f'}$ *soient isomorphes*.

Il suffit en effet d'appliquer le cor.1 à Y=Spec(A) et X=Spec(B), l'hypothèse sur $\mathfrak{q}$ signifiant exactement qu'il est isolé dans sa fibre (I,1,2).

On en déduit le résultat suivant, moins général en apparence :

Corollaire 3.- Soient A *un anneau local noethérien*, B *une* A-*algèbre de type fini*, $\mathfrak{n}$ *un idéal premier de* B *dont l'image réciproque dans* A *est l'idéal maximal* $\mathfrak{m}$. *On suppose que* $\mathfrak{n}$ *est maximal dans*

B et est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers de B dont l'image réciproque est $\mathfrak{m}$ (ce qui signifie aussi que $B_{\mathfrak{m}}$ est primaire pour $\mathfrak{n}$). Alors il existe une A-algèbre finie A' et un idéal maximal $\mathfrak{m}'$ de A' (dont $\mathfrak{m}$ est l'image réciproque dans A) telle que $B_{\mathfrak{n}}$ soit isomorphe à la A-algèbre $\hat{A}'_{\mathfrak{m}'}$.

C'est la forme donnée par Zariski à son "Main theorem", étendue aux anneaux locaux noethériens quelconques.

Le cas particulier suivant du cor.3 est aussi parfois appelé "Main Theorem" :

Corollaire 4 .- Sous les conditions du cor.3 , supposons en outre A et B intègres et ayant même corps des fractions . Alors , si $\hat{A}$ est normal , on a $B=\hat{A}$.

En effet , la Remarque suivant le th.2 montre que l'on peut supposer avec les dans l'application du cor.3 que A' est intègre et a même corps des fractions K que $\hat{A}$ et B ; l'hypothèse sur $\hat{A}$ entraîne alors que $A'=A$, donc $B_{\mathfrak{n}}=\hat{A}$; comme B domine A et que l'on a $\hat{A}\subset B\subset B_{\mathfrak{n}}$, on en conclut bien $\hat{A}=B$.

Les corollaires précédents étaient des variantes de nature locale du th.2 , qui est un résultat global , Voici une autre conséquence de nature globale :

Corollaire 5 .- Soient Y un préschéma intègre localement noethérien, X un préschéma intègre , $f : X \to Y$ un morphisme séparé , de type fini et birationnel . Supposons en outre Y normal et toutes les fibres $f^{-1}(y)$ $(y \in Y)$ finies . Alors f est un isomorphisme de X sur un préschéma induit sur une partie ouverte de Y (autrement dit , une immersion ouverte) .

Soit en effet $x \in X$, et posons $y = f(x)$. Comme $f^{-1}(y)$ est un schéma algébrique sur $\kappa(y)$, l'hypothèse qu'il est fini entraîne qu'il est discret (I,4,2,prop.12) , donc x est isolé dans sa fibre ; comme en outre O_y est normal , O_x et O_y intègres ayant même corps des fractions , on peut appliquer le cor.4 , et si $f = (\psi, \theta)$, l'homomorphisme $\theta^b_y : O_y \to O_x$ est bijectif ; donc (I,4,3, prop. 16) f est un isomorphisme local ; comme f est séparé et X intègre , on en conclut que f est une immersion ouverte (I,6,2,prop.4).

Remarques .- 1) On notera que les cor.3 et 4 , de nature locale et non cohomologique , ont été démontrés par des méthodes globales faisant appel à la cohomologie .

2) Il serait intéressant , dans le th.2 , de pouvoir éliminer l'hypothèse que X est quasi-projectif .

Définition 1 .- On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ de préschémas est quasi-fini s'il est de type fini et si tout point $x \in X$ est isolé dans sa fibre $f^{-1}(f(x))$.

Si Y est noethérien et X quasi-projectif sur Y , il résulte du th. 2 que dire que f est quasi-fini équivaut à dire que X est isomorphe à un sous-préschéma induit sur un ouvert d'un Y-schéma fini .

Proposition 3 .- (i) Une immersion $X \to Y$, qui est fermée, ou telle que X soit noethérien, est un morphisme quasi-fini .

(ii) Si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont des morphismes quasi-finis , $g \circ f$

est quasi-fini .

(iii) Si X et Y sont des S-préschémas , $f : X \to Y$ un S-morphisme quasi fini , alors pour tout morphisme $g : S' \to S$, $f^{S'} : X^{S'} \to Y^{S'}$ est quasi-fini .

(iv) Si $f : X \to Y$ et $g : X' \to Y'$ sont deux S-morphismes quasi-finis , $f \times_S g : X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ est quasi-fini .

(v) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes tels que $g \circ f$ soit quasi-fini ; si en outre g est séparé , ou X noethérien , ou $X \times_Z Y$ localement noethérien , f est quasi-fini .

(vi) Si f est quasi-fini , il en est de même de f_{red} .

L'assertion (i) est triviale , toute fibre étant réduite à un point, compte tenu de I,4,2,prop.7 . De même , pour prouver (ii) , on remarque d'abord que $h = g \circ f$ est de type fini (I,4,2,prop.8) ; en outre , si $z = h(x)$ et $y = f(x)$, y est isolé dans $g^{-1}(z)$, donc il existe un voisinage ouvert V de y ne rencontrant aucun point de $g^{-1}(z)$ distinct de y ; $f^{-1}(V)$ est donc un voisinage ouvert de x ne rencontrant aucun des $f^{-1}(y')$, où $y' \neq y$ est dans $g^{-1}(z)$; comme x est isolé dans $f^{-1}(y)$, il est isolé dans $h^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z))$. Pour prouver (iii) , on peut se limiter au cas où $Y = S$ (I, 2,5,cor.2 de la prop.9) ; on remarque encore tout d'abord que f' est de type fini (I,4,2,prop. 9) ; d'autre part , si $x' \in X' = X^{S'}$ et si on pose $y' = f^{S'}(x')$ et $y = g(y')$ $f'^{-1}(y')$ s'identifie à $f^{-1}(y) \otimes_{\kappa(y)} \kappa(y')$ (I,2,7,prop.18) ; comme $f^{-1}(y)$ est un $\kappa(y)$-schéma algébrique dont l'espace sous-jacent est discret , $f^{-1}(y)$ est de rang fini sur $\kappa(y)$ (I,4,2,prop.12) donc $f'^{-1}(y')$ est de rang fini sur $\kappa(y')$, et est par suite discret . Les assertions (iv),(v),(vi) se déduisent de (i),(ii),(iii) suivant le procédé habituel , sauf en ce qui concerne les hypothèses de (v) sur g autres que l'hypothèse que g est séparé ; il faut alors utiliser (I,4,2,cor.2 de la prop.9) et la remarque que si x est isolé dans $f^{-1}(g^{-1}(g(f(x))))$, il l'est a fortiori dans $f^{-1}(f(x))$.

