Archives
Grothendieck, sept. 59.

n° 326 bis

CHAPITRE 0

PRÉLIMINAIRES.

§1. Algèbre commutative.

Nous rappelons dans ce paragraphe certaines définitions et certains résultats d'algèbre commutative, dont nous nous servirons souvent par la suite. Nous omettrons la plupart des démonstrations, renvoyant par exemple aux chap. I et II de l'*Algèbre commutative* de N. Bourbaki.

Sauf mention expresse du contraire, tous les anneaux considérés seront commutatifs et munis d'un élément unité, et tous les modules sur un tel anneau seront supposés unitaires. Les homomorphismes d'anneaux seront toujours supposés transformer l'élément unité en élément unité, et sauf mention expresse du contraire, un sous-anneau d'un anneau A sera supposé contenir l'élément unité de A. Un anneau *intègre* est un anneau dans lequel le produit d'une famille finie d'éléments $\neq 0$ est $\neq 0$; il revient au même de dire que dans un tel anneau on a $0 \neq 1$ et le produit de deux éléments $\neq 0$ est non nul. Un idéal *premier* $\mathfrak{p}$ d'un anneau A est un idéal tel que $A/\mathfrak{p}$ soit intègre; cela entraîne donc $\mathfrak{p} \neq A$. Pour qu'un anneau A ait au moins un idéal premier, il faut et il suffit que $A \neq \{0\}$.

1. *Racine d'un idéal*.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal d'un anneau A; la *racine* de $\mathfrak{a}$, notée $r(\mathfrak{a})$, est l'ensemble des $x \in A$ tels que $x^n \in \mathfrak{a}$ pour un entier $n > 0$ au moins; c'est un idéal contenant $\mathfrak{a}$. On a $r(r(\mathfrak{a})) = r(\mathfrak{a})$; la relation $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ entraîne $r(\mathfrak{a}) \subset r(\mathfrak{b})$; la racine d'une intersection d'idéaux est l'intersection de leurs racines. Si φ est un homomorphisme d'un anneau A' dans A, on a $r(\varphi^{-1}(\mathfrak{a})) = \varphi^{-1}(r(\mathfrak{a}))$ pour tout idéal $\mathfrak{a} \subset A$. Pour qu'un idéal soit racine d'un idéal, il faut et il suffit qu'il soit intersection d'idéaux premiers. La racine d'un idéal $\mathfrak{a}$ est l'intersection des idéaux premiers minimaux parmi ceux qui contiennent $\mathfrak{a}$; si A est noethérien, ces idéaux premiers minimaux sont en nombre fini.

2. Modules et anneaux de fractions.

On dit qu'une partie S d'un anneau A est multiplicative si $1 \in S$ et si le produit de deux éléments de S est dans S. Les exemples qui seront les plus importants pour la suite sont: 1° l'ensemble des puissances f^n $(n \geq 0)$ d'un élément $f \in A$; 2° le complémentaire $A - p$ d'un idéal premier p de A.

Soient S un ensemble multiplicatif dans A, M un A-module; dans l'ensemble $M \times S$, la relation entre couples $(m_1, s_1), (m_2, s_2)$:

$$\text{"il existe } s \in S \text{ tel que } s(s_1 m_2 - s_2 m_1) = 0\text{"}$$

est une relation d'équivalence. On désigne par $S^{-1}M$ l'ensemble quotient de $M \times S$ par cette relation, par m/s l'image canonique dans $S^{-1}M$ du couple (m, s); on appelle application canonique de M dans $S^{-1}M$ l'application $i_M^S : m \to m/1$. Cette application n'est en général ni injective ni surjective; son noyau est l'ensemble des $m \in M$ tels qu'il existe un $s \in S$ pour lequel $sm = 0$.

Dans $S^{-1}M$ on définit une loi de groupe additif en prenant $m_1/s_1 + m_2/s_2 = (s_2 m_1 + s_1 m_2)/s_1 s_2$ (on vérifie que c'est bien indépendant des expressions des éléments de $S^{-1}M$ considérés). Sur $S^{-1}A$ on définit aussi une loi multiplicative $(a_1/s_1)(a_2/s_2) = (a_1 a_2)/(s_1 s_2)$, et enfin une loi externe sur $S^{-1}M$ ayant $S^{-1}A$ comme ensemble d'opérateurs en posant $(a/s)(m/s') = (am)/(ss')$. On vérifie ainsi que $S^{-1}A$ est muni d'une structure d'anneau (dit anneau des fractions de A à dénominateurs dans S) et $S^{-1}M$ d'une structure de $S^{-1}A$-module (dit module des fractions de M à dénominateurs dans S).

L'anneau de fractions $S^{-1}A$ et l'application canonique i_A^S sont solution d'un problème d'application universelle: tout homomorphisme u de A dans un anneau B tel que u(S) se compose d'éléments inversibles dans B se factorise d'une seule manière en

$$A \xrightarrow[i_A^S]{} S^{-1}A \xrightarrow[u^*]{} B$$

où u^* est un homomorphisme de l'anneau $S^{-1}A$ dans l'anneau B.

On définit un isomorphisme canonique $S^{-1}A \otimes_A M \xrightarrow{\sim} S^{-1}M$ en faisant correspondre à l'élément $(s/s) \otimes m$ l'élément $(sm)/s$, l'isomorphisme réciproque appliquant m/s sur $(1/s) \otimes m$.

Notons enfin que l'application $p' \to (i_A^S)^{-1}(p')$ est un isomorphisme pour la structure d'ordre de l'ensemble des idéaux premiers de $S^{-1}A$ sur l'ensemble des idéaux premiers de A qui ne rencontrent pas S.

3. Propriétés fonctorielles.

Soient M,N deux A-modules, u un A-homomorphisme de M dans N. Si S est une partie multiplicative de A, on définit un $S^{-1}A$-homomorphisme de $S^{-1}M$ dans $S^{-1}N$, noté $S^{-1}u$, en posant $(S^{-1}u)(m/s) = u(m)/s$; si $S^{-1}M$ et $S^{-1}N$ sont identifiés canoniquement à $S^{-1}A \otimes_A M$ et $S^{-1}A \otimes_A N$, $S^{-1}u$ est identifié à $1 \otimes u$. Si P est un troisième A-module, v un A-homomorphisme de N dans P, on a $S^{-1}(v \circ u) = (S^{-1}v) \circ (S^{-1}u)$; autrement dit, $M \to S^{-1}M$ est un foncteur covariant de la catégorie des A-modules dans celle des $S^{-1}A$-modules (A et S étant fixés). En outre ce foncteur est exact, autrement dit, si la suite

$$M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$$

est exacte, il en est de même de la suite

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}u} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}v} S^{-1}P.$$

Soit $(M_\alpha, \varphi_{\beta\alpha})$ un système inductif de A-modules; alors $(S^{-1}M_\alpha, S^{-1}\varphi_{\beta\alpha})$ est un système inductif de $S^{-1}A$-modules. Exprimant les $S^{-1}M_\alpha$ et $S^{-1}\varphi_{\beta\alpha}$ comme des produits tensoriels, il résulte de la permutabilité des opérations de produit tensoriel et de limite inductive, que l'on a un isomorphisme canonique

$$S^{-1} \varinjlim M_\alpha \xrightarrow{\sim} \varinjlim S^{-1}M_\alpha .$$

Soient M,N deux A-modules; il existe un $S^{-1}A$ isomorphisme canonique fonctoriel

$$(S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}N) \xrightarrow{\sim} S^{-1}(M \otimes_A N)$$

qui transforme $(m/s) \otimes (n/t)$ en $(m \otimes n)/st$. Utilisant une résolution projective de l'un des modules M,N, et le fait que $M \to S^{-1}M$ est un foncteur exact, on en conclut des isomorphismes canoniques fonctoriels (en M et N)

$$\mathrm{Tor}_i^{S^{-1}A}(S^{-1}M,S^{-1}N) \xrightarrow{\sim} S^{-1}\mathrm{Tor}_i^A(M,N) \qquad (i \geq 0).$$

On a de même un homomorphisme fonctoriel (en M et N)

$$S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M,N) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M,S^{-1}N)$$

qui, à u/s fait correspondre l'homomorphisme $m/t \to u(m)/st$. Lorsque M est le conoyau d'un homomorphisme $A^p \to A^q$, l'homomorphisme précédent est un isomorphisme; c'est immédiat lorsque M est de la forme A^r, et on passe de là au cas général en partant de la suite exacte $A^p \to A^q \to M \to 0$, et utilisant l'exactitude à droite des foncteurs $M \to S^{-1}M$ et $X \to \mathrm{Hom}(X,N)$. On notera que ce cas se présente toujours lorsque A est noethérien et le A-module M de type fini; en outre, sous ces hypothèses, en utilisant une résolution projective de M par des A-modules de type fini, on déduit de l'isomorphisme précédent des isomorphismes fonctoriels

$$S^{-1}\mathrm{Ext}_A^i(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_{S^{-1}A}(S^{-1}M,S^{-1}N) \qquad (i \geq 0).$$

4. Changement de partie multiplicative.

Soient S,T deux parties multiplicatives d'un anneau A telles que $S \subset T$; il existe un homomorphisme canonique $\rho_A^{T,S}$ (ou simplement $\rho^{T,S}$) de $S^{-1}A$ dans $T^{-1}A$, faisant correspondre à l'élément noté a/s de $S^{-1}A$ l'élément noté a/s dans $T^{-1}A$; on a $i_A^T = \rho_A^{T,S} \circ i_A^S$. Pour tout A-module M, il existe de même une application $S^{-1}A$-linéaire de $S^{-1}M$ dans $T^{-1}M$ (ce dernier étant considéré comme $S^{-1}A$-module grâce à l'homomorphisme $\rho_A^{T,S}$), faisant correspondre à l'élément m/s de $S^{-1}M$ l'élément m/s de $T^{-1}M$; on note cette application $\rho_M^{T,S}$ ou simplement $\rho^{T,S}$, et on a encore $i_M^T = \rho_M^{T,S} \circ i_M^S$. En outre, $\rho^{T,S}$ est un morphisme fonctoriel (ou transformation naturelle) du foncteur $M \to S^{-1}M$ dans le foncteur $M \to T^{-1}M$, autrement dit le diagramme

$$\begin{tikzcd} S^{-1}M \arrow[r, "S^{-1}u"] \arrow[d, "\rho_M^{T,S}"'] & S^{-1}N \arrow[d, "\rho_N^{T,S}"] \\ T^{-1}M \arrow[r, "T^{-1}u"] & T^{-1}N \end{tikzcd}$$

est commutatif, pour tout homomorphisme $u: M \to N$.

Si S, T, U sont trois parties multiplicatives de A telles que $S \subset T \subset U$ on a

$$(1) \qquad \rho^{U,S} = \rho^{U,T}\rho^{T,S}.$$

Considérons maintenant une famille filtrante croissante (S_α) de parties multiplicatives de A (on écrira $\alpha \leq \beta$ pour $S_\alpha \subset S_\beta$), et soit S la partie multiplicative $\bigcup_\alpha S_\alpha$; posons $\rho_{\beta\alpha} = \rho_A^{S_\beta,S_\alpha}$; en vertu de (1), les homomorphismes $\rho_{\beta\alpha}$ définissent un anneau A' <u>limite inductive</u> du système inductif d'anneaux $(S_\alpha^{-1}A, \rho_{\beta\alpha})$. Soient ρ_α l'application canonique de $S_\alpha^{-1}A$ dans A', et posons $\varphi_\alpha = \rho_A^{S,S_\alpha}$; comme $\varphi_\alpha = \varphi_\beta \circ \rho_{\beta\alpha}$ pour $\alpha \leq \beta$ d'après (1), on peut définir un homomorphisme $\varphi: A' \to S^{-1}A$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& S_\alpha^{-1}A \arrow[ddl, "\rho_\alpha"'] \arrow[d, "\rho_{\beta\alpha}"] \arrow[ddr, "\varphi_\alpha"] & \\
& S_\beta^{-1}A \arrow[dl, "\rho_\beta"'] \arrow[dr, "\varphi_\beta"] & \\
A' \arrow[rr, "\varphi"'] & & S^{-1}A
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. En fait, φ est un <u>isomorphisme</u>: il est en effet immédiat par construction que φ est surjectif. D'autre part, si $\rho_\alpha(a/s_\alpha) \in A'$ est tel que $\varphi(\rho_\alpha(a/s_\alpha)) = 0$, cela signifie que $a/s_\alpha = 0$ dans $S^{-1}A$, c'est-à-dire qu'il existe $s \in S$ tel que $sa = 0$; mais il y a un $\beta \geq \alpha$ tel que $s \in S_\beta$, et par suite, comme $\rho_\alpha(a/s_\alpha) = \rho_\beta(sa/ss_\beta) = 0$, on voit que φ est injectif. On traite de même le cas d'un A-module M, et on a ainsi défini des isomorphismes canoniques

$$\varinjlim S_\alpha^{-1}A \xrightarrow{\sim} (\varinjlim S_\alpha)^{-1}A, \qquad \varinjlim S_\alpha^{-1}M \xrightarrow{\sim} (\varinjlim S_\alpha)^{-1}M$$

le second étant <u>fonctoriel</u>.

Il y a un cas important dans lequel l'homomorphisme $\rho^{T,S}$ est <u>bijectif</u>, savoir lorsque tout élément de T est diviseur d'un élément de S; on identifie alors par $\rho^{T,S}$ les modules $S^{-1}M$ et $T^{-1}M$. On dit que S est <u>saturé</u> si tout diviseur d'un élément de S est dans S; en remplaçant S par l'ensemble T de tout les diviseurs des éléments de S (qui est multiplicatif et saturé), on voit qu'on peut toujours si l'on veut se limiter à la considération de modules $S^{-1}M$ où

S est saturé.

Considérons enfin deux parties multiplicatives S_1, S_2 de A; alors $S_1 S_2$ est aussi une partie multiplicative de A. Désignons par S_2' l'image canonique de S_2 dans l'anneau $S_2^{-1}A$, qui est une partie multiplicative de cet anneau. Il existe alors pour tout A-module M un isomorphisme fonctoriel de $S_2'^{-1}(S_1^{-1}M)$ sur $(S_1S_2)^{-1}M$, qui fait correspondre à $(m/s_1)/(s_2/1)$ l'élément m/s_1s_2.

5. <u>Changement d'anneau</u>.

Soient A, A' deux anneaux, φ un homomorphisme de A' dans A, S (resp. S') une partie multiplicative de A (resp. A'), telle que $\varphi(S') \subset S$; il est immédiat qu'on définit un homomorphisme $\varphi^{S'}$ de $S'^{-1}A'$ dans $S^{-1}A$ en posant $\varphi^{S'}(a'/s') = \varphi(a')/\varphi(s')$.

Soit maintenant M un A-module; l'homomorphisme φ définit sur M un structure de A'-module, en posant $a' \cdot m = (a')m$; on désignera ce A'-module par $M_{[\varphi]}$. Cela étant, il existe un homomorphisme fonctoriel

$$\sigma^S : S'^{-1}(M_{[\varphi]}) \to (S^{-1}M)_{[\varphi^{S'}]}$$

de $S'^{-1}A'$-modules, faisant correspondre à tout élément m/s' de $S'^{-1}(M_{[\varphi]})$ l'élément $m/\varphi(s')$ de $(S^{-1}M)_{[\varphi^{S'}]}$; on vérifie immédiatement en effet que cette définition ne dépend pas de l'expression m/s' de l'élément considéré. Si T (resp. T') est une seconde partie multiplicative de A (resp. A') telle que $S \subset T$ (resp. $S' \subset T'$) et $\varphi(T') \subset T$, les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} S'^{-1}A' & \xrightarrow{\varphi^{S'}} & S^{-1}A \\ {\scriptstyle \rho^{T',S'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^{T,S}} \\ T'^{-1}A' & \xrightarrow{\varphi^{T'}} & T^{-1}A \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} S'^{-1}(M_{[\varphi]}) & \xrightarrow{\sigma^S} & (S^{-1}M)_{[\varphi^{S'}]} \\ {\scriptstyle \rho^{T',S'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^{T,S}} \\ T'^{-1}(M_{[\varphi]}) & \xrightarrow{\sigma^T} & (T^{-1}M)_{[\varphi^{T'}]} \end{array}$$

sont commutatifs. En outre, <u>si</u> $S = \varphi(S')$, l'homomorphisme σ^S est <u>bijectif</u>.

Considérons maintenant un A'-module N'; formons le produit tensoriel $N' \otimes_{A'} A_{[\varphi]}$, qui peut être considéré comme un A-module en posant $a \cdot (n' \otimes b) = n' \otimes (ab)$. Il existe alors un isomorphisme fonctoriel de $S^{-1}A$-modules

$$\tau^S : (S'^{-1}N') \otimes_{S'^{-1}A'} (S^{-1}A)_{[\varphi^{S'}]} \xrightarrow{\sim} S^{-1}(N' \otimes_{A'} A_{[\varphi]})$$

qui, à l'élément $(n'/s') \otimes (a/s)$ fait correspondre l'élément $(n' \otimes a)/(\varphi(s')s)$; on vérifie en effet séparément que lorsqu'on remplace n'/s' (resp. a/s) par une autre expression du même élément, $(n' \otimes a)/\varphi(s')s$ ne change pas; d'autre part, on peut définir un homomorphisme réciproque de τ^S en faisant correspondre à $(n' \otimes a)/s$ l'élément $(n'/1) \otimes (a/s)$ (on utilise là le fait (n°2) que $S^{-1}(N' \otimes_{A'} A_{[\varphi]})$ est canoniquement isomorphe à $(N' \otimes_{A'} A_{[\varphi]}) \otimes_A S^{-1}A$ donc à $N' \otimes_{A'} (S^{-1}A)_{[\psi]}$, en désignant par ψ l'homomorphisme $a' \to \varphi(a')/1$ de A' dans $S^{-1}A$).

Si T (resp. T') est une seconde partie de A (resp. A') telle que $S \subset T$ (resp. $S' \subset T'$) et $\varphi(T') \subset T$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(S'^{-1}N') \otimes_{S'^{-1}A'} (S^{-1}A)_{[\varphi^{S'}]} \arrow[r, "\tau^S", "\sim"'] \arrow[d] & S^{-1}(N' \otimes_{A'} A_{[\varphi]}) \arrow[d] \\
(T'^{-1}N') \otimes_{T'^{-1}A'} (T^{-1}A)_{[\varphi^{T'}]} \arrow[r, "\tau^T"] & T^{-1}(N' \otimes_{A'} A_{[\varphi]})
\end{tikzcd}$$

est commutatif (la flèche verticale de gauche correspondant à l'homomorphisme obtenu en appliquant $\rho^{T',S'}$ à $S'^{-1}N'$ et $S'^{-1}A'$, $\rho^{T,S}$ à $S^{-1}A$).

6. Identification du module M_f à une limite inductive.

Soient M un A-module, f un élément de A, et considérons la partie multiplicative S de A formée des f^n ($n \geq 0$); nous désignerons le module des fractions $S^{-1}M$ par la notation abrégée M_f. Considérons une suite (M_n) de A-modules, tous identiques à M, et pour tout couple d'entiers $m \leq n$, soit φ_{nm} l'homomorphisme $z \to f^{n-m}z$ de M_m dans M_n; il est immédiat que $((M_n),(\varphi_{nm}))$ est un système inductif de A-modules; soit $N = \varinjlim M_n$ la limite inductive de ce système. Nous allons définir un A-isomorphisme fonctoriel de N sur M_f. Pour cela, remarquons que, pour tout n, $\theta_n : z \to z/f^n$ est un A-homomorphisme de $M = M_n$ dans M_f; et il résulte des définitions que l'on a $\theta_n \circ \varphi_{nm} = \theta_m$ pour $m \leq n$. Il existe donc un A-homomorphisme $\theta : N \to M_f$ tel que, si φ_n désigne l'homomorphisme canonique $M_n \to N$, on ait $\theta_n = \theta \circ \varphi_n$ pour tout n. Comme par hypothèse tout élément de M_f est de la forme z/f^n pour un n au moins, il est clair que θ est surjectif. D'autre part, si $\theta(\varphi_n(z)) = 0$, autrement dit $z/f^n = 0$, il existe un entier $k \geq 0$ tel que $f^k z = 0$, donc $\varphi_{n+k,n}(z) = 0$, ce qui entraîne $\varphi_n(z) = 0$. On peut donc identifier M_f et $\varinjlim M_n$ au moyen de θ.

Ecrivons maintenant $M_{f,n}$, φ^f_{nm} et φ^f_n au lieu de M_n, φ_{nm} et φ_n. Soit g un second élément de A. Comme f^n divise $f^n g^n$, on a un homomorphisme fonctoriel $\rho_{fg,f}: M_f \to M_{fg}$ (n°4); si on identifie M_f et M_{fg} à $\varinjlim M_{f,n}$ et $\varinjlim M_{fg,n}$, $\rho_{fg,f}$ s'identifie à la <u>limite</u> <u>inductive</u> des applications $\rho^n_{fg,f}: M_{f,n} \to M_{fg,n}$ définies par $\rho^n_{fg,f}(z) = g^n z$.

En effet, cela résulte immédiatement de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} M_{f,n} \arrow[r, "\rho^n_{fg,f}"] \arrow[d, "\varphi^f_n"'] & M_{fg,n} \arrow[d, "\varphi^{fg}_n"] \\ M_f \arrow[r, "\rho_{fg,f}"] & M_{fg} \end{tikzcd}$$

§2. Faisceaux.

Pour les notions et résultats fondamentaux de la théorie des faisceaux, nous renverrons le plus souvent aux ouvrages suivants: R. GODEMENT, Topologie algébrique et Théorie des faisceaux, I, <u>Actual</u>. <u>Scient</u>. <u>et</u> <u>Ind</u>., n°1252, Paris (Hermann), 1958 (cité G). J. P. SERRE, Faisceaux algébriques cohérents, <u>Annals</u> <u>of</u> <u>Math</u>., 61 (1955), 197-278 (cité FAC). A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, <u>Tôhoku</u> <u>Math</u>. <u>J</u>., 9 (1957), 119-221 (cité T).

Le plus souvent, nous utiliserons les notations et la terminologie de (G); en particulier, pour un faisceau F sur un espace X, nous noterons $F(x)$ ou F_x la fibre de F au point x. Le <u>support</u> d'un faisceau de groupes abéliens F sur X est l'ensemble des $x \in X$ tels que $F(x) \neq \{0\}$; cet ensemble n'est pas nécessairement fermé dans X.

Pour une partie M de X, nous écrirons $F(M)$ ou $\Gamma(M,F)$ le groupe de sections de F au-dessus de M; on écrira $\Gamma(F) = \Gamma(X,F)$. Si $u: F \to G$ est un homomorphisme de faisceaux sur X, nous désignerons par u_V l'homomorphisme correspondant $s \to u \cdot s$ de $F(V)$ dans $G(V)$, par u_x l'homomorphisme $F(x) \to G(x)$ limite inductive des u_V lorsque V parcourt les voisinages ouverts de x dans X.

Enfin, si A est un faisceau d'anneaux sur X, au lieu de parler de A-Modules (G,II,2.2), nous parlerons aussi, par abus de langage de <u>faisceau de A_x-modules</u> ($x \in X$).

1. <u>Images directes de faisceaux de groupes abéliens</u>.

Soient X,Y deux espaces topologiques, $\psi: X \to Y$ une application continue. Si F est un faisceau de groupes abéliens sur X, on sait que l'<u>image directe</u> de F par ψ est le faisceau $\psi_*(F)$ de groupes abéliens sur Y, défini de la façon suivante: pour toute partie ouverte U de Y, $\psi_*(F)(U) = F(\psi^{-1}(U))$ (G,II,1.13). Si S est le support de F et si $y \notin \overline{\psi(S)}$, il résulte aussitôt de la définition que $\psi_*(F)(y) = \{0\}$; mais il faut noter que si y est adhérent à $\psi(S)$ mais n'appartient pas à $\psi(S)$, on peut avoir $\psi_*(F)(y) \neq \{0\}$ même si X = S.