3 : Morphismes équidimensionnels et lemme de normalisation .

Nous rappelons pour mémoire l'énoncé du lemme de normalisation de E.Noether :

Lemme 1 .- Soient k un corps , A une algèbre de type fini sur k , de dimension e . Alors il existe e éléments $x_i \in A$ $(1 \leq i \leq e)$, algébriquement indépendants et tels que A soit entière sur $k\,x_1,\dots,x_e$.

L'existence des x_i est démontrée par exemple dans Sém.Cartan-Chevalley 1955-56 , 4-01 § 4-03 . Le fait que le nombre de ces éléments soit la dimension de A résulte de ce que $A'=k[x_1,\dots,x_e]$ est de dimension e (I,7,3,cor.1 de la prop.9) et de ce que $\dim A=\dim A'$ (II,2,7, prop.16 bis) .

Lemme 2 .- Soient A un anneau noethérien , B une A-algèbre de type fini , $Y=\mathrm{Spec}(A)$, $X=\mathrm{Spec}(B)$, f le morphisme structural $X \to Y$. Soit $y \in Y$, et soit $C=B\otimes_A \kappa(y)$ l'anneau de la fibre $f^{-1}(y)$; soient f_i $(1 \leq i \leq e)$ des éléments de B dont les images canoniques $f_i \otimes 1$ dans C engendrent une sous-$\kappa(y)$-algèbre C' de C telle que C soit finie sur C'. Alors il existe un voisinage ouvert U de $f^{-1}(y)$ dans X , quasi-fini sur $Y'=\mathrm{Spec}(A[f_1,\dots,f_e])$, et a fortiori sur $Y\otimes_Z Z[T_1,\dots,T_e]$ (T_i indéterminées) .

En effet , f se factorise en $X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$. Par hypothèse , $f^{-1}(y)$ est fini sur $g^{-1}(y)$, dont l'anneau est $A[f_1,\dots,f_e]\otimes_A \kappa(y)$; donc tout $x \in f^{-1}(y)$ est isolé dans sa fibre $f'^{-1}(f'(x))$ (II,2,7,prop.17) Comme X est affine et Y' noethérien , le lemme résulte de l'application à f' du th.2 (il est clair en effet que Y' est un sous-préschéma fermé , donc fini , de $Y\otimes_Z Z[T_1,\dots,T_e]$) .

Corollaire .- Avec les notations du lemme 2 , pour tout $z \in Y$, la dimension de $U \cap f^{-1}(z)$ est $\leq e$.

En effet, avec les mêmes notations, $U \cap f^{-1}(z)$ est fini sur $g^{-1}(z)$ donc $\dim(U \cap f^{-1}(z)) \leq \dim(g^{-1}(z))$ (prop.4), et comme $g^{-1}(z)$ est un sous-préschéma fermé du spectre affine de $\kappa(z)[T_1,\ldots,T_e]$, on a $\dim(g^{-1}(z)) \leq e$ (I,7,1,prop.1 et I,7,3,cor.1 de la prop.9).

La conjonction des lemmes 1 et 2 donne la généralisation suivante du lemme 1 (qui sera précisée ci-dessous dans le th.4) :

Proposition 5 .- Soient A un anneau noethérien, B une A-algèbre de type fini, $Y=\mathrm{Spec}(A)$, $X=\mathrm{Spec}(B)$, f le morphisme structural $X \to Y$; soit $y \in Y$, et soit $e=\dim(f^{-1}(y))$. Il existe alors un voisinage ouvert U de $f^{-1}(y)$ et des éléments f_i ($1 \leq i \leq e$) de B tels que U soit quasi-fini sur $Y'=\mathrm{Spec}(A[f_1,\ldots,f_e])$ et a fortiori sur $Y \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[T_1,\ldots,T_e]$.

Joint au cor. du lemme 2, cela redonne le th.2 de I,7,3 :

Théorème 3 .- Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \to Y$ un morphisme de type fini. Alors pour tout entier $e \geq 0$, l'ensemble U_e des $x \in X$ tels que $\dim_x(f^{-1}(f(x))) \leq e$ est ouvert.

On peut en effet supposer Y affine et noethérien, et (en restreignant X à un voisinage ouvert affine convenable de x) on peut supposer, pour un $x \in U_e$, que toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(f(x))$ sont de dimension $\leq e$; la prop.5 et le cor. du lemme 2 entraînent alors aussitôt la conclusion.

On retrouve comme corollaire le lemme de Nagata qui avait servi au chap.I à démontrer le th.2 de I,7,3 :

Corollaire .- Sous les hypothèses du th.3, supposons en outre X et Y irréductibles et f dominant. Soient ξ, η les points génériques de X et Y, et soit $e=\dim f^{-1}(\eta)=\mathrm{deg.tr.}_{\kappa(\eta)}\kappa(\xi)$. Alors toute composante irréductible de toute fibre $f^{-1}(y)$ a une dimension $\geq e$.

En effet, pour $n<e$, l'ensemble des x X tels que $\dim_x(f^{-1}(f(x)) \leq n$ est ouvert et ne peut contenir ξ, donc est nécessairement vide.

Théorème 4 .- Soient Y un préschéma localement noethérien , $f: X \to Y$ un morphisme de type fini . Pour tout $x \in X$, désignons par Y_i $(1 \leq i \leq m)$ les composantes irréductibles de Y contenant $y=f(x)$, et par y_i le point générique de Y_i . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe un voisinage ouvert U de x tel que toute composante irréductible de U domine l'une des Y_i , et que pour tout $z \in Y$, les composantes irréductibles de $U \cap f^{-1}(z)$ aient toutes une même dimension e indépendante de z .

(ii) Les conditions de (i) sont remplies en prenant seulement $z=y_i$ $(1 \leq i \leq m)$ et $z=y$.

(iii) Il existe un entier $e \geq 0$, un voisinage affine V de y, un schéma X' fini sur $Y'=V \otimes_{Z} Z[T_1,\ldots,T_e]$, dont toute composante irréductible domine une composante irréductible de Y' , et un voisinage ouvert U de x isomorphe à un ouvert de X' .