Soit $x \in X$; pour tout voisinage ouvert U de $\psi(x)$ dans Y, et toute section $s \in \psi_*(F)(U) = F(\psi^{-1}(U))$, posons $\psi_{x,U}(s) = s(x)$; on définit ainsi un homomorphisme $\psi_{x,U}: \psi_*(F)(U) \to F(x)$, et il est clair que ces homomorphismes forment un système inductif; la limite inductive $\psi_x = \varinjlim \psi_{x,U}$ est donc un homomorphisme $\psi_*(F)(\psi(x)) \to F(x)$, qui en général n'est ni injectif ni surjectif.

Toutefois, si ψ est un <u>homéomorphisme</u> de X sur une partie $\psi(X)$ de Y, ψ_x est un <u>isomorphisme</u> pour tout $x \in X$. Ceci s'applique en particulier à l'injection canonique j d'une partie X de Y dans Y; le faisceau $j_*(F)$ induit alors F sur X. Si de plus X est une partie <u>fermée</u> de Y, $j_*(F)$ est le faisceau sur Y qui induit F sur X et 0 sur Y - X.

Considérons maintenant deux faisceaux F_1, F_2 de groupes abéliens sur X, et soit $u: F_1 \to F_2$ un homomorphisme. Pour tout ensemble ouvert $U \subset Y$, u définit un homomorphisme $F_1(\psi^{-1}(U)) \to F_2(\psi^{-1}(U))$, et ces homomorphismes sont compatibles avec les opérations de restriction, donc définissent un homomorphisme

$\psi_*(u): \psi_*(F_1) \to \psi_*(F_2)$. Pour toute section $s \in F_1(\psi^{-1}(U)) = \psi_*(F_1)(U)$, on a par définition $\psi_{x,U}(\psi_*(u)\cdot s) = u_x(\psi_{x,U}(s))$; la définition de la limite inductive montre donc que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F_1(x) & \xleftarrow{\psi_x} & \psi_*(F_1)(\psi(x)) \\ {\scriptstyle u_x}\downarrow & & \downarrow \psi_*(u)_{\psi(x)} \\ F_2(x) & \longleftarrow & \psi_*(F_2)(\psi(x)) \end{array}$$

est commutatif.

Si $v: F_2 \to F_3$ est un homomorphisme dans un troisième faisceau F_3 sur X, on a $\psi_*(v\circ u) = \psi_*(v)\circ\psi_*(u)$; autrement dit ψ_* est un <u>foncteur covariant</u> de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X dans celle des faisceaux de groupes abéliens sur Y. En outre, comme le foncteur $F \to \Gamma(F)$ est exact à gauche, et que l'exactitude se conserve par passage à la limite inductive, le foncteur ψ_* est <u>exact à gauche</u>.

Soient Z un troisième espace topologique, $\psi': Y \to Z$ une application continue, et $\psi'' = \psi'\circ\psi$. Il est clair que l'on a $\psi''_*(F) = \psi'_*(\psi_*(F))$ et $\psi''_x = \psi_x \circ \psi'_{\psi(x)}$ pour tout $x \in X$; en outre, pour tout homomorphisme u de faisceaux sur X, on a $\psi''_*(u) = \psi'_*(\psi_*(u))$. En d'autres termes, ψ''_* est le <u>composé</u> des foncteurs ψ'_* et ψ_*, ce qu'on peut écrire

$$(\psi'\circ\psi)_* = \psi'_*\circ\psi_* .$$

Notons enfin que pour toute partie ouverte U de Y, l'image par du faisceau induit $F|\psi^{-1}(U)$ n'est autre que le faisceau induit $\psi_*(F)|U$.

2. <u>Images réciproques de faisceaux de groupes abéliens</u>.

Les hypothèses sur X,Y et ψ étant les mêmes qu'au n°1, siot G un faisceau de groupes abéliens sur Y. L'<u>image réciproque</u> $\psi^*(G)$ par est le faisceau de groupes abéliens sur X défini comme suit: une section s de $\psi^*(G)$ au-dessus d'un ouvert U de X est une application de U dans l'espace étalé G qui est telle que, pour tout $x \in U$, il existe un voisinage V de $\psi(x)$ dans Y, une section s' de G au-dessus de V et un voisinage $W \subset \psi^{-1}(V)$ de x de sorte que s(z) =

$s'(\psi(z))$ pour tout $z \in W$ (G,II,1.12). En particulier, si X est une partie quelconque de Y et j l'injection canonique $X \to Y$, $j^*(G)$ n'est autre que le faisceau induit $G|X$.

Soient G_1, G_2 deux faisceaux de groupes abéliens sur Y, et $v\colon G_1 \to G_2$ un homomorphisme. On définit un homomorphisme $\psi^*(v)$ de $\psi^*(G_1)$ dans $\psi^*(G_2)$ de la façon suivante: si s est une section de $\psi^*(G_1)$ au-dessus d'un ouvert U, $\psi^*(v)\circ s$ est définie comme la section qui au voisinage de chaque point $x \in U$, coincide avec $v\circ s'\circ\psi$, si s' est une section de G_1 au voisinage de $\psi(x)$ telle que s coincide avec $s'\circ\psi$ au voisinage de x. Si $w\colon G_2 \to G_3$ est un homomorphisme dans un troisième faisceau G_3 sur Y, on a $\psi^*(w\circ v) = \psi^*(w)\circ\psi^*(v)$, autrement dit ψ^* est un <u>foncteur covariant</u> de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur Y dans celle des faisceaux de groupes abéliens.

Soient Z un troisième espace topologique, $\psi'\colon Y \to Z$ une application continue, et $\psi'' = \psi'\circ\psi$. Si H est un faisceau sur Z, on a $\psi''^*(H) = \psi^*(\psi'^*(H))$, et pour tout homomorphisme w de faisceaux sur Z, on a $\psi''^*(w) = \psi^*(\psi'^*(w))$. En d'autres termes, ψ''^* est le <u>composé</u> des foncteurs ψ^* et ψ'^*, ce qu'on peut écrire

$$(\psi'\circ\psi)^* = \psi^*\circ\psi'^*.$$

3. <u>Relations entre images directes et images réciproques</u>.

Pour tout ouvert $Y \subset V$, il y a un homomorphisme injectif de $G(V)$ dans $\psi^*(G)(\psi^{-1}(V))$, faisant correspondre à toute section $s' \in G(V)$ la section $z \to s'(\psi(z))$ de $\psi^*(G)$ au-dessus de $\psi^{-1}(V)$; ces homomorphismes étant compatibles avec les opérations de restriction, définissent (en vertu de la définition de ψ_*) un homomorphisme <u>injectif</u> $\alpha\colon G \to \psi_*(\psi^*(G))$, évidemment <u>fonctoriel</u>; cet homomorphisme n'est pas surjectif en général. Toutefois, la définition des sections de $\psi^*(G)$ montre que l'homomorphisme $\psi_x\circ\alpha_{\psi(x)}$ de la fibre $G(\psi(x))$ dans $\psi^*(G)(x)$ est un <u>isomorphisme</u>, qui permet d'identifier ces deux fibres; en outre, pour tout homomorphisme $v\colon G_1 \to G_2$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \psi^*(G_1)(x) & \longleftarrow & G_1(\psi(x)) \\ {\scriptstyle \psi^*(v)_x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v_{\psi(x)}} \\ \psi^*(G_2)(x) & \longleftarrow & G_2(\psi(x)) \end{array}$$

est commutatif. Une conséquence immédiate de ce fait est que le foncteur ψ^* est exact.

Soit maintenant F un faisceau de groupes abéliens sur X; pour toute section s de $\psi^*(\psi_*(F))$ au-dessus d'un ouvert $U \subset X$, on définit une section de F au-dessus de U en faisant correspondre à $x \in U$ l'élément $\psi_x(s(x))$ de $F(x)$; on vérifie immédiatement que c'est bien une application continue de U dans l'espace étalé F. On a ainsi défini un homomorphisme fonctoriel $\beta : \psi^*(\psi_*(F)) \to F$, qui n'est en général ni injectif ni surjectif.

4. Morphismes de faisceaux compatibles avec une application continue.

Les hypothèses et notations étant comme ci-dessus, les définitions de ψ_* et ψ^* permettent de définir deux bifoncteurs

$$(F,G) \to \mathrm{Hom}_Y(G,\psi_*(F))$$
$$(F,G) \to \mathrm{Hom}_X(\psi^*(G),F)$$

à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens, covariants en F et contravariants en G. Nous nous proposons d'établir un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_Y(G,\psi_*(F)) \overset{\sim}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}_X(\psi^*(G),F)$$

entre ces deux bifoncteurs. Pour cela, pour tout $\theta \in \mathrm{Hom}_Y(G,\psi_*(F))$ nous désignerons par θ^b l'homomorphisme composé

$$\theta^b : \psi^*(G) \xrightarrow{\psi^*(\theta)} \psi^*(\psi_*(F)) \xrightarrow{\beta} F$$

et pour tout $\omega \in \mathrm{Hom}_X(\psi^*(G),F)$, nous désignerons par $\omega^\#$ l'homomorphisme composé

$$\omega^\# : G \xrightarrow{\alpha} \psi_*(\psi^*(G)) \xrightarrow{\psi_*(\omega)} \psi_*(F).$$

Comme α,β sont fonctoriels, et que ψ_* et ψ^* sont des foncteurs additifs, il est immédiat de vérifier que $\theta \to \theta^b$ et $\omega \to \omega^\#$ sont des morphismes de bifoncteurs. Reste à montrer que $(\theta^b)^\# = \theta$ et $(\omega^\#)^b = \omega$. Or, si $s \in \Gamma(U,\psi^*(G))$,

$\theta^b \circ s$ coincide, au voisinage de chaque $x \in U$, avec $(\theta\circ s')\circ\psi$, si s coincide avec $s'\circ\psi$ dans un voisinage de x; et de même, si $s' \in \Gamma(V,G)$, $\omega^\#\circ s'$ est la section de $\psi_*(F)$ au-dessus de V identique à la section $\omega\circ s'\circ\psi$ de F au-dessus de $\psi^{-1}(V)$; ces deux relations entraînent nos assertions.

Il résulte de ce qui précède que, étant donné le faisceau G sur Y, le faisceau $\psi^*(G)$ est solution du <u>problème universel</u> suivant: trouver un faisceau F_o sur X tel que tout homomorphisme $G \to \psi_*(F)$ se factorise en deux homomorphismes $G \to \psi_*(F_o)$ et $\psi_*(F_o) \to \psi_*(F)$, le second étant de la forme $\psi_*(v)$, où v est un homomorphisme de F_o dans F.

Par définition, nous dirons qu'un homomorphisme $\theta: G \to \psi_*(F)$ est un <u>morphisme</u> du faisceau G dans le faisceau F, <u>compatible avec</u> ψ, ou encore un <u>ψ-morphisme de</u> G <u>dans</u> F. On dit par convention que θ (en tant que ψ-morphisme) est <u>injectif</u> (resp. <u>surjectif</u>) si l'homomorphisme correspondant $\theta^b: \psi^*(G) \to F$ est injectif (resp. surjectif); cela n'entraînen pas que θ, considéré comme homomorphisme de G dans $\psi_*(F)$, soit injectif (resp. surjectif); toutefois, si θ^b est injectif, il en est de même de $\theta_{\psi(x)}$ pour tout $x \in X$.

Nous allons maintenant voir que les couples (X,F) formés d'un espace topologique X et d'un faisceau de groupes abéliens F sur X, forment une <u>catégorie</u>, lorsqu'on définit un <u>morphisme</u> de (X,F) dans (Y,G) comme un couple (ψ,θ), où ψ est une application continue de X dans Y et θ un ψ-morphisme de G dans F. Pour cela, nous devons définir le <u>composé</u> de deux morphismes $(\psi,\theta): (X,F) \to (Y,G)$ et $(\psi',\theta') = : (Y,G) \to (Z,H)$; par définition, ce sera le morphisme (ψ'',θ''), où $\psi'' = \psi'\circ\psi$, et où θ'' est l'homomorphisme composé

$$\theta'': H \xrightarrow{\theta'} \psi'_*(G) \xrightarrow{\psi'_*(\theta)} \psi'_*(\psi_*(F));$$

la vérification de la condition d'associativité est immédiate. En outre, on voit aussitôt que θ''^b n'est autre que l'homomorphisme

$$\theta''^b: \psi^*(\psi'^*(H)) \xrightarrow{\psi^*(\theta'^b)} \psi^*(G) \xrightarrow{\theta^b} F.$$

Comme ψ^* est un foncteur exact, on en déduit aussitôt que si les deux morphismes ψ, ψ' sont *injectifs* (resp. *surjectifs*), ψ'' est aussi injectif (resp. surjectif). On vérifie alors que si ψ est injectif (resp. surjectif) et θ surjectif (resp. injectif), (ψ,θ) est un *monomorphisme* (resp. *épimorphisme*) (T,I,1.1) pour la catégorie ainsi définie.

En particulier, si M est une partie de X, j l'injection canonique $M \rightarrow X$, le morphisme $(j,\rho) : (M,F|M) \longrightarrow (X,F)$, où ρ est l'application identique de $F|M$, est un monomorphisme; le composé d'un morphisme (ψ,θ) et de (j,ρ) est appelé la *restriction* de (ψ,θ) à M. De même, si N est une partie de Y contenant $\psi(X)$, et h l'injection canonique $N \rightarrow Y$, on peut écrire $\psi = h\circ\psi_o$, où ψ_o est l'application ψ considérée comme prenant ses valeurs dans N; on a évidemment $\psi_o^*(G|N) = \psi^*(G)$, et si θ_o est l'homomorphisme $G|N \rightarrow (\psi_o)_*(F)$ tel que $\theta_o{}^b$ soit égal à θ^b, on peut considérer (ψ,θ) comme composé de (h,σ) et de (ψ_o,θ_o), σ étant l'application identique de $G|N$.

5. *Espaces annelés.*

Toutes les définitions et tous les résultats précédents s'appliquent lorsqu'on remplace les faisceaux de groupes abéliens par des faisceaux dont les fibres sont dans une catégorie quelconque admettant des limites inductives (T,I,1.8) (en exceptant naturellement les assertions faisant intervenir la structure de groupe abélien, comme par exemple le fait que $\mathrm{Hom}_X(G,\psi_*(F))$ est un groupe abélien; en général ce sera simplement un ensemble).

Nous utiliserons particulièrement les faisceaux d'*anneaux*; nous appellerons *espace annelé* un couple (X,A) formé d'un espace topologique X et d'un faisceau d'anneaux A sur X; on dit encore que A est le *faisceau structural* de l'espace annelé, et on le note O_X (et les fibres O_x ou $O(x)$), lorsqu'aucune confusion n'en résulte. Pour toute partie M de X, le couple $(M,A|M)$ est évidemment un espace annelé, dit *induit* sur M par (X,A) (ou encore la *restriction* de (X,A) à M). Nous considérerons toujours les espaces annelés comme formant une catégorie suivant la définition des morphismes donnée au n°4. Soient (X,A), (Y,B) deux espaces annelés, $\underline{\Psi} = (\psi,\theta)$ un morphisme de (X,A) dans (Y,B). Soit

F un A-Module, $\psi_*(F)$ son image directe par ψ, qui est un faisceau de groupes abéliens sur Y; par definition, pour tout ouvert $U \subset Y$, $\psi_*(F)(U) = F(\psi^{-1}(U))$ est muni d'une structure de module par rapport a l'anneau $\psi_*(A)(U) = A(\psi^{-1}(U))$; ces structures étant compatibles par rapport aux opérations de restriction, définissent sur $\psi_*(F)$ une structure de $\psi_*(A)$-Module. Comme θ est un homomorphisme de B dans $\psi_*(A)$, il définit sur $\psi_*(F)$ une structure de B-Module; nous dirons que ce B-Module est l'<u>image directe</u> de F par le morphisme Ψ, et nous le noterons $\Psi_*(F)$. Si F_1,F_2 sont deux A-Modules sur X, u un A-homomorphisme $F_1 \to F_2$, $\psi_*(u)$ est un $\psi_*(A)$-homomorphisme de $\psi_*(F_1)$ dans $\psi_*(F_2)$, et a fortiori un B-homomorphisme; en tant que B-homomorphisme, nous le noterons $\Psi_*(u)$. On voit donc que Ψ_* est un <u>foncteur covariant</u> (exact à gauche) de la catégorie des A-Modules dans celle des B-Modules.

Soient maintenant G un B-Module, $\psi^*(G)$ son image réciproque, qui est un faisceau de groupes abéliens sur X. Il résulte immédiatement de la définition des sections d'une image réciproque de faisceaux que $\psi^*(G)$ est naturellement muni d'une structure de $\psi^*(B)$-Module. D'autre part, l'homomorphisme θ^b de $\psi^*(B)$ dans A munit A d'une structure de $\psi^*(B)$-Module, que nous noterons $A_{[\theta]}$; et le produit tensoriel $\psi^*(G) \otimes_{\psi^*(B)} A_{[\theta]}$ est muni naturellement d'une structure de A-Module. Nous dirons que ce A-Module est l'<u>image réciproque</u> de G par le morphisme Ψ, et nous le noterons $\Psi^*(G)$. Si G_1,G_2 sont deux B-Modules sur Y, v un B-homomorphisme $G_1 \to G_2$, $\psi^*(v)$ est, comme on le vérifie aussitôt, un $\psi^*(B)$-homomorphisme de $\psi^*(G_1)$ dans $\psi^*(G_2)$; par suite $\psi^*(v) \otimes 1$ est un A-homomorphisme de $\Psi^*(G_1)$ dans $\Psi^*(G_2)$; si on le note $\Psi^*(v)$, on voit qu'on a défini Ψ^* comme un <u>foncteur covariant</u> de la catégorie des B-Modules dans celle des A-Modules. Ici, ce foncteur (contrairement à ψ^*) n'est plus exact mais seulement <u>exact à droite</u>.

Nous avons donc de nouveau défini deux bifoncteurs

$$(F,G) \to \mathrm{Hom}_B(G,\Psi_*(F)) \qquad (F,G) \to \mathrm{Hom}_A(\Psi^*(G),F)$$

à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens, covariants en F et contravariants en G, F étant dans la catégorie des A-Modules et G dans celle des B-Modules. On va voir encore qu'il y a un <u>isomorphisme</u> canonique fonctoriel

$$(1) \qquad \mathrm{Hom}_B(G, \Psi^*(F)) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\Psi^*(G), F)$$

entre ces deux bifoncteurs. Pour cela nous définirons d'abord un homomorphisme fonctoriel $\lambda: G \to \Psi_*(\Psi^*(G))$ de B-Modules et un homomorphisme fonctoriel $\mu: \Psi^*(\Psi_*(F)) \to F$ de A-Modules. On a un homomorphisme naturel $j: \psi^*(G) \to \Psi^*(G)$, qui, sur chaque fibre, se réduit à $z \to z \otimes 1$, et qui est évidemment un $\psi^*(B)$-homomorphisme; on en déduit un $\psi_*(\psi^*(B))$-homomorphisme $\psi_*(j): \psi_*(\psi^*(G)) \to \psi_*(\Psi^*(G)) = \Psi_*(\Psi^*(G))$, qu'on peut aussi considérer comme un B-homomorphisme puisque B s'injecte dans $\psi_*(\psi^*(B))$ par c. On prend alors pour λ l'homomorphisme composé

$$\lambda: G \xrightarrow{c} \psi_*(\psi^*(G)) \xrightarrow{\psi_*(j)} \Psi_*(\Psi^*(G)).$$

D'autre part, F peut être considéré comme un $\psi^*(B)$-Module au moyen de l'homomorphisme θ^b de $\psi^*(B)$ dans A; on vérifie alors aussitôt que l'homomorphisme $\beta: \psi^*(\Psi_*(F)) \to F$ est un homomorphisme de $\psi^*(B)$-Modules. On a d'autre part un homomorphisme naturel $h: F \otimes_{\psi^*(B)} A[e] \to F$ de A-Modules, qui sur chaque fibre se réduit à $z \otimes a \to az$. On prend pour μ l'homomorphisme composé

$$\mu: \Psi^*(\Psi_*(F)) \xrightarrow{\beta \otimes 1} F \otimes_{\psi^*(B)} A[e] \xrightarrow{h} F.$$

Cela étant, pour $v \in \mathrm{Hom}_B(G, \Psi_*(F))$ et $u \in \mathrm{Hom}_A(\Psi^*(G), F)$, on pose

$$v_\theta^b: \Psi^*(G) \xrightarrow{\Psi^*(v)} \Psi^*(\Psi_*(F)) \xrightarrow{\mu} F$$

et

$$u_\theta^\#: G \xrightarrow{\lambda} \Psi_*(\Psi^*(G)) \xrightarrow{\Psi_*(u)} \Psi_*(F).$$

On vérifie comme au n°4 que $v \to v_\theta^b$ et $u \to u_\theta^\#$ sont fonctoriels et que l'on a $(v_\theta^b)_\theta^\# = v$ et $(u_\theta^\#)_\theta^b = u$.

Considérons les anneaux $A = \Gamma(A)$, $B = \Gamma(B)$ des sections des faisceaux d'anneaux A, B; le groupe abélien $\mathrm{Hom}_B(G, \Psi_*(F))$ est naturellement muni d'une structure de bimodule sur les anneaux $B = \Gamma(\mathcal{B})$ et $\Gamma(\psi_*(\mathcal{A}))$ et comme ce derneir n'est autre que $\Gamma(\mathcal{A}) = A$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\mathcal{G},\psi_*(\mathcal{F}))$ est un (A,B)-bimodule. De même, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\psi^*(\mathcal{G}),\mathcal{F})$ est naturellement muni d'une structure de bimodule sur $A = \Gamma(\mathcal{A})$ et $\Gamma(\psi^*(\mathcal{B}))$, et comme $\Gamma(\mathcal{B})$ s'identifie à un sous-anneau de $\Gamma(\psi^*(\mathcal{B}))$ (n°2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\psi^*(\mathcal{G}),\mathcal{F})$ est un (A,B)-bimodule. Cela étant, il est facile de vérifier que l'isomorphisme (1) est aussi un isomorphisme de (A,B)-bimodules.

6. Faisceaux cohérents et faisceaux quasi-cohérents.

Rappelons que si $(X,\mathcal{O}_X)$ est un espace annelé, on dit qu'un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{F}$ est de type fini si, pour tout $x \in X$, il y a un voisinage ouvert V de x, un entier $n > 0$ et un homomorphisme surjectif $\mathcal{O}_X^n|V \to \mathcal{F}|V \to 0$; on dit que $\mathcal{F}$ est cohérent si $\mathcal{F}$ est de type fini et si, pour toute partie ouverte V de X et tout homomorphisme $\mathcal{O}_X^n|V \to \mathcal{F}|V$, le noyau de cet homomorphisme est un faisceau (sur V) de type fini. Pour les propriétés des faisceaux cohérents, nous renvoyons à (FAC), chap.I, §2. On sait en particulier que si $\mathcal{F}$ est cohérent, pour tout $x \in X$ il y a un voisinage ouvert V de x tel que $\mathcal{F}|V$ soit isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $\mathcal{O}_X^m|V \to \mathcal{O}_X^n|V$. Plus généralement, nous dirons qu'un $\mathcal{O}_X$-Module $\mathcal{F}$ est quasi-cohérent si, pour tout $x \in X$, il y a un voisinage ouvert V de x tel que $\mathcal{F}|V$ soit isomorphe au conoyau d'un homomorphisme de la forme $\mathcal{O}_X^{(I)}|V \to \mathcal{O}_X^{(J)}|V$, où I et J sont des ensembles d'indices arbitraires.

Archives Grothendieck sept 59

326-Bis

CHAPITRE I

PRESCHEMAS.

§1. Schémas affines.

1. Le spectre premier d'un anneau.

Notations: Soit A un anneau commutatif M un A-module. Dans ce chapitre et les suivants, nous utiliserons constamment les notations suivantes:

$\mathrm{Spec}(A)$ = ensemble des idéaux premiers de A, appelé aussi spectre premier de A; pour un $x \in X = \mathrm{Spec}\, A$, il sera parfois commode d'écrire j_x au lieu de x.

$A_x = A_{j_x}$ = anneau (local) des fractions $S^{-1}A$, où $S = A - j_x$.

$m_x = j_x A_{j_x}$ = idéal maximal de A_x.

$k_x = A_x/m_x$ = corps des restes de A_x, isomorphe canoniquement au corps des fractions de A/j_x, auquel on l'identifie.

$f(x)$ = classe de f mod. j_x dans $A/j_x \subset k(x)$, pour $f \in A$ et $x \in X$.

Les relations

$$f(x) = 0 \quad \text{et} \quad f \in j_x$$

sont donc équivalentes.

$M_x = M \otimes_A A_x$ = module des fractions à dénominateurs dans $A - j_x$.

$r(E)$ = racine de l'idéal de A engendré par E, pour tout $E \subset A$.

$V(E)$ = ensemble des $x \in X$ tels que $E \subset j_x$ (ou encore ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) = 0$ pour tout $f \in E$). On a donc

(1) $$r(E) = \bigcap_{x \in V(E)} j_x.$$

$V(f) = V(\{f\})$ pour $f \in A$.

$D(f) = X - V(f)$ = ensemble des $x \in X$ tels que $f(x) \neq 0$.

Proposition 1. On a les propriétés suivantes:

(i) $V(0) = X$, $V(1) = \emptyset$.

(ii) La relation $E \subset E'$ entraîne $V(E) \supset V(E')$.

(iii) Pour toute famille (E_λ) de parties de A, $V(\bigcup_\lambda E_\lambda) = \bigcap_\lambda V(E_\lambda)$.

(iv) $V(EE') = V(E) \cup V(E')$.

(v) $V(E) = V(r(E))$.

Les propriétés (i),(ii),(iii) sont triviales, et (v) résulte de (ii) et de la formule (1). Il est évident que $V(EE') \subset V(E) \cup V(E')$; inversement, si $x \notin V(E)$ et $x \notin V(E')$, il existe f, f' dans A tels que $f(x) \neq 0$ et $f'(x) \neq 0$ dans $k(x)$, d'où $f(x)f'(x) \neq 0$, $x \notin V(EE')$, ce qui prouve (iv).

La prop.1 montre entre autres que les ensembles de la forme $V(E)$ sont les <u>ensembles fermés</u> d'une topologie sur X, que nous appellerons la <u>topologie spectrale</u>; sauf mention expresse du contraire, on supposera toujours Spec(A) muni de la topologie spectrale.

Pour toute partie Y de X, nous désignerons par $j(Y)$ l'ensemble de $f \in A$ tels que $f(y) = 0$ pour tout $y \in Y$; il revient au même de dire que $j(Y)$ est l'intersection des idéaux premiers j_y pour $y \in Y$. Il est clair que la relation $Y \subset Y'$ entraîne $j(Y) \supset j(Y')$ et que l'on a

(2) $$j(\bigcup_\lambda Y_\lambda) = \bigcap_\lambda j(Y_\lambda)$$

pour toute famille (Y_λ) de parties de X.

<u>Proposition 2</u>. a) <u>Pour toute partie</u> E <u>de</u> A, <u>on a</u> $j(V(E)) = r(E)$.

b) <u>Pour toute partie</u> Y <u>de</u> X, $V(j(Y)) = \overline{Y}$, <u>adhérence de</u> Y <u>dans</u> X.

a) est conséquence immédiate des définitions et de (1); d'autre part, $V(j(Y))$ est fermé et contient Y; inversement, si $Y \subset V(E)$ on a $f(y) = 0$ pour tout $f \in E$ et tout $y \in Y$, donc $E \subset j(Y)$, $V(E) \supset V(j(Y))$ ce qui prouve b).

<u>Corollaire 1</u>. <u>Les parties fermées de</u> X <u>et les idéaux de</u> A <u>égaux à leurs racines (autrement dit les intersections d'idéaux premiers) se correspondent biunivoquement par les applications</u> $Y \to j(Y)$, $a \to V(a)$; <u>à la réunion</u> $Y_1 \cup Y_2$ <u>de deux parties fermées correspond</u> $j(Y_1) \cap j(Y_2)$, <u>et à l'intersection d'une famille quelconque</u> (Y_λ) <u>de parties fermées correspond la racine de la somme des</u> $j(Y_\lambda)$.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Si</u> A <u>est un anneau noethérien</u>, $X = \mathrm{Spec}(A)$ <u>est un espace noethérien</u>.

On notera que la réciproque de ce corollaire est inexacte, comme le montre l'exemple d'un anneau non noethérien ayant un seul idéal premier $\neq \{0\}$, par exemple un anneau de valuation non discrète de rang 1.

Corollaire 3. Pour tout $x \in X$, l'adhérence de $\{x\}$ est l'ensemble des $y \in X$ tels que $j_y \supset j_x$. Pour que $\{x\}$ soit fermé, il faut et il suffit que j_x soit maximal.

Corollaire 4. Si x et y sont deux points distincts de X, il existe un voisinage ouvert de l'un des points x,y qui ne contient pas l'autre (axiome T_0).

En effet, on a soit $j_x \not\subset j_y$, soit $j_y \not\subset j_x$, donc il existe un ensemble $V(E)$ contenant l'un des points x,y et non l'autre.

D'après la prop.1,(iv), pour deux éléments f,g de A, on a

(3) $$D(fg) = D(f) \cap D(g).$$

Notons aussi que la relation $D(f) = D(g)$ signifie, d'après la prop.2 a) et la prop.1,(v), que $r(f) = r(g)$, ou encore que les idéaux premiers minimaux contenant (f) et (g) sont les mêmes (en particulier, il en est ainsi lorsque $f = ug$, où u est inversible).

Proposition 3. a) Lorsque f parcourt A, les ensembles $D(f)$ formen une base de la topologie de X.

b) Pour tout $f \in A$, $D(f)$ est quasi-compact.

a) Soit V un ensemble ouvert dans X; par définition, on a $U = X - V(E)$ où E est une partie de A, et $V(E) = \bigcap_{f \in E} V(f)$, d'où $U = \bigcup_{f \in E} D(f)$.

b) D'après a), il suffit de prouver que si $(f_\lambda)_{\lambda \in L}$ est une famille d'éléments de A telle que $D(f) \subset \bigcup_{\lambda \in L} D(f_\lambda)$, il existe une partie finie J de L telle que $D(f) \subset \bigcup_{\lambda \in J} D(f_\lambda)$. Soit a l'idéal engendré par les f_λ; on a par hypothèse $V(f) \supset V(a)$, donc $r(f) \subset r(a)$; comme $f \in r(f)$ il existe un entier $n > 0$ tel que $f^n \in a$. Mais alors f^n appartient à l'idéal b engendré par une sous-famille finie $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$, et on a $V(f) = V(f^n) \supset V(b) = \bigcap_{\lambda \in J} V(f)$, c'est-à-dire $D(f) \subset \bigcup_{\lambda \in J} D(f_\lambda)$.

Proposition 4. Soit $N = r(0)$ l'idéal des éléments nilpotents de A. Pour

<u>que l'espace</u> $X = \mathrm{Spec}(A)$ <u>soit irréductible, il faut et il suffit que</u> A/N <u>soit un anneau intègre (autrement dit que</u> N <u>soit premier)</u>.

Notons d'abord que les idéaux premiers de A/N étant en correspondance biunivoque avec ceux de A, les spectres premiers de A et de A/N s'identifient canoniquement avec leurs topologies. On peut donc supposer $N = (0)$. Si X est réductible, il existe deux parties fermées X_1, X_2 distinctes de X et telles que $X = X_1 \cup X_2$, d'où $j(X) = j(X_1) \cap j(X_2) = (0)$, les idéaux $j(X_1)$ et $j(X_2)$ étant distincts de (0); donc A n'est pas intègre. Inversement, si dans A on a $fg = 0$, $f \neq 0$, $g \neq 0$, on a $V(f) \neq X$, $V(g) \neq X$ puisque l'intersection des idéaux premiers est (0), et $X = V(f) \cup V(g)$.

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, il y a correspondance biunivoque entre les idéaux premiers de $A/\mathfrak{a}$ et les idéaux premiers de A contenant $\mathfrak{a}$; par suite $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ s'identifie canoniquement au sous-espace fermé $V(\mathfrak{a})$ de $\mathrm{Spec}(A)$. La prop.4 entraîne alors le

<u>Corollaire</u>. a) <u>Dans la correspondance biunivoque entre parties fermées de</u> $X = \mathrm{Spec}(A)$ <u>et idéaux de</u> A <u>égaux à leurs racines, les parties fermées irréductibles correspondent aux idéaux premiers de</u> A.

b) <u>L'application</u> $x \to \overline{\{x\}}$ <u>établit une correspondance biunivoque entre</u> X <u>et l'ensemble des parties fermées irréductibles de</u> X.

2. <u>Propriétés fonctorielles des spectres premiers d'anneaux</u>.

Soient A, A' deux anneaux, φ un homomorphisme de A' dans A. Pour tout idéal premier $x = j_x \in \mathrm{Spec}(A)$, l'anneau $A'/\varphi^{-1}(j_x)$ est canoniquement isomorphe à un sous-anneau de A/j_x, donc est intègre, et par suite $\varphi^{-1}(j_x)$ est un idéal premier de A'; nous le noterons ${}^a\varphi(x)$, et nous avons ainsi défini une application ${}^a\varphi$ de $X = \mathrm{Spec}(A)$ dans $X' = \mathrm{Spec}(A')$, que nous appellerons l'application <u>associée</u> à l'homomorphisme φ. Nous désignerons par φ^x l'homomorphisme injectif de $A'/j_{{}^a\varphi(x)}$ dans A/j_x, déduit de φ par passage aux quotients, ainsi que son prolongement canonique en un monomorphisme $k({}^a\varphi(x))$

$\to k(x)$; pour tout $f' \in A'$, on a donc par définition

(4) $$\varphi^x(f'({}^a\varphi(x))) = (\varphi(f'))(x) \qquad (x \in X).$$

<u>Proposition 5</u>. a) <u>Pour toute partie</u> E' <u>de</u> A', <u>on a</u>

(5) $${}^a\varphi^{-1}(V(E')) = V(\varphi(E')).$$

b) <u>Pour tout idéal</u> $\mathfrak{a}$ <u>de</u> A, <u>on a</u>

(6) $$\overline{{}^a\varphi(V(\mathfrak{a}))} = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{a})).$$

En effet, la relation ${}^a\varphi(x) \in V(E')$ est par définition équivalente à $E' \subset j_{{}^a\varphi(x)} = \varphi^{-1}(j_x)$, donc à $\varphi(E') \subset j_x$, et finalement à $x \in V(\varphi(E'))$ d'où a). Pour démontrer b), on peut supposer $\mathfrak{a}$ égal à sa racine, puisque $V(r(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a})$ et $\varphi^{-1}(r(\mathfrak{a})) = r(\varphi^{-1}(\mathfrak{a}))$; si on pose $Y = V(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}' = j({}^a\varphi(Y))$, on a $\overline{{}^a\varphi(Y)} = V(\mathfrak{a}')$ (n°1, prop. 2 b); la relation $f' \in \mathfrak{a}'$ est par définition équivalente à $f'(x') = 0$ pour tout $x' \in {}^a\varphi(Y)$, donc, en vertu de la formule (4), elle est aussi équivalente à $\varphi(f')(x) = 0$ pour tout $x \in Y$, ou encore à $\varphi(f') \in j(Y) = \mathfrak{a}$, puisque $\mathfrak{a}$ est égal à sa racine; d'où b).

<u>Corollaire 1</u>. <u>L'application</u> ${}^a\varphi$ <u>est continue</u>.

Remarquons que si A'' est un troisième anneau, φ' un homomorphisme de A'' dans A', on a ${}^a(\varphi' \circ \varphi) = {}^a\varphi \circ {}^a\varphi'$; ce résultat et le cor. 1 signifient que $A \to \mathrm{Spec}(A)$ est un <u>foncteur contravariant</u> de la catégorie des anneaux dans celle des espaces topologiques.

<u>Corollaire 2</u>. <u>Supposons que</u> φ <u>soit tel que tout</u> $f \in A$ <u>s'écrive</u> $f = h\varphi(f')$, <u>où</u> h <u>est inversible dans</u> A (ce qui est en particulier le cas lorsque φ est <u>surjectif</u>). <u>Alors</u> ${}^a\varphi$ <u>est un homéomorphisme de</u> X <u>sur</u> ${}^a\varphi(X)$.

Montrons que pour toute partie $E \subset A$, il existe une partie E' de A' telle que $V(E) = V(\varphi(E'))$; en vertu de l'axiome T_0 (cor. 4 de la prop. 2) et de la formule (5), cela entraînera d'abord que ${}^a\varphi$ est injective, puis, toujours en vertu de la formule (5), que ${}^a\varphi$ est un homéomorphisme. Or, il suffit pour chaque $f \in E$ de choisir un $f' \in A'$ tel que $h\varphi(f') = f$ avec h inversible dans

A; l'ensemble E' de ces f' répond à la question.

En particulier, lorsque φ est l'homomorphisme canonique de A sur un anneau quotient A/a, ${}^a\varphi$ est l'*injection canonique* de V(a) (identifié à Spec(A/a)) dans X = Spec(A).

Un autre cas particulier du cor.2 donne:

Corollaire 3. Si S *est une partie multiplicative de* A, *le spectre* $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ *s'identifie (avec sa topologie) au sous-espace de* X = Spec(A) *formé des* x *tels que* $j_x \cap S = \emptyset$.

On sait en effet que les idéaux premiers de $S^{-1}A$ sont les idéaux $S^{-1}j_x$, où $j_x \cap S = \emptyset$ et que l'on a $j_x = i_S^{-1}(S^{-1}j_x)$, en désignant par i_S l'application canonique de A dans $S^{-1}A$. Il suffit donc d'appliquer à i_S le cor.2.

Corollaire 4. Pour que ${}^a\varphi(X)$ *soit partout dense dans* X', *il faut et il suffit que tout élément du noyau* Ker φ *soit nilpotent.*

En effet, appliquant la formule (6) à a = (0), il vient $\overline{{}^a\varphi(X)} = V(\mathrm{Ker}\ \varphi)$, et pour que $V(\mathrm{Ker}\ \varphi) = X$, il faut et il suffit que Ker φ soit contenu dans tous les idéaux premiers de A, donc dans l'idéal des éléments nilpotents de A.

3. *Faisceau associé à un module.*

Notations: Soient A un anneau commutatif, M un A-module f un élément de A. On utilisera les notations suivantes:

S_f = *ensemble multiplicatif des* f^n *pour* $n \geq 0$.

A_f = *anneau des fractions* $S_f^{-1}A$.

M_f = *module des fractions* $S_f^{-1}M$.

Soit S'_f la partie multiplicative (saturée) de A formée des $g \in A$ qui divisent un des éléments f^n de S_f. Le lemme suivant résulte des définitions et du cor.1 de la prop.2 du n°1:

Lemme 1. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) $g \in S'_f$; (ii) $S'_g \in S'_f$; (iii) $f \in r(g)$; (iv) $r(f) \subset r(g)$; (v) $V(g) \subset V(f)$; (vi) $D(f) \subset D(g)$.

Le A_f-module M_f s'identifie canoniquement à $S'^{-1}_f M$ (chap.0, §1, n°4) si $D(f) = D(g)$, on a donc (lemme 1) $M_f = M_g$. Plus généralement, si $D(f) \supset D(g)$, donc $S'_f \subset S'_g$, on sait (chap.0, §1, n°4) qu'il existe un homomorphisme fonctoriel $\rho_{g,f} : M_f \to M_g$, et si $D(f) \supset D(g) \supset D(h)$, on a

(7) $$\rho_{h,g} \circ \rho_{g,f} = \rho_{h,f}.$$

Lorsque f parcourt $A - j_x$ (pour un x donné dans $X = \mathrm{Spec}(A)$), les ensembles S'_f forment un ensemble filtrant croissant, car pour deux éléments f, g de $A - j_x$, S'_f et S'_g sont contenus dans S'_{fg} ; comme la réunion des S'_f pour $f \in A - j_x$ est $A - j_x$, on en conclut (chap.0, §1, n°4) que le A_x-module M_x s'identifie canoniquement à la limite inductive $\varinjlim M_f$, relativement à la famille d'homomorphismes $(\rho_{g,f})$. Nous désignerons par ρ^f_x l'homomorphisme canonique $M_f \to M_x$ pour $f \in A - j_x$ (ou, ce qui revient au même, $x \in D(f)$).

Pour toute partie ouverte V de $X = \mathrm{Spec}(A)$, nous désignerons par $S(V,M)$ l'ensemble des fonctions F définies dans V et telles que $F(x) \in M_x$ pour tout $x \in V$. Si V, W sont deux parties ouvertes de X telles que $W \subset V$, nous désignerons par $\rho'_{W,V}$ l'application de restriction $S(V,M) \to S(W,M)$.

Pour tout $f \in A$, on définit un homomorphisme de groupes abéliens θ_f : $M_f \to S(D(f),M)$, que nous désignerons aussi par $\xi \to \tilde{\xi}$, en posant, pour tout $\xi \in M_f$ et tout $x \in D(f)$

(8) $$\tilde{\xi}(x) = \rho^f_x(\xi).$$

Cette définition, et la formule $\rho^f_x = \rho^g_x \rho_{g,f}$ pour $x \in D(g) \subset D(f)$, montrent que le diagramme

(9) $$\begin{array}{ccc} M_f & \xrightarrow{\theta_f} & S(D(f),M) \\ {\scriptstyle \rho_{g,f}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \rho'_{D(g),D(f)}} \\ M_g & \xrightarrow{\theta_g} & S(D(g),M) \end{array}$$

est commutatif (pour $D(f) \supset D(g)$).

Les groupes abéliens $S(V,M)$ et les homomorphismes $\rho'_{W,V}$ définissent un

<u>préfaisceau</u> S(M) sur X (G,1.1.9); en outre S(M) est en fait un <u>faisceau</u> de groupes abéliens, les axiomes des faisceaux (G,II,1.1) étant trivialement vérifiés; S(V,M) s'identifie alors canoniquement au groupe des sections de S(M) au-dessus de l'ensemble ouvert V.

<u>Définition</u> 1. <u>On appelle faisceau associé au A-module</u> M <u>et on note</u> $\tilde{M}$ <u>le sous-faisceau de</u> S(M) <u>dont les sections au-dessus d'une partie ouverte</u> V <u>de</u> X <u>sont les sections</u> $s \in S(V,M)$ <u>telles que, pour tout</u> $x \in V$, <u>il existe un voisinage ouvert de</u> x <u>contenu dans</u> V, <u>de la forme</u> D(f), <u>et pour lequel la restriction de</u> s <u>à</u> D(f) <u>soit de la forme</u> $\tilde{\xi}$, <u>où</u> $\xi \in M_f$.

Qu'il s'agisse bien d'un sous-faisceau de S(M) résulte de la commutivité du diagramme (9): si $D(g) \subset D(f)$, la restriction à D(g) de tout élément de la forme $\theta_f(\xi)$, où $\xi \in M_f$, est de la forme $\theta_f(\eta)$ où $\eta \in M_g$, donc l'image de D(f) par $\tilde{\eta} = \theta_f(\eta)$, qui est une partie ouverte de S(M), est contenue dans M.

Si on appliquece qui précède au cas M = A, tous les homomorphismes qui interviennent sont des homomorphismes d'anneaux, donc le faisceau $\tilde{A}$ est muni canoniquement d'une structure de faisceau d'anneaux. On dira que ce faisceau d'anneaux $\tilde{A}$ est le <u>faisceau structural</u> sur le spectre premier X = Spec(A), et on le notera aussi O_X. Si on revient au cas général d'un A-module M, il résulte alors de la déf.1 que, pour tout ensemble ouvert $V \subset X$, $\tilde{M}(V)$ est muni canoniquement d'une structure de $\tilde{A}(V)$-module, et que si $V \supset W$ sont deux parties ouvertes de X, l'application de restriction $\tilde{M}(V) \to \tilde{M}(W)$ est compatible avec les homomorphismes d'anneaux $\tilde{A}(V) \to \tilde{A}(W)$; par suite (G,II,2.2), $\tilde{M}$ est un $\tilde{A}$-Module.

Soient M,N deux A-modules, u un homomorphisme $M \to N$; pour tout $f \in A$ il correspond à u un homomorphisme u_f du A_f-module M_f dans le A_f-module N_f; de même, pour tout $x \in X$, il correspond à u un A_x-homomorphisme $u_x : M_x \to N_x$ (chap.0, §1,n°3). On vérifie aussitôt que si $x \in D(f)$, $\xi \in M_f$, $\eta = u_f(\xi)$, on a $\tilde{\eta}(x) = u_x(\tilde{\xi}(x))$; si on désigne par $\tilde{u}_f$ l'homomorphisme de S(D(f),M) dans $S(D(f),N)$ tel que $(\tilde{u}_f(F))(x) = u_x(F(x))$, il est clair que les $\tilde{u}_f$ définissent un homomorphisme du faisceaux $S(M) \to S(N)$, et ce qui précède montre que cet homomorphisme applique $\tilde{M}$ dans $\tilde{N}$; nous désignerons par $\tilde{u}$ sa restriction à $\tilde{M}$. Si P est un troisième A-module, v un homomorphisme $N \to P$, et $w = v\circ u$, il est immédiat que $\tilde{w} = \tilde{v}\circ\tilde{u}$. On a donc défini ainsi un <u>foncteur covariant</u> $M \to \tilde{M}$ de la catégorie des A-modules dans celle des $\tilde{A}$-Modules.

<u>Proposition 6</u>. <u>Pour tout</u> $f \in A$, <u>l'ensemble ouvert</u> $D(f) \subset X$ <u>s'identifie au spectre premier</u> $\mathrm{Spec}(A_f)$, <u>et le faisceau</u> $\tilde{M}_f$ <u>associé à</u> M_f <u>s'identifie canoniquement à la restriction</u> $\tilde{M}|D(f)$.

La première assertion est un cas particulier du cor.3 de la prop. du n°2. Pour tout $x \in D(f)$, M_x s'identifie canoniquement au module des fractions de M_f dont les dénominateurs sont dans l'idéal de A_f qui correspond canoniquement à j_x; et de même si $D(f) \supset D(g)$, M_g s'identifie au module des fractions de M_f dont les dénominateurs sont les puissances de l'image de g dans A_f (chap.0,§1,n°4). L'identification de $\tilde{M}_f$ à $\tilde{M}|D(f)$ résulte alors aussitôt des définitions.

<u>Théorème 1</u>. <u>Pour tout</u> A-<u>module</u> M, <u>et tout</u> $f \in A$, <u>l'homomorphisme</u> θ_f <u>de</u> M_f <u>dans</u> $\Gamma(D(f),\tilde{M})$ <u>est bijectif</u>.

On notera que, si $M = A$, θ_f est un homomorphisme de structure d'<u>anneau</u>; le th.1 entraînera donc que, si on identifie les anneaux A_f et $\Gamma(D(f),\tilde{A})$ au moyen de θ_f, l'homomorphisme θ_f: $M \to \Gamma(D(f),\tilde{M})$ sera un isomorphisme de <u>modules</u>.

Notons d'abord que θ_f est <u>injectif</u>: en effet, si $\xi \in M_f$ est tel que $\tilde{\xi}(x) = 0$ pour tout $x \in D(f)$, cela signifie que pour tout idéal premier p de A_f, il existe $h \notin p$ tel que $h\xi = 0$; l'annulateur de ξ n'est donc contenu dans aucun idéal premier de A_f, et par suite est A_f lui-même, autrement dit $\xi = 0$.

Notons d'autre part que, pour démontrer le th.1, il suffit de le faire lorsque $f = 1$; on passe au cas général en "localisant" à l'aide de la prop.6.