Il est trivial que (i) entraîne (ii) , prouvons que (ii) entraîne (iii) . Soit V un voisinage ouvert affine noethérien de y dans Y , ne rencontrant aucune des composantes irréductibles de Y ne contenant pas y . Les composantes irréductibles de V sont donc les $V_i = V \cap Y_i$ $(1 \leq i \leq m)$, et y_i est encore le point générique de V_i . On peut évidemment supposer dans la condition (ii) que U est affine et contenu dans $f^{-1}(V)$; en vertu de la prop.5 , on peut en outre supposer que U est isomorphe à un ouvert dans un schéma X' fini sur $Y'=V \otimes_{Z} Z[T_1,\ldots,T_e]$. En outre , en remplaçant au besoin X' par le plus petit sous-préschéma fermé de X' majorant U (qui est fini sur X' , donc sur Y') (II,1, 2,prop.8) , on peut supposer U dense dans X' ; les composantes irréductibles de X' sont donc les adhérences dans X' des composantes irréductibles U_j de U $(1 \leq j \leq n)$. Par ailleurs , les composantes irréductibles de Y' sont les $Y'_i = V_i \otimes_{Z} Z[T_1,\ldots,T_e]$. Il faut prouver que tout

U_j domine un Y'_i . Par hypothèse , il existe i tel que U_j domine Y_i , autrement dit , si x_j est le point générique de U_j , $f(x_j)=y_i$; par suite (I,7,5,lemme 7) x_j est aussi le point générique de $U_j \cap f^{-1}(y_i)$ que nous noterons pour abréger $U_j(y_i)$, et qui est égal à $U_j \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y_i))$. De même , le point générique y''_i de Y'_i est aussi celui de $Y'_i(y_i)=Y''_i\times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y_i))=\mathrm{Spec}(\kappa(y_i)[T_1,\dots,T_e])$, qui est d'ailleurs aussi égal à $Y'\times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y_i))$, puisque V_i est un voisinage de y_i dans Y . Le morphisme quasi-fini $U_j\to Y'$ définit donc un morphisme quasi-fini $U_j(y_i)\to Y''_i(y_i)$ (n°2,prop.3) ; si ce morphisme g n'était pas dominant , g_{red} pourrait être considéré comme un morphisme de $(U_j(y_i))_{red}$ dans un sous-préschéma fermé de $Y'_i(y_i)$,dont l'espace sous-jacent est distinct de $Y''_i(y_i)$ (I,3,4,cor. de la prop. 9) . Comme g_{red} est quasi-fini , $Y''_i(y_i)$ intègre et de dimension e (I,7,3,cor.1 de la prop.9) , on aurait $\dim(U_j(y_i))<$ e (n°2,prop. 4) , ce qui contredit l'hypothèse (ii), puisque $U_j(y_i)$ est une composante irréductible de $U\cap f^{-1}(y_i)$. On en conclut que $g(x_j)=y'_i$, ce qui établit (iii) .

Il reste à montrer que (iii) entraîne (i) . On peut évidemment , en remplaçant V par un voisinage plus petit , supposer que V ne rencontre aucune des composantes irréductibles de Y ne contenant pas y . Gardant les mêmes notations que ci-dessus , il résulte de (iii) que tout U_j domine un Y_i , puisque $U_j\to Y_i$ est composé de $U_j\to Y'_i$, qui est dominant par hypothèse , et de $Y'_i\to Y_i$, qui est dominant par construction. Pour tout $z\in Y$, $U\cap f^{-1}(z)$ est réunion des $U_j(z)=U_j\cap f^{-1}(z)$, donc ses composantes irréductibles sont parmi celles des $U_j(z)$, et il suffit de prouver que ces dernières sont de dimension e . Or , d'après le cor. du th.3 , appliqué au morphisme dominant

$U_j \to Y_i$, les composantes irréductibles de $U_j(z)$ ont toutes une dimension $\geqslant e$. D'autre part , comme $U \cap f^{-1}(z) = U \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(z))$ est quasi-fini sur $Y' \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(z))$ (n°2,prop.3) , et que ce dernier n'est autre que $\mathrm{Spec}(\kappa(z)[T_1,\ldots,T_e])$, donc est de dimension e , on a $\dim(U \cap f^{-1}(z)) \leqslant e$ (n°2,prop.4) , et a fortiori les composantes irréductibles de $U_j(z)$ ont une dimension $\leqslant e$, ce qui achève la démonstration .

Définition 2 .- On dit qu'un morphisme f est équidimensionnel en x s'il vérifie les conditions équivalentes du th.4 . On dit que f est équidimensionnel (resp. équidimensionnel au point $y \in Y$) s'il est équidimensionnel en tout $x \in X$ (resp. en tout $x \in f^{-1}(y)$) . On dit que f est strictement équidimensionnel s'il est équidimensionnel et si , pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ a une dimension indépendante de y (et par suite est non vide si X est non vide) .

Corollaire 1 .- Soient Y un préschéma localement noethérien irréductible , X un préschéma irréductible , ~~XXXXXX~~ $f : X \to Y$ un morphisme dominant de type fini ; soit e la dimension de la fibre générique de f . Soit $x \in X$ tel que $O_{f(x)}$ soit quotient d'un anneau régulier . Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est équidimensionnel en x .

(ii) $\dim_x(f^{-1}(f(x))) \leqslant e$ (ce qui entraîne $\dim_x(f^{-1}(f(x)))=e$ par le cor. du th.3) .

(iii) Pour toute composante irréductible Z_i de $f^{-1}(f(x))$ contenant x, de point générique x_i , on a $\dim(O_{x_i}) \geqslant \dim(O_{f(x)})$ (ce qui entraîne $\dim(O_{x_i})=\dim(O_{f(x)})$ par I,7,2,prop.8).

(iv) Il existe un voisinage ouvert U de x et un voisinage ouvert V de f(x) tel que U soit quasi-fini au-dessus de $Y' = V \otimes_{\underline{Z}} \underline{Z}[T_1,\ldots,T_e]$.

L'équivalence de (i) et (iv) résulte du th.4 , et il en est de même de l'équivalence de (i) et (ii), car en vertu du cor. du th.3 , toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(f(x))$ contenant x ont nécessairement une dimension égale à e si (ii) a lieu , et cela entraîne la condition (ii) du th.4 . L'équivalence de (ii) et (iii) résulte de l'hypothèse sur $O_{f(x)}$, qui entraîne l'égalité dans la "formule de dimension"

$$e+\dim(O_{f(x)}) = \deg.\mathrm{tr}._{k(f(x))}k(x_1)+\dim(O_{x_1})$$

(I,7,2,cor.1 du th.1) (on notera que sans l'hypothèse sur $O_{f(x)}$, l'inégalité de la formule de dimension prouve que (iii) entraîne (ii) .