Reste donc à prouver que pour $f = 1$, θ_f est <u>surjectif</u>. Soit donc s une section de $\tilde{M}$ au-dessus de X tout entier; en vertu de la déf.1 et de la prop.3 du n°1, il existe un recouvrement fini $(D(f_i))_{i \in I}$ de X tel que, pour tout $i \in I$, la restriction s_i de s à $D(f_i)$ soit de la forme $\theta_{f_i}(\xi_i)$, où $\xi_i \in M_{f_i}$. Si i,j sont deux indices de I, en écrivant que les restrictions de s_i et s_j à $D(f_i) \cap D(f_j) = D(f_i f_j)$ sont égales, et tenant compte de ce que θ_f est injectif et du diagramme (9), on obtient

$$\rho_{f_i f_j, f_i}(\xi_i) = \rho_{f_i f_j, f_j}(\xi_j). \tag{10}$$

Par définition, on peut écrire pour chaque $i \in I$, $\xi_i = z_i/f_i^{n_i}$ où $z_i \in M$, et en multipliant chaque z_i par une puissance de f_i, on peut supposer tous les n_i égaux à un même n. Par définition, (10) signifie qu'il existe m_{ij} tel que $(f_i f_j)^{m_{ij}}(f_j^n z_i - f_i^n z_j) = 0$, et on peut encore supposer tous les m_{ij} égaux à un même m; remplaçant alors z_i par $f_i^m z_i$, on se ramène au cas où $m = 0$, autrement dit au cas où l'on a

$$f_j^n z_i = f_i^n z_j \tag{11}$$

quels que soient i et j. Or on a $D(f_i^n) = D(f_i)$, et comme les $D(f_i)$ forment un recouvrement de X, l'idéal engendré par les f_i^n est A; autrement dit, il existe des elements $g_i \in A$ tels que $\sum_i g_i f_i^n = 1$. Considérons alors l'élément $z = \sum_i g_i z_i$ de M; d'après (11), on a $f_i^n z = \sum_j g_j f_i^n z_j = (\sum_j g_j f_j^n) z_i = z_i$, d'où par définition $\xi_i = z/1$. Le diagramme (9) montre alors que, pour tout i, s_i est la restriction à $D(f_i)$ de $\theta_1(z)$, ce qui prouve que $s = \theta_1(z)$ et achève la démonstration.

<u>Corollaire 1</u>. <u>Pour tout</u> $x \in X$, <u>la fibre</u> $\tilde{M}(x)$ <u>du faisceau</u> $\tilde{M}$ <u>s'identifie canoniquement au module</u> M_x.

En effet, $\tilde{M}(x)$ est la limite inductive des $\Gamma(D(f),\tilde{M})$ pour $x \in D(f)$ et M_x est limite inductive des M_f (chap.0, §1, n°4).

<u>Corollaire 2</u>. <u>Si</u> M <u>et</u> N <u>sont deux</u> A-<u>modules</u>, $\mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M},\tilde{N})$ <u>est canoniquement isomorphe à</u> $\mathrm{Hom}_A(M,N)$.

En effet, on a défini au début de ce n° un homomorphisme canonique $u \rightarrow \tilde{u}$ de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ dans $\mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M},\tilde{N})$. On a d'autre part l'homomorphisme canonique $v \rightarrow \Gamma(v)$ de $\mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M},\tilde{N})$ dans $\mathrm{Hom}_{\Gamma(\tilde{A})}(\Gamma(\tilde{M}),\Gamma(\tilde{N}))$, de la théorie des faisceaux; mais comme $\Gamma(\tilde{A})$ (resp. $L(\tilde{M})$, $\Gamma(\tilde{N})$) s'identifie canoniquement à A (resp. M,N), cela donne un homomorphisme canonique $\mathrm{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M},\tilde{N}) \rightarrow \mathrm{Hom}_A(M,N)$. Il reste à vérifier que les deux homomorphismes ainsi définis sont réciproques l'un de l'autre, ce qui découle aisément des définitions.

On notera en outre qu'il résulte du cor.1 que si $u \in \mathrm{Hom}_A(M,N)$, la restriction de l'homomorphisme correspondant $\tilde{u}$ à la fibre $\tilde{M}(x)$ s'identifie à l'homomorphisme u_x: $M_x \rightarrow N_x$.

<u>Corollaire 3.</u> <u>Le foncteur</u> $M \rightarrow \tilde{M}$ <u>est exact.</u>

En vertu de la remarque précédente, il suffit de vérifier que $M \rightarrow M_x$ est un foncteur exact, résultat connu (chap.0,§1,n°3).

<u>Corollaire 4.</u> a) <u>Soit</u> u <u>un homomorphisme d'un</u> A-<u>module</u> M <u>dans un</u> A-<u>module</u> N; <u>alors les faisceaux associés à</u> Ker u, Im u, Coker u, <u>sont respectivement</u> Ker $\tilde{u}$, Im $\tilde{u}$, Coker $\tilde{u}$.

b) <u>Si</u> M <u>est une limite inductive</u> (resp. <u>somme directe</u>) <u>d'une famille de</u> A-<u>modules</u> M_λ, $\tilde{M}$ <u>est limite inductive</u> (resp. <u>somme directe</u>) <u>des</u> $\tilde{M}_\lambda$.

a) Il suffit d'appliquer le fait que $M \rightarrow \tilde{M}$ est un foncteur exact, aux suites exactes de A-modules

$$0 \rightarrow \mathrm{Ker}\, u \rightarrow M \rightarrow \mathrm{Im}\, u \rightarrow 0$$
$$0 \rightarrow \mathrm{Im}\, u \rightarrow N \rightarrow \mathrm{Coker}\, u \rightarrow 0.$$

b) Soit $(M_\lambda, g_{\mu\lambda})$ un système inductif de A-modules, de limite inductive M, et soit g_λ l'homomorphisme canonique $M_\lambda \rightarrow M$. Comme on a $\tilde{g}_{\nu\mu} \circ \tilde{g}_{\mu\lambda} = \tilde{g}_{\nu\lambda}$ et $\tilde{g}_\lambda = \tilde{g}_\mu \circ \tilde{g}_{\mu\lambda}$ pour $\lambda \leq \mu \leq \nu$, $(\tilde{M}_\lambda, \tilde{g}_{\mu\lambda})$ est un système inductif de faisceaux sur X, et si on désigne par h_λ l'homomorphisme canonique $\tilde{M}_\lambda \rightarrow \varinjlim \tilde{M}_\lambda$, il y a un homomorphisme unique v: $\varinjlim \tilde{M}_\lambda \rightarrow \tilde{M}$ tel que $v \circ h_\lambda = \tilde{g}_\lambda$. Pour voir que v est bijectif, il suffit de vérifier que, pour tout $x \in X$, v_x est une bijection de $(\varinjlim \tilde{M}_\lambda)_x$ sur $(\tilde{M})_x$; mais on a $(\tilde{M})_x = M_x$ (cor.1) et $(\varinjlim \tilde{M}_\lambda)_x =$

$\varinjlim (\tilde{M}_\lambda)_x = \varinjlim (M_\lambda)_x = M_x$ (chap.0, §1,n°4); d'autre part, il résulte aussi des définitions que $(\tilde{g}_\lambda)_x$ et $(h_\lambda)_x$ sont tous deux égaux à l'application canonique de $(M_\lambda)_x$ dans M_x; comme $(g_\lambda)_x = v_x \circ (h_\lambda)_x$, v_x est l'identité.

Enfin, si M est somme directe de deux A-modules N,P, il est immédiat que $\tilde{M} = \tilde{N} \oplus \tilde{P}$; toute somme directe étant limite inductive de sommes directes finies, les assertions de b) sont démontrées.

On notera que le cor.4 prouve que les faisceaux associés aux A-modules forment une <u>catégorie abélienne</u> (T,I,1.4).

<u>Corollaire 5. Dans la catégorie des faisceaux associés aux A-modules, le foncteur Γ est exact.</u>

En effet, soit $\tilde{M} \xrightarrow{\tilde{u}} \tilde{N} \xrightarrow{\tilde{v}} \tilde{P}$ une suite exacte de faisceaux associés à des A-modules M,N,P. Si Q = Im u et R = Ker v, on a $\tilde{Q} = \operatorname{Im} \tilde{u} = \operatorname{Ker} \tilde{v} = \tilde{R}$ (cor.4), d'où le corollaire.

<u>Corollaire 6. Si M et N sont deux A-modules, le faisceau associé à $M \otimes_A N$ s'identifie canoniquement à $\tilde{M} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{N}$. Si de plus M est un conoyau d'un homomorphisme $A^p \to A^q$, le faisceau associé à $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ s'identifie canoniquement à $\operatorname{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M},\tilde{N})$.</u>

Le faisceau $F = \tilde{M} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{N}$ est associé au préfaisceau $F(U) = \Gamma(U,\tilde{M}) \otimes_{\Gamma(U,\tilde{A})} \Gamma(U,\tilde{N})$ (U parcourant une base de la topologie de X). Or, si U = D(f) avec $f \in A$, F(D(f)) s'identifie canoniquement à $M_f \otimes_{A_f} N_f$ en vertu du th.1 et de la prop.6. Mais on sait que ce A_f-module est canoniquement isomorphe à $(M \otimes_A N)_f$ (chap.0,§1,n°3), qui lui-même est canoniquement isomorphe à $\Gamma(D(f),(M \otimes_A N)^\sim)$ (th.1 et prop.6). En outre, les isomorphismes canoniques

$$F(D(f)) \to \Gamma(D(f),(M \otimes_A N)^\sim)$$

ainsi obtenus vérifient les conditions de compatibilité avec les operateurs de restriction (chap.0,§1,n°4), donc définissent un isomorphisme canonique fonctoriel $\tilde{M} \otimes_{\tilde{A}} \tilde{N} \xrightarrow{\sim} (M \otimes_A N)^\sim$.

De même, le faisceau $G = \operatorname{Hom}_{\tilde{A}}(\tilde{M},\tilde{N})$ est associé au préfaisceau G(U) =

$\mathrm{Hom}_{\tilde{A}|U}(\tilde{M}|U,\tilde{N}|U)$, U parcourant une base de la topologie de X. Or si on prend $U = D(f)$, $G(D(f))$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{A_f}(M_f,N_f)$ (cor.2 et prop.6), lequel s(identifie canoniquement lui-même à $(\mathrm{Hom}_A(M,N))_f$ en vertu de l'hypothèse sur M (chap.0,§1,n°3). Finalment, $(\mathrm{Hom}_A(M,N))_f$ s'identifie canoniquement à $\Gamma(D(f),(\mathrm{Hom}_A(M,N))^{\sim})$ (th.1 et prop.6), et les isomorphismes canonique ainsi définis sont compatibles avec les opérateurs de restriction (chap.0,§1,n°4); il définissent donc un isomorphisme canonique $\mathrm{Hom}^{\sim}_{\tilde{A}}(\tilde{M},\tilde{N}) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Hom}_A(M,N))^{\sim}$.

4. *Faisceaux quasi-cohérents sur un spectre premier.*

Théorème 2. Soient X *le spectre premier d'un anneau* A, V *une partie ouverte quasi-compacte de* X, F *un faisceau de* O_X*-modules défini sur* V. *Les quatre conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *Il existe un* A*-module* M *tel que* F *soit isomorphe à* $\tilde{M}|V$.

b) *Il existe un recouvrement ouvert fini* (V_i) *de* V *par des ensembles de la forme* $V_i = D(f_i)$ *contenus dans* V *tels que, pour tout* i, $F|V_i$ *soit isomorphe à un faisceau de la forme* $\tilde{M}_i$, *où* M_i *est un* A_{f_i}*-module.*

c) *Le faisceau* F *est quasi-cohérent* (chap.0,§2,n°6).

d) *Les deux propriétés suivantes ont lieu:*

1) *Pour tout* $f \in A$ *tel que* $D(f) \subset V$ *et toute section* $s \in \Gamma(D(f),F)$ *il existe un entier* $n \geq 0$ *tel que* $f^n s$ *se prolonge en une section de* F *sur* V.

2) *Pour tout* $f \in A$ *tel que* $D(f) \subset V$ *et toute section* $t \in \Gamma(V,F)$, *telle que la restriction de* t *à* D(f) *soit* 0, *il existe un entier* $n \geq 0$ *tel que* $f^n t = 0$.

(Dans l'écriture des conditions d 1) et d 2), on a tacitement identifié A et $\Gamma(\tilde{A})$ en vertu du th.1 du n°3).

Le fait que a) entraîne b) est conséquence immédiate de la prop.6 du n°3 et du fait que les D(f) forment une base de la topologie de X. Comme tout A-module est isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $A^{(I)} \to A^{(J)}$, le cor.4 du th.1 (n°3) montre que tout faisceau associé à un A-module est quasi-cohérent; donc b) entraîne c). Réciproquement, si F est quasi-cohérent, tout $x \in V$ possède un voisinage de la forme $D(f) \subset V$ tel que $F|D(f)$ soit isomorphe à un faisceau conoyau d'un homomorphisme $\tilde{A}_f^{(I)} \to \tilde{A}_f^{(J)}$, donc au faisceau associé au module N, conoyau de l'homomorphisme $A_f^{(I)} \to A_f^{(J)}$ correspondant (cor.2 et 4 du th.1, n°3); comme V est quasi-compact, il est clair que c) entraîne b).

Pour prouver que b) entraîne d 1) et d 2), supposons d'abord que l'on ait $V = D(g)$ pour un $g \in A$ et que F soit isomorphe à un faisceau $\tilde{N}$ associé à un A_g-module N; remplaçant X par V et A par A_g (prop.6), on peut se ramener au cas où $g = 1$. Alors $\Gamma(D(f),\tilde{N})$ et N_f s'identifient canoniquement par le th.1 et la prop.6 du n°3, donc une section $s \in \Gamma(D(f),\tilde{N})$ s'identifie à un élément de la forme z/f^n, où $z \in N$; la section $f^n s$ s'identifie à l'élément $z/1$ de N_f et est par suite restriction à $D(f)$ de la section de $\tilde{N}$ sur X identifiée à l'élément $z \in N$; d'où d 1) dans ce cas. De même, $t \in \Gamma(X,\tilde{N})$ est identifiée à un élément $z' \in N$, la restriction de t à $D(f)$ est identifiée à l'image $z'/1$ de z' dans N_f, et dire que cette image est nulle signifie qu'il existe $n \geq 0$ tel que $f^n z' = 0$ dans N, ou, ce qui revient au même, $f^n t = 0$.

Pour achever de prouver que b) entraîne d 1) et d 2), il suffira d'établir le lemme suivant:

<u>Lemme 2</u>. <u>Supposons que</u> V <u>soit réunion finie d'ensembles de la forme</u> $D(g_i)$, <u>et que chacun des faisceaux</u> $F|D(g_i)$ <u>et</u> $F|D(g_i) \cap D(g_j) = F|D(g_i g_j)$ <u>vérifie</u> d 1) <u>et</u> d 2); <u>alors</u> F <u>possède les deux propriétés suivantes</u>:

d' 1) <u>Pour tout</u> $f \in A$ <u>et toute section</u> $s \in \Gamma(D(f) \cap V, F)$, <u>il existe un entier</u> $n \geq 0$ <u>tel que</u> $f^n s$ <u>se prolonge en une section de</u> F <u>sur</u> V.

d' 2) <u>Pour tout</u> $f \in A$ <u>et toute section</u> $t \in \Gamma(V,F)$ <u>telle que la restriction de</u> t <u>à</u> $D(f) \cap V$ <u>soit</u> 0, <u>il existe un entier</u> $n \geq 0$ <u>tel que</u> $f^n t = 0$.

Prouvons d'abord d' 2); comme $D(f) \cap D(g_i) = D(fg_i)$, il existe pour chaque i un entier n_i tel que la restriction de $(fg_i)^{n_i} t$ à $D(g_i)$ soit nulle;

comme l'image de g_i dans A_{g_i} est inversible, la restriction de $f^{n_i}t$ à $D(g_i)$ est aussi nulle; prenant pour n le plus grand des n_i, on a d' 2).

Pour démontrer d'1), appliquons d 1) au faisceau $F|D(g_i)$: il existe un entier n_i et une section s'_i de $F|D(g_i)$ prolongeant la restriction de $(fg_i)^{n_i}s$ à $D(fg_i)$; comme l'image de g_i dans A_{g_i} est inversible, il y a une section s_i de $F|D(g_i)$ telle que $s'_i = g_i^{n_i} s_i$, et s_i prolonge la restriction de $f^{n_i}s$ à $D(fg_i)$; on peut en outre supposer tous les n_i égaux à un même entier n. Par construction, la restriction de $s_i - s_j$ à $D(f) \cap D(g_i) \cap D(g_j) = D(fg_ig_j)$ est nulle; d'après d 2) appliqué au faisceau $F|D(g_ig_j)$, il existe un entier m_{ij} tel que la restriction à $D(g_ig_j)$ de $(fg_ig_j)^{m_{ij}}(s_i - s_j)$ soit nulle; comme l'image de g_ig_j dans $A_{g_ig_j}$ est inversible, la restriction de $f^{m_{ij}}(s_i - s_j)$ à $D(g_ig_j)$ est nulle. On peut alors supposer tous les m_{ij} égaux à un même entier m, et il existe donc une section $s' \in \Gamma(V,F)$ prolongeant les $f^m s_i$; cette section prolonge par suite $f^{n+m}s$, d'où d'1).

Reste à montrer que d 1) et d 2) entraînent a). Montrons d'abord que d 1) et d 2) entraînent que ces mêmes conditions sont vérifiées pour tout faisceau $F|D(g)$, où $g \in A$ est tel que $D(g) \subset V$: c'est évident pour d 1); d'autre part, si $t \in \Gamma(D(g),F)$ est telle que sa restriction à $D(f) \subset D(g)$ soit nulle, il existe par d 1) un entier $m \geq 0$ tel que $g^m t$ se prolonge en une section s de F sur V; appliquant d 2), on voit qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $f^n g^m t = 0$, et comme l'image de g dans A_g est inversible, $f^n t = 0$.

Cela étant, comme V est quasi-compact, le lemme 2 prouve que les conditions d'1) et d'2) sont vérifiées. Considérons alors le A-module $M = \Gamma(V,F)$, et définissons un homomorphisme de faisceaux $u: \tilde{M} \to j_*(F)$, où j est l'injection canonique $V \to X$. Comme les $D(f)$ forment une base de la topologie de X, il suffit pour chaque $f \in A$ de définir un homomorphisme $u_f: M_f \to \Gamma(D(f), j_*(F)) = \Gamma(D(f) \cap V, F)$, avec les conditions de compatibilité usuelles. Comme l'image canonique de f dans A_f est inversible, l'homomorphisme de restriction $M = \Gamma(V,F) \to \Gamma(D(f)\cap V,F)$ se factorise en $M \to M_f \xrightarrow{u_f} \Gamma(D(f)\cap V,F)$, et la vérification des conditions de compatibilité pour $D(g)\subset D(f)$ est immédiate. Cela étant, montrons que la condition d'1) (resp. d'2)) entraîne que chacun des u_f est surjectif (resp. injectif), ce qui prouvera que u est <u>bijectif</u>, et par suite que F est la restriction à V d'un faisceau isomorphe à $\tilde{M}$. Or, si $s \in \Gamma(D(f)\cap V,F)$, il existe d'après d'1) un entier $n \geq 0$ tel que $f^n s$ se prolonge en une section $z \in M$; on a alors $u_f(z/f^n) = s$, donc u_f est surjectif. De même, si $z \in M$ est tel que $u_f(z/1) = 0$, cela signifie que la restriction à $D(f)\cap V$ de la section z est nulle; d'après d'2), il existe un entier tel que $f^n z = 0$, d'où $z/1 = 0$ dans M_f, et u_f est donc injectif. C.Q.F.D.

<u>Corollaire. Tout faisceau quasi-cohérent sur un ouvert quasi-compact de X est induit par un faisceau quasi-cohérent sur X.</u>

5. <u>Faisceaux cohérents sur un spectre premier.</u>

<u>Théorème 3. Soient</u> A <u>un anneau noethérien,</u> $X = \operatorname{Spec}(A)$ <u>son spectre premier,</u> V <u>une partie ouverte de</u> X, F <u>un faisceau de</u> O_X<u>-modules défini sur</u> V. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes:</u>

a) F <u>est cohérent.</u>

b) F <u>est de type fini et quasi-cohérent.</u>

c) <u>Il existe un</u> A<u>-module</u> M <u>de type fini tel que</u> F <u>soit isomorphe au faisceau</u> $\tilde{M}|V$.

a) implique trivialement b). Pour voir que b) entraîne c), remarquons déjà, puisque V est quasi-compact, que F est isomorphe à un faisceau $\tilde{N}|V$, où N est un A-module (th.2). Pour tout $x \in V$, il existe par hypothèse un voisinage $D(f)\subset V$ de x et un homomorphisme surjectif $\tilde{A}_f^m \to \tilde{N}_f \to 0$; cet homomorphisme est de la forme $\tilde{u}$, où u est un homomorphisme surjectif $A_f^n \to N_f \to 0$ (n°3, cor.2 et 5 du th.1); donc N_f est un A_f-module de type fini. Comme V

est quasi-compact, il y a un recouvrement ouvert fini $(D(f_i))$ de V tel que chacun des N_{f_i} soit un A_{f_i}-module de type fini; par suite il y a une partie finie S de N dont l'image canonique dans chacun des N_{f_i} soit un système de générateurs de ce module. Soit M le sous-module de N engendré par S; la suite $0 \to M \to N$ étant exacte, il en est de même de $0 \to \tilde{M} \to \tilde{N}$ (n°3, cor. 3 du th. 1), donc aussi de $0 \to \tilde{M}|V \to \tilde{N}|V$; mais comme par construction la restriction de $\tilde{M}|V \to \tilde{N}|V$ à chacun des $D(f_i)$ est surjective, $\tilde{M}|V \to \tilde{N}|V$ est surjective, autrement dit F est isomorphe à $\tilde{M}|V$.

Montrons enfin que c) entraîne a). Il est clair que F est alors de type fini (th. 1); en outre, la question étant locale, on peut se borner au cas où $V = D(f)$. Comme A_f est noethérien, on voit finalement que tout revient à prouver que le noyau d'un homomorphisme $\tilde{A}^n \to \tilde{M}$, où M est un A-module, est de type fini. Or, un tel homomorphisme est de la forme $\tilde{u}$, où u est un homomorphisme $A^n \to M$ (n°3, cor. 2 du th. 1), et si $P = \operatorname{Ker} u$, on a $\tilde{P} = \operatorname{Ker} \tilde{u}$ (cor. 4 du th. 1). Comme A est noethérien, P est de type fini, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire</u>. <u>Sous les hypothèses du th. 3, tout faisceau cohérent de O_X-modules défini sur une partie ouverte</u> V <u>de</u> X <u>est la restriction à</u> V <u>d'un faisceau cohérent de O_X-modules défini sur</u> X.

6. <u>Propriétés fonctorielles des faisceaux quasi-cohérents sur un spectre premier</u>.

Soient A, A' deux anneaux, φ un homomorphisme de A' dans A, ${}^a\varphi$ l'application continue associée de $X = \operatorname{Spec}(A)$ dans $X' = \operatorname{Spec}(A')$ (n°2). Nous allons définir un <u>homomorphisme canonique</u> $O_{X'} \to {}^a\varphi_*(O_X)$ (autrement dit, un ${}^a\varphi$-morphisme de $O_{X'}$ dans O_X; chap. 0, §2, n°4). Pour tout $f' \in A'$, posons $f = \varphi(f')$; il résulte de (5) que l'on a ${}^a\varphi^{-1}(D(f')) = D(f)$. Les anneaux $\Gamma(D(f'), \tilde{A}')$ et $\Gamma(D(f), \tilde{A})$ s'identifient respectivement aux anneaux de fractions $A'_{f'}$ et A_f (n°3, th. 1 et prop. 6). Or, l'homomorphisme φ définit canoniquement un homomorphisme $\varphi_{f'}$ de $A'_{f'}$ dans A_f (chap. 0, §1, n°5), autrement dit, on a un homomorphisme d'anneaux $\Gamma(D(f'),\tilde{A}') \to \Gamma({}^a\varphi^{-1}(D(f')),\tilde{A})$. En outre, ces homomorphismes satisfont aux conditions de compatibilité: pour $D(g') \subset D(f')$ le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(D(f'),\tilde{A}') & \to & \Gamma({}^a\varphi^{-1}(D(f')),\tilde{A}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(D(g'),\tilde{A}') & \to & \Gamma({}^a\varphi^{-1}(D(g')),\tilde{A}) \end{array}$$

est commutatif (chap.0,§1,n°5); d'où l'homomorphisme de faisceaux annoncé, que nous désignerons par $\tilde{\varphi}$. Le couple $\underline{\Phi} = ({}^a\varphi,\tilde{\varphi})$ est donc un <u>morphisme</u> de l'espace annelé $(X,\mathcal{O}_X)$ dans l'espace annelé $(X',\mathcal{O}_{X'})$ (chap.0,§2,n°5).