On notera que dans le résultat de (iv) , U est par définition isomorphe à un ouvert d'un schéma X' fini sur Y' ; on peut naturellement supposer X' irréductible , en remplaçant X' par le plus petit sous-schéma fermé de X' majorant U ; si en outre X est réduit , on peut aussi supposer que X' est réduit (en remplaçant le morphisme $g : X'\to Y'$ par g_{red}) . Enfin , il est clair que g est toujours dominant .

Corollaire 2 .- Sous les hypothèses du cor.1 pour X,Y et f , pour que f soit équidimensionnel au point $y\in Y$ (resp. équidimensionnel) , il faut et il suffit que toutes les composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ (resp. pour tout $y\in Y$) soient de dimension e .

On notera que l'hypothèse que f est équidimensionnel n'exclut pas le cas où certaines fibres $f^{-1}(y)$ seraient vides ; si on suppose en outre f surjectif , alors f est strictement équidimensionnel .

Corollaire 3 .- Sous les hypothèses du cor.1 pour X,Y et f , supposons f équidimensionnel au point y (resp. équidimensionnel) . Alors si on pose $S=\underline{Z}[T_1,\dots,T_r]$, $X^S=X\times_{\underline{Z}}S$, $Y^S=Y\times_{\underline{Z}}S$, le morphisme $f^S : X^S\to Y^S$ est équidimensionnel en tout point de Y^S au-dessus de y (resp. équidimensionnel) .

Il est immédiat que X^S et Y^S sont localement noethériens et irréductibles ; si ξ, η, η' sont les points génériques de X, Y, et Y^S , et g le morphisme $Y^S \to Y$, on a $g(\eta')=\eta$, $f(\xi)=\eta$, donc (I,2,6,prop.10), en posant $f'=f^S$, $f'^{-1}(\eta')$ n'est pas vide , et par suite f' est dominant . En outre , $\kappa(\eta')=\kappa(\eta)(T_1,\ldots,T_r)$, ; de même , si ξ' est le point générique de X^S on a $\kappa(\xi')=\kappa(\xi)(T_1,\ldots,T_r)$, donc la fibre générique $f'^{-1}(\eta')$ a encore pour dimension e . Il suffit alors de vérifier le critère (ii) du cor.1 , savoir que pour tout y' tel que $g(y')=y$, on a $\dim(f'^{-1}(y')) \leq e$. Or , on a $f'^{-1}(y')=f^{-1}(y) \otimes_{\kappa(y)} \kappa(y')$ (I,2,7, prop.18) , donc $\dim(f'^{-1}(y'))=\dim(f^{-1}(y))$ (I,7,2,cor.4 de la prop.7) ,d'où la conclusion .

4 . Morphismes universellement ouverts .

On a défini au n°1 la notion d'anneau local (intègre) *unibranche* .

Définition 3 .- On dit qu'un anneau local intègre A est géométriquement unibranche si A est unibranche (donc sa clôture intégrale A' est un anneau local) *et si de plus le corps résiduel de A' est radiciel sur le corps résiduel de A* .

Dire que A est unibranche (resp. géométriquement unibranche) signifie encore que , pour le morphisme $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$, la fibre du point fermé y de Spec(A) est réduite à un point (resp. que son nombre géométrique de points (I,4,2)) est égal à 1) .

Lemme 3 .- Pour qu'un anneau local intègre A , de corps des fractions K , soit unibranche (resp. *géométriquement unibranche*) *, il faut et il suffit que tout sous-anneau $A'' \supset A$ de K , fini sur A , soit un anneau local* (resp. *soit un anneau local et ait un corps résiduel radiciel sur celui de A*) .

La condition est évidemment nécessaire puisque $A \subset A'' \subset A'$ (et le résultat est même valable en supposant seulement A'' *entier* (mais non nécessairement fini sur A). Inversement , si A' contient deux idéaux maximaux distincts $\underline{m}',\underline{m}''$ tels que $\underline{m}'\cap A=\underline{m}''\cap A=\underline{m}$, idéal maximal de A, en prenant x' (resp. x'') dans $\underline{m}'$ et non dans $\underline{m}''$ (resp. dans $\underline{m}''$ et non dans $\underline{m}'$) , et en considérant le sous-anneau $A''=$ $=A[x',x'']$, qui est fini sur A , $\underline{m}'\cap A''$ et $\underline{m}''\cap A''$ sont des idéaux maximaux distincts de A'' , puisque A' est entier sur A'' .

Si A' est un anneau local ,et si p est l'exposant caractéristique de k, dire que le corps résiduel de A' est radiciel sur k signifie que pour tout $x\in A'\otimes_A k$,il existe un entier $e\geqslant 0$,un $y\in k$ et un entier $n>0$ tels que $(x^{p^e}-y)^n=0$,et A' possède cette propriété lorsqu tout sous-anneau $A''\supset A$, fini sur A , la possède .

<u>Définition 4 .- Soient A un anneau local quelconque , $\underline{N}$ l'idéal de ses éléments nilpotents . On dit que A est unibranche</u> (resp. <u>géométriquement unibranche) si $A/\underline{N}$ est intègre</u> (autrement dit si Spec(A) est irréductible) <u>et unibranche</u> (resp. <u>géométriquement unibranche</u>) . <u>On dit qu'un point y d'un préschéma</u> Y <u>est unibranche</u> (resp. <u>géométriquement unibranche) si l'anneau local O_y est unibranche</u> (resp. <u>géométriquement unibranche</u>) .

<u>Lemme 4 .- Si un point y d'un préschéma</u> Y <u>est géométriquement unibranche , il en est de même de tout point du préschéma</u> $Y'=Y\otimes_{\underline{Z}}\underline{Z}[T_1,\ldots,T_r]$ <u>au-dessus de y</u> .

En effet , si $A=O_y$, on peut se borner au cas où Y=Spec(A) (I,2,7, prop.19) ; si $\underline{N}$ est l'idéal des éléments nilpotents de A, $(A/\underline{N})[T_1,\ldots,T_r]$ n'a pas d'éléments nilpotents , donc on peut se borner au cas où A est intègre , et il en est de même alors de $B=$ $=A[T_1,\ldots,T_r]$.Il s'agit alors de montrer tout d'abord que si $\underline{p}$ est un idéal premier de B tel que $\underline{p}\cap A$ sit l'idéal maximal $\underline{m}$ de A, la clôture intégrale de $B_{\underline{p}}$ est un anneau local.Or,si A' est la clôture intégrale de A, on sait (   ) que $B'=A'[T_1,\dots,T_r]$ est intégralement clos, donc est la clôture intégrale de B. Si $S=B-\underline{p}$, la clôture intégrale de $B_{\underline{p}}$ est donc $S^{-1}B'$, et par suite les idéaux premiers de $S^{-1}B'$ dont l'intersection avec $B_{\underline{p}}$ est $\underline{p}B_{\underline{p}}$ correspondent biunivoquement aux idéaux premiers $\underline{p}'$ de B' tels que $\underline{p}'\cap B=\underline{p}$. Or, pour un tel idéal, $\underline{p}'\cap A'$ est nécessairement l'unique idéal maximal $\underline{m}'$ de A' ; si $k'=A'/\underline{m}'$, les idéaux $\underline{p}'$ considérés correspondent donc biunivoquement aux idéaux premiers $\underline{q}'=\underline{p}'/\underline{m}'B'$ de $k'[T_1,\dots,T_r]$ dont l'intersection avec $k[T_1,\dots,T_r]$ (où $k=A/\underline{m}$) est l'idéal $\underline{q}=\underline{p}/\underline{m}B$. Par hypothèse k' est radiciel sur k, donc on sait qu'il n'y a qu'un seul idéal premier de $k'[T_1,\dots,T_r]$ au-dessus de $\underline{p}/\underline{m}B$; en outre, le corps des fractions de $B'/\underline{p}'$, égal à celui de $k'[T_1,\dots,T_r]/\underline{q}'$, est radiciel sur le corps des fractions de $k[T_1,\dots,T_r]/\underline{q}$, égal au corps des fractions de $B/\underline{p}$, et cela achève la démonstration.

Lemme 5 (second théorème de Cohen-Seidenberg) .- *Soient A un anneau intègre, K son corps des fractions, B un anneau intègre contenant A, entier sur A et tel que $B\cap K=A$. Alors, pour tout idéal premier $\underline{p}'$ de B, tel que $\underline{p}'\cap A=\underline{p}$, et tout idéal premier $\underline{q}\subset\underline{p}$ de A, il existe un idéal premier $\underline{q}'\subset\underline{p}'$ de B, tel que $\underline{q}'\cap A=\underline{q}$.*

L'énoncé usuel de ce résultat est restreint au cas où A est intégralement clos ; mais la démonstration donnée par exemple dans le Sém. Cartan-Chevalley 1955-56, 1-09 et 1-10, s'étend sans difficulté au cas qui est envisagé ici.

Proposition 6 .- *Soient A un anneau intègre noethérien, K son corps des fractions, B un anneau intègre contenant A fini sur A et tel que $B\cap K=A$; soit $X=\mathrm{Spec}(B)$, $Y=\mathrm{Spec}(A)$. Alors le morphisme $f : X\to Y$ correspondant à l'injection $A\to B$ est ouvert.*

En effet, le lemme 5 montre que la condition (ii) de I, 7, 5, cor. 1 de la prop. 15 est vérifiée

Corollaire 1 .- Soient A *un anneau intègre noethérien* , K *son corps des fractions* , B *un anneau intègre contenant* A *et fini sur* A *; soit* $A'=B\cap K$. *Posons* $X=\mathrm{Spec}(B)$, $Y=\mathrm{Spec}(A)$, $Y'=\mathrm{Spec}(A')$, *et soient* $f : X\to Y$, $g : X\to Y'$, $h : Y'\to Y$ *les morphismes correspondant aux injections* $A\to B$, $A'\to B$, $A\to A'$. *Soit* $y\in Y$ *tel que* $h^{-1}(y)$ *soit réduit à un point* y' (resp. *ait un nombre géométrique de points égal à* 1 , autrement dit (I,4,2) soit telle que $\kappa(y')$ soit *radiciel* sur $\kappa(y)$) . *Alors f est ouvert* (resp. *universellement ouvert*) *au-dessus de* y .

La prop.6 montre que g est un morphisme ouvert ; d'autre part , on sait que h est une application *fermée* (II,2,7,prop.16) . Pour tout voisinage ouvert U d'un point $x\in f^{-1}(y)$, $g(U)$ est donc ouvert , et par suite $h(Y'-g(U))$ est fermé dans Y ; d'ailleurs h est dominant , donc surjectif , et par suite $h(g(U))=f(U)$ contient le complémentaire de $h(Y'-g(U))$; d'autre part y n'appartient pas à $h(Y'-g(U))$, puisque $y'\in g(U)$ et que $h^{-1}(y)=\{y'\}$; donc $f(U)$ est un voisinage de y . Supposons en outre que $\kappa(y')$ soit radiciel sur $\kappa(y)$, et considérons un point y_1 de $Y_1=Y\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_r]$ au-dessus de y ; posons $Y'_1=Y'\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_r]$; l'hypothèse entraîne que l'image réciproque de y_1 par le morphisme $h_1 : Y'_1\to Y_1$ est encore réduite à un seul point (I,4,2,prop.14) . D'autre part , $K(T_1,\dots,T_r)$ est le corps des fractions de $A[T_1,\dots,T_r]$, et il est clair que $B[T_1,\dots,T_r]$ est intègre et fini sur $A[T_1,\dots,T_r]$; en outre , on a $B[T_1,\dots,T_r]\cap K(X_1,\dots,X_r)=A'[T_1,\dots,T_r]$, tout système linéaire à coefficients dans K qui admet des solutions dans un surcorps de k admettant aussi des solutions dans K . Si $X_1=X\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_r]$, on peut donc appliquer au point y_1 et au morphisme $f_1 : X_1\to Y_1$ la première partie du raisonnement , et par suite f_1 est ouvert au-dessus de y_1 . On en conclut que f est universellement ouvert au-dessus de y , par le raisonnement du cor.2 de I,7,5,prop.15 .

Corollaire 2 .- Soient Y un préschéma irréductible localement noethérien , X un préschéma irréductible , $f : X \to Y$ un morphisme fini dominant . Soit y un point unibranche (resp. géométriquement unibranche) de Y ; alors f est ouvert (resp. universellement ouvert) au-dessus de y .

Remplaçant f par f_{red} , on peut se ramener au cas où X et Y sont intègres (II,2,6,prop.15), et comme la question est locale sur Y , on peu supposer Y (et par suite X) affine . Tout anneau intermédiaire entre O_y et sa clôture intégrale est (resp. un anneau local alors un anneau local) dont le corps résiduel est radiciel sur $k(y)$) ; les hypothèses du cor.1 sont par suite remplies .

Théorème 5 .- Soient Y un préschéma localement noethérien , $f : X \to Y$ un morphisme de type fini , y un point de Y .

(i) Supposons X et Y irréductibles. Si f est ouvert au-dessus de y, f est équidimensionnel en y .

(ii) Supposons le point y géométriquement unibranche . Si f est équidimensionnel en y , il est universellement ouvert en y .