Notons en outre que si on pose $x' = {}^a\varphi(x)$, l'homomorphisme $\tilde{\varphi}_x^b$ n'est autre que l'homomorphisme $A'_{x'} \to A_x$ déduit canoniquement de $\varphi: A' \to A$ (chap.0, §1,n°5). En effet, tout $s' \in A'_{x'}$ s'écrit g'/f', où $f' \notin j_{x'}$; $D(f')$ est donc un voisinage de x', et l'homomorphisme $\tilde{\varphi}_{D(f')}: \Gamma(D(f'),\tilde{A}') \to \Gamma({}^a\varphi^{-1}(D(f')),\tilde{A})$ déduit de $\tilde{\varphi}$ n'est autre que $\varphi_{f'}$; en considérant la section $s' \in \Gamma(D(f'),\tilde{A}')$ correspondant à $g'/f' \in A'_{f'}$ on obtient bien $\tilde{\varphi}_x^b(s') = \varphi(g')/\varphi(f')$ dans A_x.

Soit M un A-module; rappelons que l'on désigne par $M_{[\varphi]}$ le A'-module défini sur M par l'homomorphisme $\varphi: A' \to A$.

<u>Proposition</u> 7. <u>Il existe un isomorphisme canonique fonctoriel du $\mathcal{O}_{X'}$-Module $\tilde{M}_{[\varphi]}$ sur l'image directe $\underline{\Phi}_*(\tilde{M})$.</u>

Posons pour abréger $M' = M_{[\varphi]}$, et pour tout $f' \in A'$, posons encore $f = \varphi(f')$. Les modules de sections $\Gamma(D(f'),\tilde{M}')$ et $\Gamma(D(f),\tilde{M})$ s'identifient respectivement aux modules $M'_{f'}$ et M_f (sur $A'_{f'}$ et A_f respectivement); en outre, le $A'_{f'}$-module $(M_f)_{[\varphi_{f'}]}$ est canoniquement isomorphe à $M'_{f'}$ (chap.0,§1,n°5). On a donc un isomorphisme fonctoriel de $\Gamma(D(f'),\tilde{A}')$-modules

$$\Gamma(D(f'),\tilde{M}') \xrightarrow{\sim} \Gamma({}^a\varphi^{-1}(D(f')),\tilde{M})_{[\varphi_{f'}]}$$

et ces isomorphismes satisfont aux conditions de compatibilité usuelles (chap.0,§1,n°5), donc définissent l'isomorphisme fonctoriel annoncé.

<u>Corollaire</u> 1. <u>La foncteur image directe $\underline{\Phi}_*$ est exact sur la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur X.</u>

En effet, il est clair que le foncteur $M \to M_{[\varphi]}$ est exact, et on sait qu'il en est de même du foncteur $M' \to \tilde{M}'$ (n°3, cor.3 du th.1).

<u>Corollaire</u> 2. <u>Soit</u> U' <u>une partie ouverte quasi-compacte de</u> X' <u>telle que</u> $U = {}^a\varphi^{-1}(U')$ <u>soit quasi-compact; l'image directe par</u> Φ_* <u>d'un faisceau quasi-cohérent de</u> O_X<u>-modules sur</u> U <u>est un faisceau quasi-cohérent de</u> $O_{X'}$<u>-modules sur</u> U'.

En effet, un faisceau quasi-cohérent F sur U est de la forme $\tilde{M}|U$ où M est un A-module (n°4, th.2); comme $\Phi_*(F) = \Phi_*(\tilde{M})|U'$, le corollaire résulte de la prop.7 et du th.2.

Soit maintenant N' un A'-module, et associons-lui le A-module $N = N' \otimes_{A'} A_{[\varphi]}$.

<u>Proposition</u> 8. <u>Il existe un isomorphisme canonique fonctoriel du</u> O_X<u>-Module</u> $\Phi^*(\tilde{N}')$ <u>sur</u> $\tilde{N}$.

Remarquons d'abord que $j: z' \to z' \otimes 1$ est un A'-homomorphisme de N' dans $N_{[\varphi]}$: en effet, par définition, pour $f' \in A'$, on a $(f'z') \otimes 1 = z' \otimes \varphi(f') = \varphi(f')(z' \otimes 1)$. On en déduit (n°3, cor.2 du th.1) un homomorphisme $\tilde{j}: \tilde{N}' \to \tilde{N}_{[\varphi]}$ de $O_{X'}$-Modules, et en vertu de la prop.7, on peut considérer que $\tilde{j}$ applique $\tilde{N}'$ dans $\Phi_*(\tilde{N})$. Il correspond canoniquement à cet homomorphisme $\tilde{j}$ un homomorphisme $h = \tilde{j}^{\flat}_{\varphi}$ de $\Phi^*(\tilde{N}')$ dans $\tilde{N}$ (chap.0, §2, n°5); on va voir que pour chaque fibre h_x est <u>bijectif</u>. Posons $x' = {}^a\varphi(x)$, et soit $f' \in A'$ tel que $x' \in D(f')$; soit $f = \varphi(f')$. L'anneau $\Gamma(D(f),\tilde{A})$ s'identifie à A_f, les modules $\Gamma(D(f),\tilde{N})$ et $\Gamma(D(f'),\tilde{N}')$ à N_f et $N'_{f'}$ respectivement; soient $s' \in \Gamma(D(f'),\tilde{N}')$, identifiée à n'/f'^p ($n' \in N'$), s son image par $\tilde{j}_{D(f')}$ dans $\Gamma(D(f),\tilde{N})$; s est identifiée à $(n' \otimes 1)/f^p$. Soit d'autre part $t \in \Gamma(D(f),\tilde{A})$ identifié à g/f^q ($g \in A$); alors, par définition, on a $h_x(s'(x') \otimes t(x)) = t(x)s(x)$ (chap.0, §2, n°5). Mais on peut identifier canoniquement N_f à $N'_{f'} \otimes_{A'_{f'}} (A_f)_{[\varphi_{f'}]}$ (chap.0, §1, n°5); s correspond alors à l'élément $(n'/f'^p) \otimes 1$, et la section $y \to t(y)s(y)$ à $(n'/f'^p) \otimes (g/f^q)$.

Les diagrammes de compatibilité du chap.0,§1,n°5 montrent alors que h_x n'est autre que l'isomorphisme canonique $N'_{x'} \otimes_{A'_{x'}} (A_x)_{[\varphi_{x'}]} \xrightarrow{\sim} N_x = (N' \otimes_{A'} A_{[\varphi]})_x$.

__Corollaire 1.__ __Les sections de__ $\Phi^*(\tilde{N}')$ __de la forme__ $s'.{}^a\varphi$, __où__ s' __parcourt le__ A'-__module__ $\Gamma(\tilde{N}')$, __engendrent le__ A-__module__ $\Gamma(\Phi^*(\tilde{N}'))$.

En effet, l'application $s' \to s'.{}^a\varphi$ s'identifie à l'application $s' \to s' \otimes 1$ de N' dans N, lorsqu'on identifie N' et N à $\Gamma(\tilde{N}')$ et $\Gamma(\tilde{N})$ respectivement (n°3,th.1).

__Corollaire 2.__ __Soit__ U' __une partie ouverte quasi-compacte de__ X' __telle que__ $U = {}^a\varphi^{-1}(U')$ __soit quasi-compact; l'image réciproque par__ Φ __d'un faisceau quasi-cohérent de__ $O_{X'}$-__modules sur__ U' __est un faisceau quasi-cohérent de__ O_X-__modules sur__ U.

En effet, un faisceau quasi-cohérent G sur U' est de la forme $\tilde{N}'|U'$ où N' est un A'-module (n°4,th.2); comme $\Phi^*(G) = \Phi^*(\tilde{N}')|U$, le corollaire résulte de la prop.8 et du th.2.

Soient A'' un troisième anneau, φ' un homomorphisme $A'' \to A'$, et posons $\varphi'' = \varphi.\varphi'$. Il résulte aussitôt des définitions que ${}^a\varphi'' = ({}^a\varphi').({}^a\varphi)$, et $\tilde{\varphi}'' = \tilde{\varphi}.\tilde{\varphi}'$ (chap.0,§1,n°5). On en conclut que l'on a $\Phi'' = \Phi'.\Phi$.

7. __Caractérisation des morphismes des schémas affines.__

On dit qu'un espace annelé (X,O_X) est un __schéma affine__ s'il est isomorphe à un espace annelé de la forme $(\mathrm{Spec}(A),\tilde{A})$, où A est un anneau; on dit alors que $\Gamma(X,O_X)$, qui s'identifie à l'anneau A (n°3,th.1) est l'__anneau du schéma affine__ (X,O_X) et on le note $A(X)$ quand aucune confusion n'en résulte.

Soient A,B deux anneaux, (X,O_X) et (Y,O_Y) les schémas affines correspondants sur les spectres premiers $X = \mathrm{Spec}(A)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$. On a vu (n°6) qu'à tout homomorphisme d'anneaux φ: $B \to A$ correspond un morphisme $\Phi = ({}^a\varphi,\tilde{\varphi})$: $(X,O_X) \to (Y,O_Y)$. On notera que φ est entièrement déterminé par Φ, car on a par définition $\varphi = \Gamma(\tilde{\varphi})$: $\Gamma(\tilde{B}) \to \Gamma({}^a\varphi_*(\tilde{A})) = \Gamma(\tilde{A})$.

__Théorème 4.__ __Pour qu'un morphisme__ (ψ,θ) __de__ (X,O_X) __dans__ (Y,O_Y) __soit de la forme__ $({}^a\varphi,\tilde{\varphi})$, __où__ φ __est un homomorphisme de__ B __dans__ A, __il faut et il suffit que, pour__ *tout $x \in X$, l'image réciproque par θ_x^b de l'idéal maximal de $B_{\psi(x)}$ soit l'idéal maximal de A_x.*

La condition est nécessaire, car on a vu au n°6 que $\tilde{\varphi}_x^b$ est l'homomorphisme de $B_{{}^a\varphi(x)}$ dans A_x déduit canoniquement de φ; par définition de ${}^a\varphi(x) = \varphi^{-1}(j_x)$, cet homomorphisme a la propriété requise.

Prouvons que la condition est suffisante. Par définition, θ est un homomorphisme de O_Y dans $\psi_*(O_X)$, et on en déduit canoniquement un homomorphisme d'anneaux

$$\varphi = \Gamma(\theta): B = \Gamma(Y,O_Y) \to \Gamma(Y,\psi_*(O_X)) = \Gamma(X,O_X) = A.$$

L'hypothèse sur θ_x^b permet de déduire de cet homomorphisme, par passage aux quotients, un homomorphisme θ^x du corps des restes $k(\psi(x))$ dans le corps des restes $k(x)$, tel que, pour toute section $f \in \Gamma(Y,O_Y) = B$, on ait $\theta^x(f(\psi(x))) = \varphi(f)(x)$. La relation $f(\psi(x)) = 0$ est donc équivalente à $\varphi(f)(x) = 0$, ce qui signifie que $j_{\psi(x)} = j_{{}^a\varphi(x)}$ et s'écrit encore $\psi(x) = {}^a\varphi(x)$ pour tout $x \in X$, ou $\psi = {}^a\varphi$. On sait aussi que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B = \Gamma(Y,O_Y) & \xrightarrow{\varphi} & \Gamma(X,O_X) = A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{\psi(x)} & \xrightarrow[\theta_x^b]{} & A_x \end{array}$$

est commutatif, ce qui (vu la caractérisation d'un anneau de fractions comme solution d'un problème d'application universelle) signifie que θ_x^b est égal à l'homomorphisme φ_x: $B_{\psi(x)} \to A_x$ déduit de φ; comme la donnée des θ_x^b caractérise entièrement θ, on en conclut que l'on a $\theta = \tilde{\varphi}$, par définition de $\tilde{\varphi}$ (n°6).

Nous dirons qu'un morphisme (ψ,θ) d'espaces annelés satisfaisant à la condition du th.4 est un *morphisme de schémas affines*.

Corollaire. Si (X,O_X), (Y,O_Y) sont deux schémas affines, il exist un isomorphisme canonique de l'ensemble de morphismes de schémas affines $\mathrm{Hom}((X,O_X),(Y,O_Y))$ *sur l'ensemble d'homomorphismes* $\mathrm{Hom}(B,A)$, *où* $A = \Gamma(O_X)$ *et* $B = \Gamma(O_Y)$.

On peut encore dire que les foncteurs $A \to (\mathrm{Spec}(A),\tilde{A})$ et $(X,O_X)) \to \Gamma(O_X)$ définissent une *équivalence* de la catégorie des anneaux commutatifs et de la catégorie duale de la catégorie des schémas affines (T,I,1.2).

Archives Grothendieck sept 59

326 bis

§2. Préschémas; morphismes; préschémas sur un préschéma.

1. Définition des préschémas.

Etant donné un espace annelé $(X,\mathcal{O}_X)$, on dit qu'une partie ouverte V de X est un ouvert affine si l'espace annelé $(V,\mathcal{O}_X|V)$ est un schéma affine (§1,n°7).

Définition 1. On appelle préschéma un espace annelé $(X,\mathcal{O}_X)$ tel que tout point de X admette un voisinage ouvert affine. On dit que X est l'espace de base du préschéma $(X,\mathcal{O}_X)$.

Lemme 1. Si $(X,\mathcal{O}_X)$ est un préschéma, les ensembles ouverts affines forment une base de la topologie de X.

En effet, si V est un voisinage ouvert quelconque de $x \in X$, il existe par hypothèse un voisinage ouvert W de x tel que $(W,\mathcal{O}_X|W)$ soit un schéma affine; désignons par A son anneau. Dans l'espace W, $V\cap W$ est un voisinage ouvert de x; donc il existe $f \in A$ tel que D(f) soit un voisinage ouvert de x contenu dans $V\cap W$ (§1,n°1, prop.3a)). L'espace annelé $(D(f),\mathcal{O}_X|D(f))$ est alors un schéma affine d'anneau isomorphe à A_f (§1,n°3,prop.6), d'où le lemme.

Lemme 2. Si x et y sont deux points distincts de X, il existe un voisinage ouvert de l'un des points x,y qui ne contient pas l'autre (axiome (T_0)).

C'est évident si les deux points ne sont pas dans un même ouvert affine (déf.1); et s'ils sont dans un même ouvert affine, cela résulte du §1,n°1, cor.3 de la prop.2.

Proposition 1. L'application $x \to \overline{\{x\}}$ établit une correspondance biunivoque entre X et l'ensemble des parties fermées irréductibles de X. Pour qu'un ensemble ouvert $U\subset X$ rencontre $\overline{\{x\}}$, il faut et il suffit que $x \in U$.

Si V est un voisinage affine de x, $\overline{\{x\}}\cap V$ est l'adhérence de $\{x\}$ dans V, donc est irréductible (§1,n°1, cor. de la prop.4), et comme cet ensemble est dense dans $\overline{\{x\}}$, $\overline{\{x\}}$ est irréductible. Inversement, si Y est une partie fermée irréductible de X, $y \in Y$, et U un voisinage affine de y, $U\cap Y$ est partout dense dans Y et est irréductible, donc (§1,n°1, cor. de la prop.4),

$U \cap Y$ est l'adhérence dans U d'un point unique x, et a fortiori $Y \subset \overline{U}$ est l'adhérence de x dans X; ce point est le seul point x' tel que $Y = \overline{\{x'\}}$, car un tel point doit être dans $U \cap Y$, et par suite $U \cap Y$ est son adhérence dans U, ce qui entraîne $x' = x$. La seconde assertion de la prop.1 est évidente et valable dans tout espace topologique.

<u>Définition 2</u>. <u>Soient</u> (X,O_X) <u>un préschéma</u>, Y <u>une partie fermée irréductible de</u> X. <u>L'unique point</u> $y \in X$ <u>tel que</u> $Y = \overline{\{y\}}$ <u>est appelé le point générique de</u> Y.

Si Y,Y' sont deux parties fermées irréductibles de X, la condition $Y \subset Y'$ équivaut donc à $y \in Y'$, si y est le point générique de Y.

Si Y est une partie fermée irréductible de X, y son point générique l'anneau local O_y se note aussi $O_{X/Y}$ et s'appelle <u>l'anneau local de</u> X <u>le long de</u> Y, <u>ou l'anneau local de</u> Y <u>dans</u> X.

<u>Proposition 2</u>. <u>Si</u> (X,O_X) <u>est un préschéma, pour toute partie ouverte</u> V <u>de</u> X, <u>l'espace annelé</u> $(V,O_X|V)$ <u>est un préschéma</u>.

Cela résulte aussitôt du lemme 1 et de la déf.1. On dira que $(V,O_X|V)$ est le préschéma <u>induit</u> sur V par (X,O_X), ou la <u>restriction</u> de (X,O_X) à V.

2. <u>Morphismes de préschémas</u>.

<u>Définition 3</u>. <u>Etant donnés deux préschémas</u> $(X,O_X),(Y,O_Y)$, <u>on appelle morphisme (de préschéma) de</u> (X,O_X) <u>dans</u> (Y,O_Y) <u>tout morphisme</u> (ψ,θ) <u>d'espaces annelés tel que, pour tout</u> $x \in X$, <u>l'image réciproque par</u> θ_x^b <u>de l'idéal maximal de</u> $O_{\psi(x)}$ <u>soit l'idéal maximal de</u> O_x.

Par passage au quotient, l'application $\theta_x^b: O_{\psi(x)} \to O_x$ donne donc un monomorphisme $\theta^x: k(\psi(x)) \to k(x)$, ce qui permet donc de considérer k(x) comme une <u>extension de</u> $k(\psi(x))$.

Le composé (ψ'',θ'') de deux morphismes de préschémas (ψ,θ) et (ψ',θ') est encore un morphisme de préschéma, comme il résulte de l'expression de θ''^b à l'aide de θ^b et θ'^b, et du fait que $\psi_x \circ \alpha_{\psi(x)}$ est un isomorphisme (chap.0, §2, n^{os} 3 et 4). On en conclut que les préschémas forment une catégorie.

Convention de notations: Dans toute la suite de ce chapitre, et lorsque cela ne risquera pas d'entraîner confusion, on supprimera dans la notation d'un préschéma (resp. d'un morphisme) le faisceau structural (resp. le morphisme de faisceaux structuraux). Si U est une partie ouverte de l'espace de base d'un préschéma $(X,\mathcal{O}_X)$, lorsqu'on parlera de U comme d'un préschéma, il s'agira du préschéma induit sur U. Par contre, lorsqu'on parlera d'un point $x \in X$, où X est un préschéma, il s'agira toujours d'un point de l'espace de base X (et non de l'espace étalé X). De même, si ψ est un morphisme de préschémas $X \to Y$, M (resp. N) une partie de l'espace de base X (resp. Y), les notations $\psi(M)$ et $\psi^{-1}(N)$ désigneront, sauf mention expresse du contraire, les sous-espaces correspondants des espaces de base Y, X respectivement, et non des préschémas ayant ces sous-espaces pour espaces de base.

Proposition 3. Soient $(X,\mathcal{O}_X)$ un préschéma, $(S,\mathcal{O}_S)$ un schéma affine d'anneau A. Il existe une correspondance biunivoque canonique entre les morphismes du préschéma $(X,\mathcal{O}_X)$ dans le préschéma $(S,\mathcal{O}_S)$ et les homomorphismes de A dans l'anneau $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$.

Notons d'abord que, si $(X,\mathcal{O}_X)$ et $(Y,\mathcal{O}_Y)$ sont deux espaces annelés quelconques, un morphisme (ψ,θ) de $(X,\mathcal{O}_X)$ dans $(Y,\mathcal{O}_Y)$ définit canoniquement un homomorphisme d'anneaux $\Gamma(\theta)\colon \Gamma(Y,\mathcal{O}_Y) \to \Gamma(Y,\psi_*(\mathcal{O}_X)) = \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$. Dans le cas considéré, tout revient à voir qu'un homomorphisme quelconque φ de A dans $\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ correspond de cette façon à un morphisme de préschéma et un seul. Or, il y a par hypothèse un recouvrement ouvert (V_α) de X par des ouverts affines; par composition de φ avec l'homomorphisme de restriction $\Gamma(X,\mathcal{O}_X) \to \Gamma(V_\alpha,\mathcal{O}_X|V_\alpha)$ on obtient un homomorphisme $\varphi_\alpha\colon A \to \Gamma(V_\alpha,\mathcal{O}_X|V_\alpha)$ qui correspond à un morphisme unique $(\psi_\alpha,\theta_\alpha)$ du préschéma $(V_\alpha,\mathcal{O}_X|V_\alpha)$ dans $(S,\mathcal{O}_S)$, en vertu du th.4 du §1, n°7. En outre, pour tout couple (α,β), tout point de $V_\alpha \cap V_\beta$ admet un voisinage ouvert affine W contenu dans $V_\alpha \cap V_\beta$ (n°1, lemme 1); il est clair qu'en composant φ_α et φ_β avec les homomorphismes de restriction à W, on obtient le même homomorphisme $\Gamma(S,0_S) \to \Gamma(W,0_X)$, donc, en vertu des relations $(\theta_\alpha^b)_x = (\varphi_\alpha)_x$ pour tout $x \in V_\alpha$ et tout α, les restrictions à W des morphismes $(\psi_\alpha,\theta_\alpha)$ et $(\psi_\beta,\theta_\beta)$ coincident. On en conclut qu'il y a un morphisme d'espaces annelés (ψ,θ): $(X,0_X) \to (S,0_S)$ et un seul dont la restriction à chaque V_α est $(\psi_\alpha,\theta_\alpha)$, et il est clair que ce morphisme est un morphisme de préschémas et est tel que $\Gamma(\theta) = \varphi$.

On appelle <u>schéma local</u> un schéma affine dont l'anneau A est local; il existe alors dans $X = \mathrm{Spec}(A)$ un seul point a tel que $\{a\}$ soit <u>fermé</u>, et pour tout autre point $b \in X$, on a $a \in \overline{\{b\}}$ (§1,n°1,cor.3 de la prop.2). Pour tout préschéma $(Y,0_Y)$ et tout point $y \in Y$, le schéma local $\mathrm{Spec}(0_y)$ est appelé le <u>préschéma local de Y au point</u> y. Soit V un ouvert affine de Y contenant y, B l'anneau de $(V,0_Y|V)$; 0_y s'identifie canoniquement à B_y, et l'homomorphisme canonique i_y: $B \to B_y$ correspond par suite à un morphisme de préschémas $\mathrm{Spec}(0_y) \to V$. Si on compose ce morphisme avec le monomorphisme canonique $V \to Y$, on a donc un morphisme $\mathrm{Spec}(0_y) \to Y$, qui est indépendant de l'ouvert affine V (contenant y) choisi: on le voit en remarquant que si V' est un second ouvert affine contenant y, il existe un troisième ouvert affine W contenant y tel que $W \subset V \cap V'$ (n°1,lemme 1); on peut donc se limiter au cas où $V \subset V'$, et notre assertion est alors évidente, compte tenu du th.4 du §1, n°7. Le morphisme $\mathrm{Spec}(0_y) \to Y$ ainsi défini est dit <u>canonique</u>.

<u>Proposition 4</u>. <u>Soit</u> $(Y,0_Y)$ <u>un préschéma; pour tout</u> $y \in Y$, <u>soit</u> (ψ,θ) <u>le morphisme canonique</u> $(\mathrm{Spec}(0_y),0_y) \to (Y,0_Y)$. <u>Alors</u> ψ <u>est un homéomorphisme de</u> $\mathrm{Spec}(0_y)$ <u>sur le sous-espace de</u> Y <u>formé des</u> z <u>tels que</u> $y \in \overline{\{z\}}$; <u>en outre, si</u> $p = \psi^{-1}(z)$, θ_z^b: $0_z \to (0_y)_p$ <u>est un isomorphisme</u>.

En effet, tout z tel que $y \in \overline{\{z\}}$ appartient à tout ouvert affine contenant y, et on peut donc se ramener au cas où $(Y,0_Y)$ est un schéma affine; dans ce cas, la première assertion est un cas particulier du cor.3 de la prop.5, §1, n°2, et la seconde résulte trivialement de la définition de $\theta = \tilde{i}_y$ et de la correspondance biunivoque entre idéaux premiers de O_y et idéaux premiers de $B = O_X$ contenus dans j_y (chap.0,§1,n°2).