L'assertion (i) a déjà été démontrée dans I,7,5,prop.16 , compte tenu du critère (ii) du th.4 pour que f soit équidimensionnel en y . Pour prouver (ii) , il suffit de montrer que f est ouvert au-dessus de y . En effet (si ce point est établi , et) si on pose $S=Z[T_1,\dots,T_r]$, $f^S : X^S \to Y^S$ est équidimensionnel en tout point $y' \in Y^S$ au-dessus de y (cor.3 du th.4) , et d'autre part y' est géométriquement unibranche (lemme 4) , donc f^S est ouvert au-dessus de y' , et cela montre que f est universellement ouvert au-dessus de y par le raisonnement de I,7,5,cor.2 de la prop.15

La question étant locale en X (pour un point de $f^{-1}(y)$) , on peut, en vertu du th.4 (iii), supposer que X est fini sur $Y'=Y\otimes_{Z}Z[T_1,\ldots,T_e]$. Si h est le morphisme $Y'\to Y$, pour toute partie fermée irréductible Z de Y, $h^{-1}(Z)$ est irréductible et son image dans Y est dense dans Z, car on peut considérer le sous-préschéma fermé rédu*i*t de Y ayant Z pour espace sous-jacent (I,3,4,prop.9), et il est clair alors (en se ramenant au cas où Y est affine) que $Z\otimes_{Z}Z[T_1,\ldots,T_e]$ est intègre et que h transforme le point générique de ce schéma en le point générique de Z. On peut donc appliquer au morphisme h le critère de I,7,5,cor.1 de la prop.15, et cela prouve que h est *ouvert*. D'autre part (lemme 4), tout point y' de Y' au-dessus de y est géométriquement unibranche. D'après le th.4 (iii) et l'hypothèse sur f, on peut en outre supposer que le morphisme $g : X\to Y'$ est tel que pour ce morphisme, toute composante irréductible de X domine une composante irréductible de Y'. Alors, le cor.2 de la prop.6 montre que la restriction de g à toute composante irréductible de X est ouvert au-dessus de y'; on en conclut aussitôt que g est ouvert au-dessus de y', donc que $f=h\circ g$ est ouvert au-dessus de y.

Corollaire 1.- Les hypothèses sur X,Y *et f étant celles du th.5* :

(i) *Si* X *et* Y *sont irréductibles et si f est ouvert, f est équidimensionnel*.

(ii) *Si tout point de* Y *est géométriquement unibranche et si f est équidimensionnel, f est universellement ouvert*.

Corollaire 2.- Les hypothèses sur X,Y,*f étant celles du th.5* :

(i) *Si* X *et* Y *sont irréductibles et* $y\in Y$ *géométriquement unibranche, les conditions suivantes sont équivalentes* :

a) *f est universellement ouvert en y* ; b) *f est ouvert en y* ; c) *f est équidimensionnel en y*.

(ii) <u>Si</u> X <u>et</u> Y <u>sont irréductibles et tout point de</u> Y <u>géométriquement unibranche , les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

<u>a) f est universellement ouvert ; b) f est ouvert ; c) f est équidimensionnel</u> .

On notera que ces résultats s'appliquent a fortiori lorsque Y est <u>normal</u> .

<u>Remarques</u> .- 1) Le résultat (ii) du th.5 a été démontré par C.Chevalley pour les schémas algébriques , en supposant Y normal .

2) L'hypothèse que y est géométriquement unibranche est <u>nécessaire</u> pour que l'assertion (ii) du th.5 soit valable pour <u>tout</u> morphisme de type fini équidimensionnel en y . Supposons en effet que y ne soit pas géométriquement unibranche , et montrons que dans ces conditions on peut définir un morphisme $f : X \to Y$ de type fini , équidimensionnel en y , et un préschéma Y' fini sur Y et tel que f' ne soit pas universellement ouvert au-dessus d'un point $y' \in Y'$ au-dessus de y . Si y appartient à plus d'une composante irréductible de Y , il suffit de prendre pour X une de ces composantes , pour f le morphisme d'injection d'un sous-préschéma fermé ayant X pour espace sous-jacent ; il est clair déjà ici que f n'est même pas ouvert au-dessus de y . Si y n'appartient qu'à une seule composante irréductible de Y , on peut , comme la question est locale sur Y , se borner au cas où Y est irréductible , et en remplaçant Y par Y_{red} (ce qui laisse le point y non géométriquement unibranche , par définition) , on peut supposer Y <u>intègre</u> et <u>affine</u> . Soit donc Y=Spec(A) , où A est noethérien et intègre , de corps des fractions K ; par hypothèse, il existe un sous-anneau $A' \supset A_y$, fini sur A_y, de K qui ne soit pas un anneau local , ou qui soit un anneau local dont le corps résiduel n'est pas radiciel sur le corps résiduel k de A_y . Il est immédiat qu'il y a un système fini de générateurs de A' en tant que A_y -mo-

dule , qui sont de la forme b_i/c , où les b_i sont entiers sur A et $c \in A - \mathfrak{j}_y$; soit B le sous-anneau de K , fini sur A , engendré par les b_i . Nous prendrons $X=\mathrm{Spec}(B)$, de sorte que X est intègre et que le morphisme $f : X \to Y$ est fini, dominant et birationnel ; en outre , l'hypothèse signifie qu'ou bien il y a deux points distincts x_1,x_2 de X au-dessus de y , ou bien il n'y a qu'un seul point x au-dessus de y , mais $\kappa(x)=L$ n'est pas radiciel sur $\kappa(y)=k$. Dans les deux cas , nous prendrons $Y'=X$, le morphisme $g : Y' \to Y$ étant égal à f . Notons d'abord que si η est le point générique de Y , la fibre de $X \times_Y X$ au-dessus de η est le spectre premier de $(B\otimes_A B)\otimes_A \kappa(\eta)=(B\otimes_A B)\otimes_A K$; mais comme $B\otimes_A K$ s'identifie canoniquement à K , il en est de même de $(B\otimes_A B)\otimes_A K = B\otimes_A(B\otimes_A K)$. On en conclut que cette fibre se réduit à un point ζ , qui est point générique d'une composante irréductible de $X \times_Y X$ (I,2,7,prop.19) . En outre comme il existe toujours au moins un point de la diagonale Z de $X \times_Y X$ au-dessus de η , ce point ne peut être que ζ , et puisque Z est fermé dans $X \times_Y X$ (le morphisme f étant séparé) , et isomorphe à X , donc irréductible , on en conclut que Z est une composante irréductible de $X \times_Y X$. Cela étant , supposons d'abord qu'il y ait deux points distincts x_1,x_2 de X au-dessus de y ; alors il existe un point $t \in X \times_Y X$ dont la première projection est x_1 et la seconde x_2 (I,2,6, prop.10) ; il est clair que $t \notin Z$, et par suite , si Z' est une composante irréductible de $X \times_Y X$ contenant t , cette composante ne contient pas ζ , et par suite sa seconde projection sur X n'est pas dense. Or le morphisme seconde projection n'est autre que ce qui a été noté en général $f^{Y'}$, et comme $f^{Y'}(t)=x_2$ est au-dessus de y , on voit que f n'est pas universellement ouvert au-dessus de y, en vertu de I,7,5,cor.4 de la prop.15 .

Si maintenant $f^{-1}(y)$ est réduit à un seul point x , la fibre $(f^{Y'})^{-1}(x)$ est le spectre premier de $(B\otimes_A L)\otimes_A L=B\otimes_A(L\otimes_A L)$, et par hypothèse $[L:k]_s=n>1$. Comme $L\otimes_A L=L\otimes_k(k\otimes_A L)=(L\otimes_k L)\otimes_A k$, et que le spectre de $L\otimes_k L$ comporte au moins deux points distincts , il en est de même du spectre de $L\otimes_A L$, et par suite $(f^{Y'})^{-1}(x)$ a au moins 2 points distincts . L'un de ces points n'est donc pas sur la diagonale , et on peut conclure le raisonnement comme ci-dessus .

3) Il serait intéressant , pour un morphisme $f : X\to Y$ <u>donné</u> , d'avoir une condition nécessaire et suffisante pour que f soit universellement ouverte au-dessus d'un point $y\in Y$. Si $Y=\mathrm{Spec}(A)$ est intègre noethérien , $X=\mathrm{Spec}(B)$ intègre, fini sur Y et dominant Y, on a la condition nécessaire et suffisante suivante : si K est le corps des fractions de A , $A'=B\cap K$ et $Y'=\mathrm{Spec}(A')$, il faut et il suffit que , si on désigne par h le morphisme $Y'\to Y$, $h^{-1}(y)$ ait un nombre géométrique de points égal à 1 . En effet , la condition est suffisante en vertu du cor.1 de la prop.6 , et on voit qu'elle est nécessaire comme dans la Remarque 2 , en considérant $X^{Y'}=(Y'\times_Y Y')\times_{Y'}X$.

Lorsqu'on ne suppose plus B entier sur A, on peut désigner par A' la clôture intégrale de A dans $B\cap K$, et se demander si la condition précédente (jointe à l'hypothèse que f est équidimensionnel en y) est encore suffisante pour que f soit universellement ouvert au-dessus de y ; le même raisonnement montre toujours que la condition est nécessaire .

Archives
Grothendieck sept 59

P.III-8 , after line 1 , add :

Remarque .- On notera que la conclusion de la prop.3 est encore valable lorsqu'on suppose seulement que les intersections finies des U_α sont des ouverts affines .

P. III-9 , before n°5 , insert :

Proposition 5 .- Soient $u : X \to Y$ un morphisme séparé de type fini , Y' un schéma local d'anneau B , $\psi : Y' \to Y$ un morphisme dont la factorisation canonique $Y' \to \mathrm{Spec}(O_y) \to Y$ (I,2,2) est telle que B soit un O_y-module plat . Alors , pour tout faisceau cohérent $\underline{F}$ sur X , $R^q u_*^{Y'}(\underline{F} \otimes_{O_Y} O_{Y'})$ est canoniquement isomorphe à $R^q u_*(\underline{F}) \otimes_{O_Y} O_{Y'}$ pour tout $q \geq 0$.

On peut évidemment supposer $Y = \mathrm{Spec}(A)$ affine et X réunion finie d'ouverts affines U_i $(1 \leq i \leq r)$; comme ψ est affine , il en est de même de $v : X' = X^{Y'} \to X$ (II,2,6,prop.12) et les $U'_i = v^{-1}(U_i)$ forment donc un recouvrement ouvert affine U' de ~~XX~~ X' . Conservons les notations de la démonstration de la prop.3, et posons en outre $\underline{F}' = \underline{F} \otimes_{O_Y} B$ $U'_s = U'_{i_0 \ldots i_p} = v^{-1}(U_s)$, $M'_s = \Gamma(U'_s, \underline{F}')$; compte tenu de la Remarque suivant la prop.3 et du cor. de la prop.4 , il suffit de montrer que $H^q(\underline{U}', \underline{F}')$ est canoniquement isomorphe à $H^q(\underline{U}, \underline{F}) \otimes_A B$; or M'_s s'identifie à $M_s \otimes_A B$ (II,1,1,prop.7) ; donc $C^p(\underline{U}', \underline{F}')$ s'identifie canoniquement à $C^p(\underline{U}, \underline{F}) \otimes_A B$, et l'opérateur cobord $C^p(\underline{U}', \underline{F}') \to C^{p+1}(\underline{U}', \underline{F}')$ à $d \otimes 1$. Mais comme A_y est un A-module plat , et B un A_y-module plat par hypothèse , B est un A-module plat , et il résulte bien des défi- ~~XXXXX~~ nitions que $H^q(\underline{U}', \underline{F}')$ s'identifie à $H^q(\underline{U}, \underline{F}) \otimes_A B$.

Ce résultat sera généralisé au § 4 (n°).

P. III-8 , add to prop.4 :

En outre , si (V_α) est finie et a r éléments , on a $R^q u_*(\underline{F})=0$ pour tout $q>r$.

P. III-9 , at the end of the proof of prop.4 , add :

La dernière assertion est immédiate , car on a alors $H^q(\underline{U},\underline{F})=0$ pour tout $q>r$, puisque le recouvrement $\underline{U}$ a au plus r éléments et que les cochaînes de $C^q(\underline{U},\underline{F})$ sont alternées .

P. III-27 , after cor.2 to prop.5 , ~~XXXXX~~ replace the next two lines by :

Proposition 6 .- Soient Y un préschéma , $\underline{E}$ un O_Y-Module localement libre de rang $r+1$, $X=\underline{P}(\underline{E})$ le fibré projectif associé , $f : X \to Y$ le morphisme structural . Les seules valeurs de i et n telles que $R^i f_*(O_X(n))\neq 0$ sont $i=0$ et $n\geq 0$, $i=r$ et $n\leq -(r+1)$; en outre l'homomorphisme canonique

$$\alpha \ : \underline{S}_{O_Y}(\underline{E}) \to \Gamma_*(O_X)=R^0 f_*(O_X(*))=\bigoplus_{n\in\underline{Z}} f_*(O_X(n))$$

est un isomorphisme .

La question étant locale sur Y , on peut supposer Y affine d'anneau A et $\underline{E}=\tilde{E}$, où $E=A^{r+1}$; on est alors immédiatement ramené à la prop.5. Nous complèterons plus tard ce résultat en explicitant le faisceau $R^r f_*(O_X(n))$.