Il y a donc correspondance biunivoque canonique entre $\mathrm{Spec}(O_y)$ et l'ensemble des *parties fermées irréductibles contenant* y.

Corollaire. Pour que $y \in Y$ *soit le point générique d'une composante irréductible de* Y, *il faut et il suffit que le seul idéal premier de l'anneau local* O_y *soit son idéal maximal* (autrement dit, que O_y soit *de dimension zéro*).

Proposition 5. Soient (X,O_X) *un schéma local d'anneau* A, *a l'unique point fermé de* X, (Y,O_Y) *un préschéma. Tout morphisme* $u = (\psi,\theta) : (X,O_X) \to (Y,O_Y)$ *se factorise de façon unique en* $X \to \mathrm{Spec}(O_{\psi(a)}) \to Y$, *où la seconde flèche désigne le morphisme canonique, et la première correspond à un homomorphisme de* $O_{\psi(a)}$ *dans* A. *Cela établit une correspondance biunivoque canonique entre l'ensemble des morphismes* $(X,O_X) \to (Y,O_Y)$ *et l'ensemble des homomorphismes* $O_y \to A$ $(y \in Y)$.

En effet, pour tout $x \in X$, on a $a \in \overline{\{x\}}$, donc $\psi(a) \in \overline{\{\psi(x)\}}$, ce qui prouve que $\psi(X)$ est contenu dans tout ouvert affine contenant $\psi(a)$. On peut donc se ramener au cas où (Y,O_Y) est un schéma affine d'anneau B, et on a alors $u = ({}^a\varphi,\tilde{\varphi})$, où $\varphi \in \mathrm{Hom}(B,A)$ (§1,n°7, th.4); en outre on a $\varphi^{-1}(m_a) = j_{\psi(a)}$, et par suite l'image par φ de tout élément de $B - j_{\psi(a)}$ est inversible dans l'anneau local A; la factorisation de l'énoncé résulte donc de la propriété universelle des anneaux de fractions (chap.0,§1,n°2). Inversement, à tout homomorphisme $O_y \to A$ correspond un morphisme unique $X \to \mathrm{Spec}(O_y)$ (§1,n°7,th.4), et en le composant avec le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(O_y) \to Y$, on obtient un morphisme $X \to Y$, ce qui achève de démontrer la proposition.

Les schémas affines dont l'anneau est un *corps* K ont un espace de base réduit à un seul point; si on tient compte de ce que tout homomorphisme $O_y \to K$ correspond biunivoquement à un monomorphisme $k(y) \to K$ du corps des restes de O_y dans K, on voit que:

Corollaire. Si (X,O_X) est un schéma local dont l'anneau est un corps K, *il y a correspondance biunivoque canonique entre l'ensemble des morphismes* $(X,O_X) \to (Y,O_Y)$ *et l'ensemble des monomorphismes* $k(y) \to K$ $(y \in Y)$.

En particulier, si K,K' sont deux corps, il y a correspondance biunivoque entre les monomorphismes $K \to K'$ et les morphismes $\mathrm{Spec}(K') \to \mathrm{Spec}(K)$.

3. *Préschémas au-dessus d'un préschéma.*

Définition 4. Etant donné un préschéma (S,O_S), *on dit que la donnée d'un préschéma* (X,O_X) *et d'un morphisme de préschémas* (ψ,θ): $(X,O_X) \to (S,O_S)$ *définit un préschéma* (X,O_X) *au-dessus du préschéma* (S,O_S), *ou un* S-*préschéma. Le morphisme* (ψ,θ) *est appelé le morphisme structural du* S-*préschéma* (X,O_X). *Lorsque* (S,O_S) *est un schéma affine d'anneau* A, *on dit aussi que* (X,O_X) *muni de* (ψ,θ) *est un préschéma au-dessus de l'anneau* A *(ou un* A-*préschéma).*

La prop.3 prouve que la donnée d'un préschéma au-dessus d'un anneau A équivaut à la donnée d'un espace topologique X, muni d'un faisceau B de A-*algèbres*, tel que l'espace annelé (X,B) soit un préschéma. Un préschéma quelconque peut donc toujours être considéré comme un préschéma au-dessus de l'anneau A.

Si φ: $X \to S$ est le morphisme structural d'un S-préschéma X, on dit qu'un point $x \in X$ est *au-dessus d'un point* $s \in S$ si $\varphi(x) = s$.

Soient X,Y deux préschémas au-dessus d'un préschéma S; un *morphisme* $X \to Y$ *de préschémas au-dessus de* S (ou S-morphisme) est par définition un morphisme de préschémas ψ: $X \to Y$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

(où les flèches obliques sont les morphismes structuraux) soit commutatif: cela entraîne que pour tout $s \in S$ et tout $x \in X$ au-dessus de s, $\psi(x)$ doit aussi être au-dessus de s. Il résulte aussitôt de cette définition que le composé de deux S-morphismes est un S-morphisme; les S-préschémas forment donc une <u>catégorie</u>. Lorsque S est un schéma affine d'anneau A, on dira aussi A-<u>morphisme</u> au lieu de S-morphisme.

Si $\psi: X \to Y$ est un S-morphisme, la restriction de ψ à toute partie ouverte U de X est un S-morphisme $U \to Y$. Soient (U_α) un recouvrement ouvert de l'espace de base X, et pour chaque α, soit $\psi_\alpha: U_\alpha \to Y$ un S-morphisme; si, pour tout couple d'indices (α,β), les restrictions de ψ_α et ψ_β à $U_\alpha \cap U_\beta$ coïncident, il existe un S-morphisme $X \to Y$ et un seul dont la restriction à chaque U_α soit ψ_α.

Si $\psi: X \to Y$ est un S-morphisme tel que $\psi(X) \subset V$, où V est une partie ouverte de Y, alors ψ, considéré comme morphisme de X dans V (chap.0,§2,n°4) est encore un S-morphisme.

Soit $S' \to S$ un morphisme de préschémas; pour tout S'-préschéma X, le morphisme composé $X \to S' \to S$ définit X comme S-préschéma; réciproquement, si S' est le préschéma induit par S sur un ouvert de son espace de base, et si X est un S-préschéma dont l'image par le morphisme structural est contenue dans S', alors X est un S'-préschéma. Dans ce dernier cas, si Y est un second S-préschéma dont le morphisme structural applique Y dans S', tout S-morphisme de X dans Y est un S'-morphisme, et réciproquement.

Archives,
Grothendieck - Sept 89

Additions to chapter I , § 2 :

P.31 , before prop.7 , add :

Corollaire .- Soient T un schéma affine d'anneau D , $\alpha=({}^a\rho,\tilde{\rho})$ (resp. $\beta=({}^a\sigma,\tilde{\sigma})$) un morphisme $T\to X$ (resp. $T\to Y$) , où ρ (resp. σ) est un A-homomorphisme de B (resp. C) dans D ; alors $\alpha\times_S\beta=({}^a\tau,\tilde{\tau})$, où τ est l'homomorphisme de $B\otimes_A C$ dans D tel que $\tau(b\otimes c)=\rho(b)\sigma(c)$.

P.35 , before prop.8 , add :

En premier lieu , $(X,Y)\to X\times_S Y$ est un bifoncteur covariant dans la catégorie des S-préschémas : il suffit en effet de remarquer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X\times Y \arrow[r, "f\times 1"] \arrow[d] & X'\times Y \arrow[r, "f'\times 1"] \arrow[d] & X''\;Y \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & X' \arrow[r, "f'"'] & X'' \end{tikzcd}$$

est commutatif .

P.35 , after prop.8 , add :

Corollaire .- Soient X,Y deux S-préschémas , $\varphi : X\to S$, $\psi : Y\to S$ leurs morphismes structuraux . Si on identifie canoniquement X à $X\times_S S$ et Y à $S\times_S Y$, les projections $X\times_S Y\to X$ et $X\times_S Y\to Y$ s'identifient respectivement à $1\times\psi$ et $\varphi\times 1$.

La vérification est immédiate .

P.36 , at the middle of the page , add :

Il est immédiat que $X\to X^{S'}$ est un foncteur covariant de la catégorie des S-préschémas dans celle des S'-préschémas , lorsqu'on définit $f^{S'}$ comme égal à $f\times_S 1$ pour tout ~~XXX~~ S-morphisme $f : X\to Y$.

P.37 , after cor.1 , add :

Corollaire 2 .- Soient Y un S-préschéma , f : X $\to$ Y un morphisme qui fait de X un Y-préschéma (et par suite aussi un S-préschéma) . Le préschéma $X^{S'}$ s'identifie alors au produit $X \times_Y Y^{S'}$, la projection $X \times_Y Y^{S'} \to Y^{S'}$ s'identifiant à $f^{S'}$.

Soit : Y S le morphisme structural ; on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[d] & Y^{S'} \arrow[l, "\psi^{S'}"'] \arrow[d] & X^{S'} \arrow[l, "f^{S'}"'] \arrow[d] \\ S & Y \arrow[l, "\psi"] & X \arrow[l, "f"] \end{tikzcd}$$

Or $Y^{S'}$ s'identifie à $S'\psi$, et $X^{S'}$ à $S'\psi \circ f$; tenant compte de la prop. 9 et du cor. de la prop.8 , on en déduit le corollaire .

P.41 , after prop.15 , add :

Corollaire .- Si le S-morphisme f : X $\to$ Y est géométriquement injectif il en est de même de $f^{S'} : X^{S'} \to Y^{S'}$.

P. 35 , ~~b~~before line -2 , add :

Si par exemple p_1, p_2, p_3 désignent les projections de $X_1 \times X_2 \times X_3$, et si on identifie ce préschéma à $(X_1 \times X_2) \times X_3$, la projection dans $X_1 \times X_2$ est identifiée à $(p_1, p_2)_S$.

P. 37 , at the end of n°5 , add :

Remarque .- Soient $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ deux S-morphismes qui sont des monomorphismes de préschémas ; alors $f \times_S g$ est un monomorphisme . En effet , si p, q sont les projections de $X \times_S Y$, p', q' celles de $X' \times_S Y'$, u, v deux S-morphismes $T \to X \times_S Y$, la relation $(f \times_S g) \circ u = (f \times_S g) \circ v$ entraîne $p' \circ (f \times_S g) \circ u = p' \circ (f \times_S g) \circ v$, autrement dit $f \circ p \circ u = f \circ p \circ v$, et comme f est un monomorphisme , $p \circ u = p \circ v$; utilisant le fait que g est un monomorphisme , on obtient de même $q \circ u = q \circ v$, donc u=v .

Il en résulte que pour toute extension $S' \to S$ du préschéma de base , $f^{S'} : X^{S'} \to X'^{S'}$ est un monomorphisme .

P. 40 , before prop.14 , insert :

Par exemple , le morphisme canonique d'un~~e~~ préschéma local ~~Oy~~ $\operatorname{Spec}(O_y) \to Y$ (n°2) est géométriquement injectif (n°2, prop.4).

P. 45 , after the proof of prop.2 , add :

On dit que $f = j \circ g$ est la factorisation canonique de l'immersion f , et le sous-préschéma Z et l'isomorphisme g sont dits associés à f .

P. ~~Ж~~ 56 , after cor.1 , add :

On dit que $(p,q)_T$ est l'immersion canonique de $X \times_S T$ dans $X \times_T Y$.

p. 57, before section 5, add :

Remarque .- Supposons que $f : X \to Y$ soit un *monomorphisme*. Alors Δ_X est un *isomorphisme de* X *sur* $X \times_Y X$. En effet, soient p_1, p_2 les projections de $X \times_Y X$; pour tout couple de Y-morphismes u, v de T dans $X \times_Y X$, on a $f \circ p_1 \circ u = f \circ p_1 \circ v$, $f \circ p_2 \circ u = f \circ p_2 \circ v$ par définition d'un Y-morphisme, d'où $p_1 \circ u = p_1 \circ v$, $p_2 \circ u = p_2 \circ v$ et par suite $u = v$. Appliquons en particulier ceci au Y-morphisme $\Delta_X \circ p_1$ de $X \times_Y X$ dans lui-même ; il est nécessairement égal à l'identité, donc en vertu de (1), p_1 et Δ_X sont des isomorphismes réciproques.

4 . Produit de préschémas .

Définition 5 .- *Etant donnés deux S-préschémas X,Y , on dit qu'un triplet (Z,p_1,p_2) formé d'un S-préschéma Z et de deux S-morphismes $p_1 : Z \to X$, $p_2 : Z \to Y$, est un produit des S-préschémas X et Y , si, pour tout S-préschéma T , l'application $f \to (p_1 \circ f, p_2 \circ f)$ est une bijection de l'ensemble des S-morphismes de T dans Z , sur l'ensemble des couples formés d'un S-morphisme de T dans X et d'un S-morphisme de T dans Y .*

Il s'agit donc là de la notion générale de *produit* de deux objets d'une catégorie , appliquée à la catégorie des S-préschémas (T,I,1.1) ; en particulier , un produit de deux S-préschémas est *unique* à un S-isomorphisme près . En raison de cette unicité , on désigne le plus souvent un produit de deux S-préschémas X,Y par la notation $X \times_S Y$, (ou simplement $X \times Y$ si aucune confusion n'est à craindre) les morphismes p_1, p_2 (appelés les *projections canoniques* de $X \times_S Y$ dans X et Y respectivement) étant supprimés de la notation . Si $g : T \to X$, $h : T \to Y$ sont deux S-morphismes , on désignera par $(g,h)_S$ ou simplement (g,h) le S-morphisme $f : T \to X \times_S Y$ tel que $p_1 \circ f = g$, $p_2 \circ f = h$. Si X',Y' sont deux S-préschémas , p'_1, p'_2 les projections canoniques de $X' \times_S Y'$ (supposé exister) , $u : X' \to X$, $v : Y' \to Y$ deux S-morphismes , on écrira $u \times_S v$ (ou simplement $u \times v$) le S-morphisme $(u \circ p'_1, v \circ p'_2)_S$ de $X' \times_S Y'$ dans $X \times_S Y$.

Lorsque S est un schéma affine d'anneau A , on remplace souvent S par A dans les notations précédentes .

Proposition 6 .- *Soient X,Y,S trois schémas affines , B,C,A leurs anneaux respectifs . Si Z est le spectre premier de l'anneau $B \otimes_A C$, p_1, p_2 les S-morphismes $Z \to X$, $Z \to Y$ correspondant aux homomorphismes canoniques $u : b \to b \otimes 1$ et $v : c \to 1 \otimes c$ de B et C dans $B \otimes_A C$, alors (Z,p_1,p_2) est un produit de X et Y .*

En vertu du th.4 du § 1,n°7 , tout revient à vérifier que si , à tout Λ-homomorphisme f de $B \otimes_\Lambda C$ dans une Λ-algèbre L, on associe les homomorphismes $f\circ u$ et $f\circ v$, on définit une bijection de l'ensemble $\mathrm{Hom}_\Lambda(B\otimes_\Lambda C,L)$ sur le produit $\mathrm{Hom}_\Lambda(B,L)\times\mathrm{Hom}_\Lambda(C,L)$, ce qui résulte immédiatement des définitions et de la relation $b\otimes c=(b\otimes 1)(1\otimes c)$.

<u>Proposition 7 .- Soient</u> X,Y <u>deux</u> S-<u>préschémas</u>, $\varphi : X\to S$, $\psi : Y\to S$ <u>leurs morphismes structuraux</u>, S' <u>une partie ouverte de</u> S <u>telle que</u> $\varphi(X)\subset S'$, $\psi(Y)\subset S'$. <u>Tout produit des</u> S-<u>préschémas</u> X,Y <u>est aussi un produit des</u> S'-<u>préschémas</u> X,Y, <u>et réciproquement</u>.

Soit (Z',p'_1,p'_2) un produit de X,Y considérés comme S'-préschémas ; p'_1 et p'_2 sont aussi des S-morphismes. Soit alors T un S-préschéma ; s'il existe un S-morphisme de T dans X,Y ou Z', il résulte des définitions que le morphisme structural de T dans S applique T dans S', donc T peut être considéré comme ~~XXXX~~ S'-préschéma, et tout S-morphisme de T dans X,Y ou Z' est un S'-morphisme ; on en conclut que (Z',p'_1,p'_2) est un produit de X,Y considérés comme S-préschémas. Inversement, si (Z,p_1,p_2) est un produit de X,Y considérés comme S-préschémas, et si θ est le morphisme structural $Z\ S$, on a nécessairement $\theta(Z)=\varphi(p_1(Z))\subset S'$, donc Z peut être considéré comme S'-préschéma, p_1,p_2 comme des S'-morphismes ; tout S'-morphisme d'un S'-préschéma T' dans X,Y ou Z étant aussi un S-morphisme, il est clair que (Z,p_1,p_2) est un produit de X,Y considérés comme S'-préschémas.

<u>Théorème 1 .- Etant donnés deux</u> S-<u>préschémas</u> X,Y, <u>il existe un produit</u> $X\times_S Y$.

Nous procéderons en plusieurs étapes.

<u>Lemme 3 .- Soient</u> (Z,p,q) <u>un produit de</u> X <u>et</u> Y, U,V <u>des parties ouvertes de</u> X,Y <u>respectivement. Si on pose</u> $W=\overset{-1}{p}(U)\cap\overset{-1}{q}(V)$, <u>le triplet formé de</u> W <u>et des restrictions de</u> p <u>et</u> q <u>à</u> W (considérées comme des morphismes $W\to U$, $W\to V$ respectivement) <u>est un produit de</u> U <u>et</u> V.

En effet, si T est un S-préschéma, on peut identifier les S-morphismes $T\to W$ et les S-morphismes $T\to Z$ appliquant T dans W. Si alors

$g : T \to U$, $h : T \to V$ sont deux S-morphismes quelconques , on peut les considérer comme des S-morphismes de T dans X et Y respectivement , et par hypothèse il y a donc un S-morphisme et un seul $f : T \to Z$ tel que $g = p \circ f$, $h = q \circ f$. Comme $p(f(T)) \subset U$, $q(f(T)) \subset V$, on a $f(T) \subset p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V) = W$, d'où notre assertion .

<u>Lemme 4 .- Soient</u> Z <u>un</u> S-<u>préschéma</u> , $p : Z \to X$, $q : Z \to Y$ <u>deux</u> S-<u>morphismes</u> , (U_α) <u>un recouvrement ouvert de</u> X , (V_λ) <u>un recouvrement ouvert de</u> Y . <u>On suppose que pour tout couple</u> (α, λ) , <u>le</u> S-<u>préschéma</u> $W_{\alpha\lambda} = p^{-1}(U_\alpha) \cap q^{-1}(V_\lambda)$ <u>et les restrictions de</u> p <u>et</u> q <u>à</u> $W_{\alpha\lambda}$ <u>constituent un produit de</u> U_α <u>et</u> V_λ . <u>Alors</u> (Z,p,q) <u>est un produit de</u> X <u>et</u> Y .

Montrons d'abord que si f_1, f_2 sont deux S-morphismes $T \to Z$, les relations $p \circ f_1 = p \circ f_2$ et $q \circ f_1 = q \circ f_2$ entraînent $f_1 = f_2$. En effet , Z est réunion des $W_{\alpha\lambda}$, donc les $f_1^{-1}(W_{\alpha\lambda})$ forment un recouvrement ouvert de T , et il en est de même des $f_2^{-1}(W_{\alpha\lambda})$. En outre , on a $f_1^{-1}(W_{\alpha\lambda}) = f_1^{-1}(p^{-1}(U_\alpha)) \cap f_1^{-1}(q^{-1}(V_\lambda)) = f_2^{-1}(p^{-1}(U_\alpha)) \cap f_2^{-1}(q^{-1}(V_\lambda)) = f_2^{-1}(W_{\alpha\lambda})$ par hypothèse , et tout revient à voir que les restrictions de f_1 et f_2 à $f_1^{-1}(W_{\alpha\lambda}) = f_2^{-1}(W_{\alpha\lambda})$ sont identiques pour tout couple d'indices . Mais comme ces restrictions peuvent être considérées comme des S-morphismes de $f_1^{-1}(W_{\alpha\lambda})$ dans $W_{\alpha\lambda}$, notre assertion résulte de l'hypothèse et de la déf.5 .

Supposons maintenant donnés deux S-morphismes $g : T \to X$, $h : T \to Y$. Posons $T_{\alpha\lambda} = g^{-1}(U_\alpha) \cap h^{-1}(V_\lambda)$; les $T_{\alpha\lambda}$ forment un recouvrement ouvert de T . Par hypothèse , il existe un S-morphisme $f_{\alpha\lambda}$ tel que $p \circ f_{\alpha\lambda}$ et ~~XXX~~ $q \circ f_{\alpha\lambda}$ soient les restrictions respectives de g et h à $T_{\alpha\lambda}$. En outre , montrons que les restrictions de $f_{\alpha\lambda}$ et de $f_{\beta\mu}$ à $T_{\alpha\lambda} \cap T_{\beta\mu}$ coïncident , ce qui achèvera de prouver le lemme . Or , les images de $T_{\alpha\lambda} \cap T_{\beta\mu}$ par $f_{\alpha\lambda}$ et par $f_{\beta\mu}$ sont contenues dans $W_{\alpha\lambda} \cap W_{\beta\mu}$ par définition . Comme $W_{\alpha\lambda} \cap W_{\beta\mu} = p^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \cap q^{-1}(V_\lambda \cap V_\mu)$, il résulte du lemme 3 que $W_{\alpha\lambda} \cap W_{\beta\mu}$ et les restrictions à ce préschéma de p et q constituent un <u>produit</u> de $U_\alpha \cap U_\beta$ et de $V_\lambda \cap V_\mu$. Comme $p \circ f_{\alpha\lambda}$ et $p \circ f_{\beta\mu}$ co-

coïncident dans $T_{\alpha\lambda} \cap T_{\beta\mu}$ et qu'il en est de même de $q \circ f_{\alpha\lambda}$ et $q \circ f_{\beta\mu}$, on voit que $f_{\alpha\lambda}$ et $f_{\beta\mu}$ coïncident dans $T_{\alpha\lambda} \cap T_{\beta\mu}$, c.q.f.d.

e) *Soient (U_α) un recouvrement ouvert de X, (V_λ) un recouvrement ouvert de Y, et supposons que pour tout couple d'indices (α,λ), il existe un produit de U_α et V_λ ; alors il existe un produit de X et Y.*

Appliquant le lemme 3 aux ouverts $U_\alpha \cap U_\beta$, $V_\lambda \cap V_\mu$, on voit qu'il existe un produit des S-préschémas induits par X et Y respectivement sur ces ouverts ; en outre, si on pose $i=(\alpha,\lambda)$, $j=(\beta,\mu)$, il y a un isomorphisme canonique h_{ij} (resp. h_{ji}) de ce produit sur un S-préschéma W_{ij} (resp. W_{ji}) induit par $U_\alpha \times_S V_\lambda$ (resp. $U_\beta \times_S V_\mu$) sur un ouvert ; $f_{ij}=h_{ij} \circ h_{ji}^{-1}$ est donc un isomorphisme de W_{ji} sur W_{ij}. En outre, pour un troisième couple $k=(\gamma,\nu)$, on a $f_{ik}=f_{ij} \circ f_{jk}$ dans $W_{ki} \cap W_{kj}$, comme il résulte de l'application du lemme 3 aux ouverts $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ et $V_\lambda \cap V_\mu \cap V_\nu$ dans U_β et V_μ respectivement. Il y a par suite un espace annelé Z, un recouvrement ouvert (Z_i) de l'espace de base de cet espace annelé (noté encore Z par nos conventions), et pour chaque i un isomorphisme g_i de l'espace annelé induit Z_i sur $U_\alpha \times_S V_\lambda$, de sorte que, pour tout couple (i,j), on ait $f_{ij}=g_i \circ g_j^{-1}$ (FAC, I, § 1, n°4) ; de plus, on a $g_i(Z_i \cap Z_j)=W_{ij}$. Si p_i, q_i, θ_i sont les projections et le morphisme structural de $U_\alpha \times_S V_\lambda$, on constate aussitôt que $p_i \circ g_i = p_j \circ g_j$ dans $Z_i \cap Z_j$, et de même pour les deux autres morphismes. On peut donc définir des morphismes d'espaces annelés $p : Z \to X$ (resp. $q : Z \to Y$, $\theta : Z \to S$) par la condition que p (resp. q, θ) coïncide avec $p_i \circ g_i$ (resp. $q_i \circ g_i$, $\theta_i \circ g_i$) dans chacun des Z_i. Il est clair que Z est un préschéma (par définition des préschémas), et les morphismes de préschémas étant caractérisés par des conditions ponctuelles (n°2), p, q et θ sont de tels morphismes ; Z, muni de θ, est alors un S-préschéma. Montrons maintenant que $Z_i' = p^{-1}(U_\alpha) \cap q^{-1}(V_\lambda)$ est égal à Z_i. Pour tout indice $j=(\beta,\mu)$, on a $Z_j \cap Z_i' = g_j^{-1}(p_j^{-1}(U_\alpha) \cap q_j^{-1}(V_\lambda)$

Or , $p_j^{-1}(U_\alpha)\cap q_j^{-1}(V_\lambda)=$ $=p_j^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)\cap q_j^{-1}(V_\lambda\cap V_\mu)$; en vertu du lemme 3 , les restrictions de p_j et q_j à $p_j^{-1}(U_\alpha)\cap q_j^{-1}(V_\lambda)$ définissent sur ce S-préschéma une structure de produit de $U_\alpha\cap U_\beta$ et $V_\lambda\cap V_\mu$; mais l'unicité du produit entraîne alors que $p_j^{-1}(U_\alpha)\cap q_j^{-1}(V_\lambda)=W_{ji}$. On a par suite $Z_j\cap Z_i'=$ $=Z_j\cap Z_i$ pour tout j , d'où $Z_i'=Z_i$. On déduit alors du lemme 4 que (Z,p,q) est un produit de X et Y .

b) Soient $\varphi : X\to S$, $\psi : Y\to S$ les morphismes structureux de X et Y, (S_i) un recouvrement ouvert de S , et posons $X_i=\varphi^{-1}(S_i)$, $Y_i=\psi^{-1}(S_i)$. Si chacun des produits $X_i\times_S Y_i$ existe , alors $X\times_S Y$ existe .

D'après a) , tout revient à prouver que les produits $X_i\times_S Y_j$ existent quels que soient i et j . Posons $X_{ij}=X_i\cap X_j=\varphi^{-1}(S_i\cap S_j)$, $Y_{ij}=$ $=Y_i\cap Y_j=\psi^{-1}(S_i\cap S_j)$; en vertu du lemme 3 , le produit $Z_{ij}=X_{ij}\times_S Y_{ij}$ existe . Notons maintenant que si T est un S-préschéma et s'il existe des S-morphismes $g : T\to X_i$, $h : T\to Y_j$, on a nécessairement $\varphi(g(T))$ $=\psi(h(T))\subset S_i\cap S_j$, autrement dit $g(T)\subset X_{ij}$ et $h(T)\subset Y_{ij}$; il est alors immédiat que Z_{ij} est un produit de X_i et Y_j .

c) Nous pouvons maintenant achever de démontrer le th.1 , Si S est un schéma affine , il y a des recouvrements $(U_\alpha),(V_\lambda)$ respectivement, formés d'ouverts affines ; comme $U_\alpha\times_S V_\lambda$ existe en vertu de la prop. 6 , il en est de même de $X\times_S Y$ par a) . Si S est un préschéma quelconque , il y a un recouvrement (S_i) de S formé d'ouverts affines . Si $\varphi: X\to S$, $\psi: Y\to S$ sont les morphismes structureux , et si on pose $X_i=\varphi^{-1}(S_i)$, $Y_i=\psi^{-1}(S_i)$, les produits $X_i\times_{S_i} Y_i$ existent d'après ce qui précèdent ; mais alors les produits $X_i\times_S Y_i$ existent aussi (prop. 7) , donc il en est de même de $X\times_S Y$ d'après b) .

Corollaire ~~Proposition 8~~ .- Soient $Z=X\times_S Y$ le produit de deux S-préschémas , p,q les projections de Z dans X et Y , φ (resp ψ) le morphisme structural de X (resp. Y) .Soient S' une partie ouverte de S , U (resp. V) une partie ouverte de X (resp.Y), contenue dans $\varphi^{-1}(S')$ (resp. $\psi^{-1}(S')$) . Alors le produit $U \times_{S'} V$ s'identifie canoniquement au préschéma induit par Z sur $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ (considéré comme S'-préschéma) . En outre , si $f : T \to X$, $g : T \to Y$ sont des S-morphismes tels que $f(T) \subset U$, $g(T) \subset V$, le morphisme $(f,g)_{S'}$ s'identifie à la restriction de $(f,g)_S$ à $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$.

Cela résulte de la prop.7 et du lemme 3 .

5 . Propriétés formelles du produit ; changement de préschéma de base

Le lecteur remarquera que toutes les propriétés de ce n° sont valables sans modification dans toute catégorie où la notion de produit de deux objets quelconques existe (car il est clair que la notion de S-objet et de S-morphisme peut se définir exactement comme au n°3 pour tout objet S de la catégorie) .

Proposition 8 .- Pour tout S-préschéma X , la première (resp. seconde) projection de $X \times_S S$ (resp. $S \times_S X$) est un isomorphisme fonctoriel de $X \times_S S$ (resp. $S \times_S X$) sur X , dont l'isomorphisme réciproque est $(1_X, \varphi)_S$ (resp. $(\varphi, 1_X)_S$) , en désignant par φ le morphisme structurel $X \to S$; on peut donc écrire

$$X \times_S S = S \times_S X = X \quad .$$

Il suffit de prouver que $(X, 1_X, \varphi)$ est un produit de X et S . Or , si T est un S-préschéma , le seul S-morphisme de T dans S est nécessairement le morphisme structural $\psi : T \quad S$. Si alors f est un S-morphisme de T dans X , on a nécessairement $\psi = \varphi \circ f$, d'où notre assertion .

On peut définir de la même manière qu'au n°4 le produit d'un nombre fini quelconque n de S-préschémas ; l'existence de ces produits résulte du th.1 du n°4 par récurrence sur n , en remarquant que $(X_1 \times_S X_2 \times \ldots \times_S X_{n-1}) \times_S X_n$ satisfait à la définition du produit . L'unicité du produit entraîne , comme dans toute catégorie , ses propriétés de commutativité et d'associativité .

Soient S, S' deux préschémas , $\varphi : S' \to S$ un morphisme , qui fait de S' un S-préschéma . Pour tout S-préschéma X , considérons le produit

$X \times_S S'$, et soient p et π' ses projections dans X et S' respectivement. Muni de π', ce produit est un S'-préschéma ; quand on le considère comme tel, on le désigne par $X^{S'}$ ou X^{φ}, et on dit que c'est le préschéma obtenu par *extension du préschéma de base* de S à S', au moyen de φ. On notera que si π est le morphisme structural de X, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] & X^{S'} \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "\pi'"] \arrow[dl, "\theta"'] \\ S & S' \arrow[l, "\varphi"] \end{tikzcd}$$

est commutatif (θ étant le morphisme structural de $X \times_S S'$, considéré comme S-préschéma). Lorsque S et S' sont des schémas affines d'anneaux A, A' respectivement, on écrit aussi $X^{A'}$ ou $X \otimes_A A'$ au lieu de $X^{S'}$; si X est lui-même affine d'anneau B, $X^{A'}$ est affine d'anneau $B \otimes_A A'$, obtenu par extension à A' de l'anneau des scalaires de l'algèbre B sur A.

Le préschéma $X^{S'}$ peut encore être considéré comme solution d'un problème d'*application universelle* : tout S'-préschéma T est aussi un S-préschéma ; tout S-morphisme $g : T \to X$ s'écrit alors d'une seule manière $g = p \circ f$, où f est un S'-morphisme $T \to X^{S'}$, comme il résulte de la définition du produit appliquée aux S-morphismes g et $\psi : T \to S'$.

Proposition 9 ("transitivité de l'extension des préschémas de base"). *Soient* S'' *un préschéma*, $\varphi' : S'' \to S'$ *un morphisme de* S'' *dans* S'. *Pour tout* S-*préschéma* X, *il existe un isomorphisme canonique fonctoriel du* S''-*préschéma* $(X^{\varphi})^{\varphi'}$ *sur le* S''-*préschéma* $X^{\varphi \cdot \varphi'}$.

En effet, soient T un S''-préschéma, ψ son morphisme structural, g un S-morphisme de T dans X (T étant considéré comme S-préschéma de morphisme structural $\varphi \cdot \varphi' \cdot \psi$). Comme T est aussi un S'-préschéma de morphisme structural $\varphi' \circ \psi$, on peut écrire $g = p \circ g'$, où g' est un S'-morphisme $T \to X$, puis $g' = p' \circ g''$, où g'' est un S''-morphisme $T \to (X^{\varphi})^{\varphi'}$;

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] & X^{\varphi} \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "\pi'"'] & (X^{\varphi})^{\varphi'} \arrow[l, "p'"'] \arrow[d, "\pi''"'] \\ S & S' \arrow[l, "\varphi"] & S'' \arrow[l, "\varphi'"] \end{tikzcd}$$

D'où la proposition en raison de l'unicité de la solution d'un problème universel .

Ce résultat s'exprime encore en écrivant l'égalité (à un isomorphisme près) $(X^{S'})^{S''}=X^{S''}$, si aucune confusion n'est à craindre , ou aussi (à un isomorphisme près)

(1) $$(X\times_S S')\times_{S'} S''=X\times_S S'' .$$

<u>Corollaire 1.- Si</u> X <u>et</u> Y <u>sont deux préschémas , il existe un isomorphisme canonique fonctoriel du</u> S'-<u>préschéma</u> $X^{S'}\times_{S'} Y^{S'}$ <u>sur le</u> S'-<u>préschéma</u> $(X\times_S Y)^{S'}$.

En effet , on a (à des isomorphismes canoniques près)

$$(X\times_S S')\times_{S'}(Y\times_S S')=X\times_S(Y\times_S S')=(X\times_S Y)\times_S S'$$

en vertu de (1) et de l'associativité des produits de S-préschémas .

<u>6 . Morphismes surjectifs</u> .

<u>Définition 6 .- On dit qu'un morphisme</u> $(\psi,\theta) : (X,O_X)\to(Y,O_Y)$ <u>de préschémas est surjectif si l'application continue</u> ψ <u>est surjective</u> .

On notera que cela n'entraîne nullement que (ψ,θ) soit un épimorphisme d'espaces annelés (θ n'est pas nécessairement injectif) .

Il est clair que le composé de deux morphismes surjectifs est surjectif .

<u>Proposition 10 .- Soient</u> X,Y <u>deux</u> S-<u>préschémas</u> , x,y <u>des points appartenant respectivement aux espaces de base</u> X <u>et</u> Y . <u>Pour qu'il existe un point de l'espace de base du produit</u> $X\times_S Y$ <u>dont les projections soient égales à x et</u> y , <u>il faut et il suffit que x et</u> y <u>soient au-dessus d'un même point s de l'espace de base de</u> S .

La condition est évidemment nécessaire . Si on la suppose remplie , il existe des monomorphismes du corps k(s) dans chacun des deux corps k(x),k(y) . Il existe d'autre part des monomorphismes de k(x) et k(y) dans un même corps K tels que les monomorphismes composés $k(s)\to k(x)\to K$ et $k(s)\to k(y)\to K$ soient identiques (Bourbaki, loc. cit., chap. V, § 4, prop. 2). On en déduit que si $\{\xi\}=\mathrm{Spec}(K)$, les morphismes correspondants $\{\xi\}\to X$, $\{\xi\}\to Y$ (n° 2, cor. de la prop. 5) sont des S-morphismes, et par suite définissent un S-morphisme $f : \{\xi\}\to X\times_S Y$. Si on pose $z=f(\xi)$, il est clair par définition que $p_1(z)=x$ et $p_2(z)=y$.

Il y a donc une application surjective canonique de l'espace de base $X\times_S Y$ sur la partie de l'<u>ensemble produit</u> $X\times Y$ des espaces de base X, Y, formée des couples (x,y) qui sont au-dessus d'un même point de S. Mais il faut noter que cette application <u>n'est pas injective</u> en général (autrement dit, il peut exister plusieurs z distincts tels que $p_1(z)$ et $p_2(z)$ soient donnés).

<u>Corollaire. - Soient</u> $f : X\to Y$ <u>un</u> S-<u>morphisme</u>, $f^{S'} : X^{S'}\to Y^{S'}$ <u>le</u> S'-<u>morphisme déduit de</u> f <u>par une extension</u> $S'\to S$ <u>du préschéma de base. Soient</u> p (resp. q) <u>la projection</u> $X^{S'}\to X$ (resp. $Y^{S'}\to Y$) ; <u>pour toute partie</u> M <u>de l'espace de base</u> X, <u>on a</u> $q^{-1}(f(M))=f^{S'}(p^{-1}(M))$.

En effet (cor. 2 de la prop. 9), $X^{S'}$ s'identifie au produit $X\times_Y Y^{S'}$ par le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{\ p\ } & X^{S'} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{S'}} \\ Y & \xleftarrow[\ q\ ]{} & Y^{S'} \end{array}$$

En vertu de la prop. 10, la relation $q(y')=p(x)$ pour $x\in M$, $y'\in Y^{S'}$, équivaut donc à l'existence d'un $x'\in X^{S'}$ tel que $p(x')=x$ et $f^{S'}(x')=y'$, d'où le corollaire.

<u>Proposition 11. - a) Si un</u> S-<u>morphisme</u> $f : X\to Y$ <u>est surjectif, tout</u> S'-<u>morphisme</u> $f^{S'} : X^{S'}\to Y^{S'}$ <u>déduit de</u> f <u>par extension du préschéma de base est surjectif</u>.

b) <u>Si</u> $f : X'\to X$, $g : Y'\to Y$ <u>sont des</u> S-<u>morphismes surjectifs, le</u> S-<u>morphisme</u> $f\times_S g : X'\times_S Y'\to X\times_S Y$ <u>est surjectif</u>.

La première assertion est une conséquence immédiate du cor. de la prop. 10. La seconde s'en déduit en remarquant que $f \times_S g$ est le morphisme composé

$$X' \times_S Y' \xrightarrow{f\times 1} X \times_S Y' \xrightarrow{1\times g} X \times_S Y .$$

<u>Proposition 12 .- Pour qu'un morphisme</u> $f : X \to Y$ <u>soit surjectif, il faut et il suffit que pour tout corps</u> K <u>et tout morphisme</u> $\mathrm{Spec}(K) \to Y$, <u>il existe une extension</u> K' <u>de</u> K <u>et un morphisme</u> $\mathrm{Spec}(K') \to X$ <u>rendant commutatif le diagramme</u>

$$\begin{array}{ccc} X & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(K') \\ f\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longleftarrow & \mathrm{Spec}(K) \end{array}$$

La condition est suffisante, car pour tout $y \in Y$, il suffit de l'appliquer à un morphisme $\mathrm{Spec}(K) \to Y$ correspondant à un monomorphisme $k(y) \to K$, K étant une extension de $k(y)$ (n°2, cor. de la prop. 5). Inversement, supposons f surjectif, et soit $y \in Y$ l'image de l'unique élément de $\mathrm{Spec}(K)$; il existe $x \in X$ tel que $f(x)=y$, donc f définit un monomorphisme $k(y) \to k(x)$; il suffit alors de prendre K' tel qu'il existe des monomorphismes $k(x) \to K'$ et $K \to K'$ pour lesquelles $k(y) \to k(x) \to K'$ et $k(y) \to K \to K'$ coïncident ; le morphisme $\mathrm{Spec}(K') \to X$ correspondant à $k(x) \to K'$ répond à la question.

<u>7 . Morphismes géométriquement injectifs</u> .

<u>Définition 7 .- On dit qu'un morphisme (de préschémas)</u> $f : X \to Y$ <u>est géométriquement injectif si, pour tout corps</u> K , <u>l'application</u> $u \mapsto f\circ u$ <u>de</u> $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K), X)$ <u>dans</u> $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K), Y)$ <u>est injective</u> .

Pour que f soit géométriquement injectif, il suffit que la condition de la déf. 7 soit vérifiée pour tout corps <u>algébriquement clos</u>. En effet, si K est un corps quelconque, K' une extension algébriquement close de K , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K), X) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K), Y) \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\varphi' \\ \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K'), X) & \xrightarrow{\alpha'} & \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K'), Y) \end{array}$$

est commutatif, φ et φ' provenant du morphisme $\mathrm{Spec}(K') \to \mathrm{Spec}(K)$

et α, α' sont les homomorphismes $u \to f \circ u$. Or φ est injectif, et il en est de même de α' par hypothèse, donc α est nécessairement injectif.

Il est clair que le composé de deux morphismes géométriquement injectifs est géométriquement injectif.

Proposition 13 .- Pour qu'un morphisme $f=(\psi,\theta) : X \to Y$ soit géométriquement injectif, il faut et il suffit que ψ soit injectif et que, pour tout $x \in X$, le monomorphisme $\theta^x : k(\psi(x)) \to k(x)$ fasse de $k(x)$ une extension radicielle de $k(\psi(x))$.

Supposons f géométriquement injectif ; montrons d'abord que la relation $\psi(x_1)=\psi(x_2)=y$ entraîne nécessairement $x_1=x_2$. En effet, il existe un corps K et des monomorphismes $k(x_1) \to K$, $k(x_2) \to K$ tels que les monomorphismes $k(y) \to k(x_1) \to K$ et $k(y) \to k(x_2) \to K$ soient identiques ; les morphismes correspondants $u_1 : \mathrm{Spec}(K) \to X$, $u_2 : \mathrm{Spec}(K) \to X$ sont donc tels que $f \circ u_1 = f \circ u_2$, donc $u_1 = u_2$ par hypothèse, et cela entraîne $x_1=x_2$. Considérons maintenant $k(x)$ comme extension de $k(\psi(x))$ au moyen de θ^x ; si $k(x)$ n'est pas extension radicielle de $k(\psi(x))$, il existe deux $k(\psi(x))$-isomorphismes distincts de $k(x)$ dans une extension algébriquement close K de $k(\psi(x))$ et les deux morphismes correspondants de Spec(K) dans X violeraient l'hypothèse. Inversement, il est clair que les conditions de l'énoncé sont suffisantes pour que f soit géométriquement injectif.

Corollaire .- Si un morphisme $f=(\psi,\theta) : X \to Y$ est tel que ψ soit injectif et que, pour tout $x \in X$, l'homomorphisme $\theta^x : k(\psi(x)) \to k(x)$ soit bijectif, f est géométriquement injectif.

Proposition 14 .- Si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ sont deux morphismes tels que $g \circ f$ soit géométriquement injectif, alors f est géométriquement injectif.

En effet, l'application composée

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K),X) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K),Y) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K),Z)$$

étant injective, il en est de même de $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K),X)\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K),Y)$

<u>Proposition 15 .- Si les S-morphismes</u> $f : X\to X'$, $g : Y\to Y'$ <u>sont géométriquement injectifs, il en est de même de</u> $f\times_S g$.

En effet, $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K),X\times_S Y)$ s'identifie à l'ensemble des couples $(u,v)\in\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K),X)\times\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K),Y)$ tels que $\varphi\circ u=\psi\circ v$, en désignant par φ et ψ les morphismes structuraux de X et Y. On a une identification analogue pour $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K),X'\times_S Y')$, et l'application $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K),X\times_S Y)\to\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(K),X'\times_S Y')$ correspondant à $f\times_S g$ s'identifie alors à $(u,v)\to(f\circ u,g\circ v)$; la proposition résulte trivialement de là .

<u>Proposition 16 .- Soient</u> $f : X\to Y$, $j : Y'\to Y$ <u>deux morphismes, tels que j soit une injection géométrique. Alors la projection de</u> $X\times_Y Y'$ <u>dans</u> X <u>est une injection géométrique, et l'image par cette projectio de l'espace de base de</u> $X\times_S Y$ <u>est l'image réciproque</u> $f^{-1}(j(Y'))$.

En effet (cor. de la prop.8), si on identifie canoniquement X et $X\times_Y Y$, la projection $X\times_Y Y'\to X$ est identifiée à $1\times_Y j$, donc est une injection géométrique par la prop.15 . En outre, en vertu de la prop.10 du n°6 , les points $x\in X$ qui sont images de points de $X\times_Y Y'$ sont ceux pour lesquels il existe $y'\in Y'$ tels que $f(x)=j(y')$, d'où la proposition.

Considérons en particulier un point quelconque $y\in Y$, et prenons $Y'=\mathrm{Spec}(k(y))$; l'application identique $k(y)\to k(y)$ définit canoniquement un morphisme $Y'\to Y$, qui applique l'unique point de Y' sur y et est géométriquement injective (cor. de la prop.13) . La prop.16 montre que l'ensemble de base du préschéma $X\times_Y Y'$ s'identifie canoniquement avec $f^{-1}(y)$. La projection $X\times_Y Y'\to Y'$ définit d'ailleurs $X\times_Y Y'$ comme un <u>préschéma sur</u> $k(y)$; c'est toujours de ce préschéma qu'il sera question lorsque nous parlerons de $f^{-1}(y)$ comme d'un préschéma .

Archives
Grothendieck sept. 89

§ 3 . Sous-préschémas ; immersions . Morphismes et préschémas séparés .

1 . Sous-préschémas .

Comme la notion de faisceau quasi-cohérent (chap.0,§ 2,n°6) est locale , un faisceau quasi-cohérent F sur un préschéma ~~XXX~~ X peut être défini par la condition que , pour tout ouvert affine V de X , $F|V$ est isomorphe à un faisceau associé à un $\Gamma(V,O_X)$-module (§ 1,n°4,th.2) . Il est clair que le faisceau structural O_X est quasi-cohérent et que noyaux , conoyaux , images , limites inductives et sommes directes de faisceaux quasi-cohérents sur X sont quasi-cohérents (§ 1,n°3,cor. 4 du th.1) .

~~XXXX~~ *Proposition 1 .- Soit I un faisceau quasi-cohérent d'idéaux sur un préschéma X . Le support Y du faisceau O_X/I est alors fermé , et si on désigne par O_Y la restriction de O_X/I à Y , (Y,O_Y) est un préschéma .*

Il suffit évidemment (§ 2,n°1,lemme 1) de considérer le cas où (X,O_X) est un schéma affine , et de montrer que dans ce cas Y est fermé dans ~~XXX~~ X , et (Y,O_Y) un schéma affine . En effet , si $X=\mathrm{Spec}(A)$, on a $O_X=\tilde{A}$ et $I=\tilde{J}$, où J est un idéal de A , et Y est égal à la partie fermée $V(J)$ de X et s'identifie au spectre premier de l'anneau $B=A/J$ (§ 1,n°2,cor.2 de la prop.5). De plus , si φ est l'homomorphisme canonique $A \to B=A/J$, l'image directe ${}^a\varphi_*(\tilde{B})$ s'identifie canoniquement au faisceau $\tilde{A}/\tilde{J}=O_X/I$ (§ 1,n°6,prop.7 et n°3,cor.4 du th.1) .

Nous dirons que (Y,O_Y) est le *sous-préschéma* de (X,O_X) *défini par le faisceau d'idéaux* I ; c'est un cas particulier de la notion générale de *sous-préschéma* :

Définition 1 .- On dit qu'un espace annelé (Y,O_Y) est un sous-préschéma (resp. un sous-préschéma fermé) d'un préschéma (X,O_X) si Y est un sous-espace (resp. un sous-espace fermé) de X et si , pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage ouvert affine V de y dans X tel que $(V\cap Y,O_Y|(V\cap Y))$ soit un sous-préschéma-

ne du schéma affine $(V,O_X|V)$ défini par un faisceau quasi-cohérent d'idéaux.

Il est clair d'après la prop. 1 qu'un sous-préschéma (Y,O_Y) est un préschéma ; on notera en outre que $Y \cap V$ est fermé dans V, donc Y est nécessairement localement fermé dans X. Si V est ouvert dans X, le préschéma induit par (X,O_X) sur V est un sous-préschéma en vertu du lemme 1 du § 2, n°1.

Proposition 2.- Pour qu'un sous-préschéma (Y,O_Y) du préschéma (X,O_X) soit fermé, il faut et il suffit qu'il soit défini par un faisceau quasi-cohérent de O_X-idéaux ; il y a correspondance biunivoque entre ces faisceaux et les sous-préschémas fermés de (X,O_X).