P. III-52 , after the first line , insert :

On notera que pour tout ouvert $U\subset X$, les homomorphismes canoniques $\Gamma(U,\underline{F}) \to \Gamma(U,\underline{F}\otimes_{O_X} O_X/\underline{J}^n)$ provenant de $\underline{F}\to\underline{F}\otimes_{O_X} O_X/\underline{J}^n$, forment un système projectif d'homomorphismes et donnent donc à la limite un homomorphisme $\Gamma(U,\underline{F}) \to \Gamma(U,\underline{F}_{/X'})$ en vertu de (1). On vérifie aussitôt que ces homomorphismes sont compatibles avec les opérations de res~~XX~~triction , ~~XXXXXXXXXXXXXXXX~~ et définissent donc un homomorphisme de O_X-modules $\underline{F}\to\underline{F}_{/X'}$, dit canonique .

Si $u : \underline{F}\to\underline{G}$ est un homomorphisme de O_X-modules , on en déduit canoniquement de u des homomorphismes $\Gamma(U,\underline{F}\otimes O_X/\underline{J}^n) \rightarrow$ $\rightarrow \Gamma(U,\underline{G}\otimes O_X/\underline{J}^n)$ pour tout n , et il est immédiat que ces homomorphismes forment un système projectif , d'où à la limite un homomorphisme $\Gamma(U,\underline{F}_{/X'}) \rightarrow \Gamma(U,\underline{G}_{/X'})$. En outre , ces homomorphismes sont compatibles avec les opérations de restriction , et donnent donc un homomorphisme de $(O_X)_{/X'}$-modules $u_{/X'} : \underline{F}_{/X'} \rightarrow \underline{G}_{/X'}$, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \underline{F} & \longrightarrow & \underline{F}_{/X'} \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_{/X'}} \\ \underline{G} & \longrightarrow & \underline{G}_{/X'} \end{array}$$

soit commutatif (les lignes étant les homomorphismes canoniques) . On écrira parfois , lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre , $\hat{\underline{F}}$ et $\hat{u}$ au lieu de $\underline{F}_{/X'}$ et $u_{/X'}$.

P. III-55 , before prop.4 , add :

En outre il résulte de cette définition que si $\rho : O_X \rightarrow (O_X)_{/X'}$ et $\sigma : O_Y \rightarrow (O_Y)_{/Y'}$ sont les homomorphismes canoniques , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \psi^*(O_Y) & \xrightarrow{\psi^*(\sigma)} & \psi^*((O_Y)_{/Y'}) \\ {\scriptstyle \rho^b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \omega} \\ O_X & \xrightarrow[\rho]{} & (O_X)_{/X'} \end{array}$$

est commutatif .

P.III-50 , before section 3 , insert :

2 . Schémas complets .

On dit qu'un préschéma X est complet s'il existe un anneau artinien A et un morphisme propre $f : X \to Y = \mathrm{Spec}(A)$; il est clair que X est alors un schéma noethérien . Si X est complet et Z propre au-dessus de X , il est clair que Z est complet (II,5,1,prop.2 (ii)) ; en particulier tout sous-préschéma fermé d'un schéma complet est complet Pour qu'un schéma noethérien X soit complet , il faut et il suffit que ses composantes irréductibles le soient (II,5,1,cor.2 de la prop.2). Comme toute algèbre sur un anneau artinien A,qui est un A-module de type fini,est artinienne , les schémas affines complets ne sont autres que les schémas artiniens (II,5,1,cor,2 de la prop.3) .

Proposition 0 .- Si X est un schéma complet , l'anneau $\Gamma(X,O_X)$ est artinien : si X_i $(1 \leq i \leq n)$ sont les composantes connexes de X , les anneaux $\Gamma(X_i,O_{X_i})$ s'identifient aux composants locaux de l'anneau $\Gamma(X,O_X)$.

Comme X est propre au-dessus de $Y=\mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau artinien , $\Gamma(X,O_X)=H^0(X,O_X)$ est un A-module de type fini (n°1, cor.2 du th.1) , d'où la première assertion . Posons $B=\Gamma(X,O_X)$ et $Z=\mathrm{Spec}(B)$; l'isomorphisme identique de B sur lui-même définit un morphisme $g : X \to Z$ (I,2,2,prop.3) ; comme le morphisme $Z \to Y$ est affine ,donc séparé , g est propre (II,5,1,prop.2 (v)) . D'autre part , Z est fini et discret (I,4,1,prop.4) ; si z_i $(1 \leq i \leq m)$ sont les points de Z , X est somme des sous-préschémas induits sur les $X_i' = g^{-1}(z_i)$, et les morphismes $X_i' \to \{z_i\}$ correspondent aux applications identiques $O_{z_i} \to \Gamma(X_i',O_{X_i'})$. Tout revient donc à prouver que lorsque B est un anneau local , X est connexe , ce qui est immédiat , B ne pouvant être composé direct de deux sous-anneaux non réduits à 0 .

P. III-86 , after the proof of th.2 , insert :

<u>Remarque</u> .- Si X est réduit (resp. irréductible et X' non vide) , on peut supposer ,dans l'énoncé du th.2 , que Y' est réduit (resp. irréductible) . En effet , on peut toujours remplacer Y' par le plus petit sous-préschéma fermé Y'' de Y' majorant le sous-préschéma X' (II, 1,2,prop.8 et II,2.7,prop.15) , et on sait que si X' est réduit , il ~~XXX~~ en est de même de X'' (II,1,2,cor.4 de la prop.8) ; par ailleurs si l'espace X' n'est pas vide , comme il est ouvert dans X , il est irréductible en même temps que X , et il en est alors de même de son adhérence X'' dans l'espace Y' .

P. III-90 , before n°3 , insert :

<u>Proposition 4 .- Si</u> Y <u>est localement noethérien et si</u> $f : X \to Y$ <u>est quasi-fini , on a</u> $\dim X \leq \dim Y$.

On peut évidemment supposer X et Y réduits (prop.3,(vi)) , et il suffit de prouver que pour toute composante irréductible X_α de X , $\dim X_\alpha \leq \dim Y$, donc on peut se borner au cas où X est ~~irréductible~~ intègre (prop.3 ,(i) et (ii)) . En outre , comme X est réduit , on peut se borner au cas où f est dominant (prop.3 (v) et I,3,4,cor. de la prop.9) (donc Y irréductible) . On est alors dans les conditions d'application de I,7,2, cor.3 du th.1 , et comme par définition on a $e=0$, la conclusion en résulte .