Il suffit de prouver que tout sous-préschéma fermé (Y,O_Y) est défini par un faisceau quasi-cohérent d'idéaux unique. Or, par définition, pour tout $y \in Y$, on a $O_Y(y)=O_X(y)/I(y)$, où $I(y)$ est un idéal bien déterminé de $O_X(y)$; posons $I(x)=O_X(x)$ pour $x \notin Y$. Reste à voir que les $I(x)$ sont les fibres d'un faisceau quasi-cohérent d'idéaux I tel que $O_Y=(O_X/I)|Y$; comme la question est locale, cela résulte de la définition et de l'hypothèse que Y est fermé.

Proposition 3.- Un sous-préschéma (resp. un sous-préschéma fermé) d'un sous-préschéma (resp. sous-préschéma fermé) de X s'identifie canoniquement à un sous-préschéma (resp. sous-préschéma fermé) de X.

Une partie fermée d'un sous-espace fermé de l'espace de base X étant un sous-espace fermé de X, il est clair que la question est locale et qu'on peut donc supposer X affine ; la proposition résulte donc de l'identification canonique de A/J et de $(A/I)/(J/I)$ lorsque I,J sont deux idéaux d'un anneau A tels que $I \subset J$.

Nous ferons toujours dans la suite l'identification précédente. En particulier, si (Y,O_Y) est un sous-préschéma de (X,O_X), l'ensemble Y, étant localement fermé, est l'intersection d'un ensemble ouvert U et d'un ensemble fermé ; on en conclut que (Y,O_Y) est un sous-pré schéma *fermé* du préschéma $(Y, O_X|Y)$ induit par (X, O_X) sur Y.

Soit (Y, O_Y) un sous-préschéma d'un préschéma (X, O_X) ; désignons par j l'injection canonique $Y \to X$; on sait que l'image réciproque $j^*(O_X)$ est la restriction $O_X|Y$. Si, pour tout $y \in Y$, on désigne par h_y l'homomorphisme canonique de la fibre $O_X(y)$ sur la fibre $O_Y(y)$ ces homomorphismes définissent un homomorphisme h du faisceau $O_X|Y = j^*(O_X)$ *sur* O_Y : il suffit en effet de le vérifier localement, c'est-à-dire que l'on peut supposer (X, O_X) affine et le sous-préschéma (Y, O_Y) fermé ; et dans ce cas les h_y ne sont autres que les restrictions aux fibres $O_X(y)$ de l'homomorphisme de faisceaux $O_X|Y \to (O_X/I)|Y$ si I est le faisceau d'idéaux qui définit (Y, O_Y). Nous avons donc défini un *monomorphisme* (j, h^*) (chap. 0, § 2, n°4) du préschéma (Y, O_Y) dans le préschéma (X, O_X), qui sera appelé le *morphisme d'injection*.

Conformément aux définitions générales (T, 1, 1.1) nous dirons qu'un morphisme $f : Z \to X$ est *majoré* par le morphisme d'injection $j : Y \to X$ d'un sous-préschéma Y de X, si f se factorise en

$$Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{j} X$$

(nécessairement *unique* puisque j est un monomorphisme)
où g est un morphisme ; cela entraîne que $f(Z) \subset Y$ et que, pour tout $y = f(z) \in f(Z)$, l'homomorphisme $O_X(y) \to O_Z(z)$ correspondant à f se factorise en $O_X(y) \to O_Y(y) \to O_Z(z)$; le noyau de $O_X(y) \to O_Z(z)$ contient donc le noyau $I_Y(y)$ de $O_X(y) \to O_Y(y)$. En particulier, on dit qu'un sous-préschéma Z de X est *majoré* par Y si le morphisme d'injection $j' : Z \to X$ est majoré par j et on écrit alors $Z \leq Y$. Pour qu'il en soit ainsi, on peut se ramener au cas où X est affine et Z fermé (la question étant locale, en raison de l'unicité de la solution g de $j' = j \circ g$). On voit alors que la relation $Z \leq Y$ équivaut à dire que l'espace de base Z est un *sous-espace* de Y, et que pour tout $z \in Z$, si on pose $O_Y(z) = O_X(z)/I_Y(z)$, $O_Z(z) = O_X(z)/I_Z(z)$, on doit avoir $I_Z(z) \supset I_Y(z)$. La relation $Z \leq Y$ est évidemment une *relation d'ordre* dans l'ensemble des sous-préschémas de X.

2 . *Morphismes d'immersion* .

Définition 2 .- On dit qu'un morphisme $f : Y \to X$ *est une immersion* (resp. *une immersion fermée) s'il se factorise en un isomorphisme* $g : Y \to Z$ *sur un sous-préschéma* (resp. *un sous-préschéma fermé*) Z *de* X *et en le morphisme d'injection* $j : Z \to X$.

Le sous-préschéma Z et l'isomorphisme g sont alors déterminés de façon *unique* , car si Z' est un second sous-préschéma , j' l'injection $Z' \to X$ et g' un isomorphisme $Y \to Z'$ tel que $j \circ g = j' \circ g'$, on en déduit $j' = j \circ g \circ g'^{-1}$, d'où $Z' \leq Z$ et on montre de même que $Z \leq Z'$, donc $Z' = Z$, et comme j est un monomorphisme de préschémas , $g' = g$.

Il est clair qu'une immersion est un *monomorphisme* de préschémas et une *injection géométrique* , puisqu'il en est ainsi de j (cf. § 2, n°7, cor. de la prop. 13) .

Proposition 4 .- Pour qu'un morphisme $f = (\psi, \theta) : Y \to X$ *soit une immersion* (resp. *une immersion fermée) , il faut et il suffit que* ψ *soit un homéomorphisme de* Y *sur une partie localement fermée* (resp. *fermée*) *de* X, *et que pour tout* $y \in Y$, *l'homomorphisme* $\theta^\flat_y : \mathcal{O}_{\psi(y)} \to \mathcal{O}_y$ *soit surjectif* .

Les conditions étant évidemment nécessaires , montrons qu'elles sont suffisantes . Considérons d'abord le cas particulier où l'on suppose que $(X, \mathcal{O}_X)$ est un schéma affine , et que $\psi(Y)$ est *fermé* dans X . Posons $Z = \psi(Y)$; on sait (chap.0, § 2, n°1) que le faisceau $\psi_*(\mathcal{O}_Y)$ a alors pour support Z et que , si on désigne par $\mathcal{O}'_Z$ sa restriction à Z , l'espace annelé $(Z, \mathcal{O}'_Z)$ se déduit de $(Y, \mathcal{O}_Y)$ par transport de structure au moyen de l'homéomorphisme ψ (considéré comme application de Y sur Z) . Montrons que le faisceau $\psi_*(\mathcal{O}_Y)$ sur X est *quasi-cohérent* . En effet , pour tout $x \notin Z$, $\psi_*(\mathcal{O}_Y)$, restreint à un voisinage de x , est nul . Si au contraire $x \in Z$, on a $x = \psi(y)$ pour un $y \in Y$ bien déterminé; soit V un voisinage ouvert affine de y dans Y ; $\psi(V)$ est alors ouvert dans Z , donc trace sur Z d'un ouvert U de X , et la restriction à U de $\psi_*(O_Y)$ est identique à la restriction à U de l'image directe $(\psi_V)_*(O_Y|V)$, où ψ_V est la restriction à V de ψ . Or , la restriction à $(V,O_Y|V)$ du morphisme (ψ,θ) est un morphisme de ce préschéma dans (X,O_X) , et par suite est de la forme $({}^a\varphi,\tilde{\varphi})$, où φ est un homomorphisme de l'anneau $A=\Gamma(X,O_X)$ dans l'anneau $\Gamma(V,O_Y)$ (§ 1, n°7,th.4); on en conclut que ~~XXX~~ l'image directe $(\psi_V)_*(O_Y V)$ est un faisceau quasi-cohérent (§ 1,n°6,cor.2 de la prop.7) , ce qui prouve notre assertion en raison du caractère local des faisceaux quasi-cohérents . En outre , l'hypothèse que ψ est un homéomorphisme entraîne que pour tout $y\in Y$, ψ_y est un isomorphisme d'anneau de $\psi_*(O_Y)(\psi(y))$ sur $O_Y(y)$; comme le diagramme

$$\begin{tikzcd}
O_X(\psi(y)) \arrow[r, "\theta_{\psi(y)}"] \arrow[d, "\psi_y\circ\alpha_{\psi(y)}"'] & \psi_*(O_Y)(\psi(y)) \arrow[d, "\psi_y"] \\
\psi^*(O_X)(y) \arrow[r, "\theta^b_y"] & O_Y(y)
\end{tikzcd}$$

est commutatif et que les deux flèches verticales sont des isomorphismes , l'hypothèse que θ^b_y est surjectif entraîne qu'il en est de même de $\theta_{\psi(y)}$. Comme le support de $\psi_*(O_Y)$ est $Z=\psi(Y)$, θ est un homomorphisme <u>surjectif</u> de $O_X=\tilde{A}$ dans le faisceau quasi-cohérent $\psi_*(O_Y)$. Par suite , il existe un isomorphisme unique ω d'un faisceau quotient $\tilde{A}/\tilde{J}$ (J idéal de A) sur $\psi_*(O_Y)$ qui , composé avec l'homomorphisme canonique de $\tilde{A}$ sur $\tilde{A}/\tilde{J}$, donne θ (§ 1,n°3,cor.4 du th.1) ; si O_Z désigne la restriction de $\tilde{A}/\tilde{J}$ à $Z=\psi(Y)$, (Z,O_Z) est un sous-préschéma de (X,O_X) , et f se factorise en l'injection de ce sous-préschéma dans (X,O_X) , et l'isomorphisme (ψ_0,ω_0) , où ψ_0 est ψ considérer comme application de Y sur Z , et ω_0 la restriction de ω à O_Z .

Passons au cas général . Soit U un ensemble ouvert affine dans X tel que $U\cap\psi(Y)$ soit fermé dans U et non vide . En restreignant f au préschéma induit par (Y,O_Y) sur l'ouvert $\psi^{-1}(U)$, et en le considérant comme un morphisme de préschéma dans le préschéma induit par (X,O_X) sur V , on est ramené au premier cas ; la restriction de f à $\psi^{-1}(U)$ est donc une immersion fermée $\psi^{-1}(U)\to U$, se factorisant canoniquement en $j_U\circ g_U$, où g_U est un isomorphisme du préschéma $\psi^{-1}(U)$ sur un sous-préschéma Z_U de U , et j_U l'injection de Z_U dans U . Soit V un second ouvert affine de X tel que $V\subset U$; comme la restriction Z'_V de Z_U à V est un sous-préschéma du préschéma V , la restriction de f à $\psi^{-1}(V)$ se factorise en $j'_V\circ g'_V$, où j'_V est l'injection de Z'_V dans V et g'_V un isomorphisme de $\psi^{-1}(V)$ sur Z'_V . En raison de l'unicité de la factorisation canonique d'une immersion , on voit que l'on a nécessairement $Z'_V=Z_V$, $g'_V=g_V$. On en conclut (déf.1,n°1) qu'il y a un sous-préschéma Z de X, dont l'espace de base est $\psi(Y)$ et dont la restriction à chaque $U\cap\psi(Y)$ est Z_U ; les g_U sont alors les restrictions aux $\psi^{-1}(U)$ d'un isomorphisme g de Y sur Z , tel que $f=j\circ g$, où j est l'injection $Z\to X$. C.Q.F.D.

Corollaire 1 .- Soient (ψ,θ) un morphisme Y X , (V_λ) un recouvrement de $\psi(Y)$ par des ouverts de X (resp. un recouvrement ouvert de X) . Pour que (ψ,θ) soit une immersion (resp. une immersion fermée) il faut et il suffit que sa restriction à chacun des préschémas induits par Y sur les $\psi^{-1}(V_\lambda)$ soit une immersion (resp. une immersion fermée) .

Comme $\theta_y^\flat$ est alors surjectif pour tout $y\in Y$, tout revient à vérifier que ψ est un homéomorphisme de Y sur une partie localement fermée (resp. fermée) $\psi(Y)$ de X . Or ψ est évidemment injectif et transforme tout voisinage de y dans Y en un voisinage de $\psi(y)$ dans $\psi(Y)$ en vertu de l'hypothèse ; d'autre part , $\psi(Y)\cap V_\lambda$ est localement fermé (resp. fermé) dans V_λ , donc $\psi(Y)$ est localement fermé (resp. fermé) dans X .

Corollaire 2 .- Soit (X,O_X) un schéma affine . Pour que (ψ,θ) soit *une immersion fermée de* $(Y,\mathcal{O}_Y)$ *dans* $(X,\mathcal{O}_X)$, *il faut et il suffit que* $(Y,\mathcal{O}_Y)$ *soit un schéma affine, et que l'homomorphisme* $\Gamma(\psi) : \Gamma(\mathcal{O}_X)\to\Gamma(\mathcal{O}_Y)$ *soit surjectif*.

Corollaire 3. — Le composé de deux immersions (resp. *de deux immersions fermées*) *est une immersion* (resp. *une immersion fermée*).

Cela résulte aussitôt de la prop. 4, compte tenu du fait qu'une partie localement fermée d'une partie localement fermée est localement fermée.

Proposition 5. — Soient $\alpha : X'\to X$, $\beta : Y'\to Y$ *deux* S-*morphismes ; si* α *et* β *sont des immersions* (resp. *des immersions fermées*), $\alpha\times_S\beta$ *est une immersion* (resp. *une immersion fermée*). *En outre, si* α (resp. β) *identifie* X' (resp. Y') *à un sous-préschéma* X'' (resp. Y'') *de* X (resp. Y), $\alpha\times_S\beta$ *identifie* $X'\times_S Y'$ *au sous-préschéma* $p^{-1}(X'')\cap q^{-1}(Y'')$ *de* $X\times_S Y$, *en désignant par* p *et* q *les projections de* $X\times_S Y$ *dans* X *et* Y *respectivement*.

Compte tenu de la déf. 2, on peut se restreindre au cas où X' et Y' sont des sous-préschémas, α et β les morphismes d'injection. La proposition a déjà été établie pour les sous-préschémas induits sur les ouverts (§ 2, n° 4, cor. du th. 1) ; comme tout sous-préschéma est un sous-préschéma fermé d'un préschéma induit sur un ouvert, on est ramené au cas où X' et Y' sont des sous-préschémas *fermés*.

Montrons d'abord qu'on peut supposer que S est *affine*. En effet, soit (S_λ) un recouvrement de S formé d'ouverts affines ; si φ et ψ sont les morphismes structuraux de X et Y, soit $X_\lambda=\varphi^{-1}(S_\lambda)$, $Y_\lambda=\psi^{-1}(S_\lambda)$. La restriction X'_λ (resp. Y'_λ) de X' (resp. Y') à X_λ (resp. Y_λ) est un sous-préschéma fermé de X_λ (resp. Y_λ) ; les préschémas X_λ, Y_λ, X'_λ, Y'_λ peuvent être considérés comme des S_λ-préschémas, et les produits $X_\lambda\times_S Y_\lambda$ et $X_\lambda\times_{S_\lambda} Y_\lambda$ (resp. $X'_\lambda\times_S Y'_\lambda$ et $X'_\lambda\times_{S_\lambda} Y'_\lambda$) sont identiques (§ 2, n° 4, prop. 7). Si la proposition est vraie lorsque S est affine, la restriction de $\alpha\times_S\beta$ à chacun des $X'_\lambda\times_S Y'_\lambda$ sera donc une immersion (§ 2, n°4, cor. du th.1). Comme le produit $X'_\lambda\times_S Y'_\mu$ (resp. $X_\lambda\times_S Y_\mu$) s'identifie à $(X'_\lambda\cap X'_\mu)\times_S(Y'_\lambda\cap Y'_\mu)$ (resp. $(X_\lambda\cap X_\mu)\times_S(Y_\lambda\cap Y_\mu)$) (§ 2, n°4, partie b) du th.1), la restriction de $\alpha\times_S\beta$ à chacun des $X'_\lambda\times_S Y'_\mu$ est encore une immersion ; il en est par suite de même de $\alpha\times_S\beta$ en vertu du cor.1 de la prop.4 .

En second lieu, montrons qu'on peut aussi supposer que X et Y sont <u>affines</u> . En effet, soit (U_i) (resp. (V_j)) un recouvrement de X (resp Y) par des ouverts affines, et soit X'_i (resp. Y'_j) la restriction de X' (resp. Y') à U_i (resp. V_j), qui est un sous-préschéma fermé de U_i (resp. V_j) . En outre, $U_i\times_S V_j$ s'identifie à la restriction de $X\times_S Y$ à $p^{-1}(U_i)\cap q^{-1}(V_j)$ (§ 2, cor. du th.1) ; et de même, si p', q' sont les projections de $X'\times_S Y'$, $X'_i\times_S Y'_j$ s'identifie à la restriction de $X'\times_S Y'$ à $p'^{-1}(X'_i)\cap q'^{-1}(Y'_j)$. Posons $\gamma=\alpha\times_S\beta$; on a par définition $p\circ\gamma=\alpha\circ p'$, $q\circ\gamma=\beta\circ q'$; comme $X'_i=\alpha^{-1}(U_i)$, $Y'_j=\beta^{-1}(V_j)$, on a aussi $p'^{-1}(X'_i)=\gamma^{-1}(p^{-1}(U_i))$, $q'^{-1}(Y'_j)=\gamma^{-1}(q^{-1}(V_j))$, d'où $p'^{-1}(X'_i)\cap q'^{-1}(Y'_j) = {}^{-1}(p^{-1}(U_i)\cap q^{-1}(V_j))=\gamma^{-1}(U_i\times_S V_j)$; on conclut comme dans la première partie du raisonnement .

Supposons donc X, Y, S affines , et soient B, C, A leurs anneaux respectifs . Alors B et C sont des ~~XX~~ A-algèbres, X' et Y' des schémas affines dont les anneaux sont des algèbres quotients B', C' de B et C respectivement En outre, on a ~~XXX~~ $\alpha=({}^a\rho,\tilde\rho)$, $\beta=({}^a\sigma,\tilde\sigma)$, où ρ et σ sont respectivement les homomorphismes canoniques $B\to B'$, $C\to C'$ (§ 1, n°7, th.4). Cela étant, on sait que $X\times_S Y$ est un schéma affine, dont l'anneau est $B\otimes_A C$; de même, $X'\times_S Y'$ est un schéma affine dont l'anneau est $B'\otimes_A C'$, et $\alpha\times_S\beta=({}^a\tau,\tilde\tau)$, où τ est l'homomorphisme $\rho\otimes\sigma$ ~~XXXXXXXXXXXXX~~ de $B\otimes_A C$ dans $B'\otimes_A C'$; comme cet homomorphisme est surjectif, $\alpha\times_S\beta$ est bien une immersion . En outre, si I (resp. J) est le noyau de ρ (resp. σ), le noyau de τ est ~~XXXXX~~ $I\otimes C+B\otimes J$, et en remontant aux définitions (§ 1) , on voit aussitôt que dans le spectre premier de

$B\otimes_A C$, cet idéal correspond à l'ensemble fermé $\overset{-1}{p}(X')\cap\overset{-1}{q}(Y')$ (en se rappelant que $p=({}^a u,\tilde{u})$ et $q=({}^a v,\tilde{v})$, où u (resp. v) est l'homomorphisme $b\to b\otimes 1$ (resp. $c\to 1\otimes c$)).

Corollaire 1 .- Si $f : X\to Y$ *est une immersion* (resp. *une immersion fermée*) *et un* S*-morphisme* , $f^{S'}$ *est une immersion* (resp. *une immersion fermée*) *pour toute extension* $S'\to S$ *du préschéma de base* .

Corollaire 2 .- Deux sous-préschémas quelconques Y',Y'' *de* X *admettent une borne inférieure* $Y=\inf(Y',Y'')$ *pour la relation d'ordre entre préschémas ; Y est canoniquement isomorphe à* $Y'\times_X Y''$ *et est fermé si* Y' *et* Y'' *le sont* .

Soient $j' : Y'\to X$, $j'' : Y''\to X$ les morphismes d'injection , qui font de Y' et Y'' des X-préschémas ; en vertu de la prop.5 , $j'\times_X j''$ est une immersion (resp. une immersion fermée si Y' et Y'' sont fermés) dans $X\times_X X=X$. En outre , si Z est un sous-préschéma de X tel que $Z\leq Y'$ et $Z\leq Y''$, l'injection f : $Z\to X$ se factorise en $Z\xrightarrow{h'} Y'\xrightarrow{j'} X$ et en $Z\xrightarrow{h''} Y''\xrightarrow{j''} X$, donc h' et h'' sont des X-morphismes , et il y a par suite un X-morphisme $g : Z\to Y'\times_X Y''$ tel que $h'=p'\circ g$, $h''=p''\circ g$, en désignant par p' et p'' les projections . On en conclut que si Y est le sous-préschéma de X image canonique de $Y'\times_X Y''$, on a $Z\leq Y$, ce qui démontre le corollaire .

Corollaire 3 .- Soit $f : X\to Y$ *un morphisme* , Y' *un sous-préschéma* (resp. *un sous-préschéma fermé*) *de* Y . *Il existe alors un sous-préschéma* (resp. *un sous-préschéma fermé*) *de* X *dont l'espace de base est l'image réciproque* $\overset{-1}{f}(Y')$ *et qui est canoniquement isomorphe à* $X\times_Y Y'$.

En effet , si $j : Y'\to Y$ est le morphisme d'injection , $1_X\times_Y j$ est une immersion (resp. une immersion fermée) en vertu de la prop.5 ; et on a déjà vu (§ 2,n°7,prop.16) que l'image de $X\times_Y Y'$ par cette immersion a un espace de base qui s'identifie canoniquement à $\overset{-1}{f}(Y')$. Quand on parlera de $\overset{-1}{f}(Y')$ comme d'un sous-préschéma de X, il s'agira toujours de cette image .

3 . Préschémas réduits .

Proposition 6 .- Soit (X,O_X) un préschéma , et pour tout $x\in X$, soit $N(x)$ l'idéal de $O_X(x)$ formé des éléments nilpotents . Les $N(x)$ sont les fibres d'un faisceau quasi-cohérent d'idéaux N . Lorsque X est un schéma affine , on a $N=\tilde{N}$, où N est l'idéal des éléments nilpotents de l'anneau $A=A(X)$.

La question étant locale , on est ramené à démontrer la dernière assertion. On sait que $\tilde{N}$ est un faisceau quasi-cohérent , et que sa fibre au point x est l'idéal N_x de l'anneau de fractions A_x ; tout revient à prouver que $N(x)\subset N_x$, l'inclusion opposée étant évidente. Or , soit z/s un élément de $N(x)$, où $z\in A$, $s\notin j_x$; par hypothèse il existe k tel que $(z/s)^k=0$, ce qui signifie qu'il existe $t\notin j_x$ tel que $tz^k=0$. On en conclut $(tz)^k=0$, et par suite $z/s=(tz)/(ts)$ appartient à N_x .

Définition 3 .- On dit qu'un préschéma (X,O_X) est réduit si aucun des anneaux locaux O_x ne contient d'éléments nilpotents $\neq 0$. Le sous-préschéma fermé associé au faisceau quasi-cohérent d'idéaux N est appelé le préschéma réduit associé à X et noté aussi X_{red} .

Dire que X est réduit signifie donc que $X_{red}=X$.

Corollaire. - Les espaces de base de X et X_{red} sont identiques .

Cela résulte de ce que pour tout $x\in X$, l'élément unité de O_x est $\neq 0$ donc $N(x)\neq O_X(x)$.

Proposition 7 .- Pour tout sous-espace localement fermé Y de X , il existe un sous-préschéma réduit et un seul de X ayant Y pour espace de base ; c'est le plus petit des sous-préschémas de X ayant Y pour espace de base .

Si X est affine d'anneau A , et Y fermé dans X , la proposition est immédiate : $j(Y)$ est le plus grand idéal $a\subset A$ tel que $V(a)=Y$, et il est égal à sa racine (§ 1,n°1,prop.2) , donc $A/j(Y)$ n'a pas d'élément nilpotent $\neq 0$ et pour tout idéal $a \neq j(Y)$ et tel que $V(a)=Y$, $\sqrt{a}$ possède de tels éléments.

Dans le cas général, pour tout ouvert affine $U\subset X$ tel que $U\cap Y$ soit fermé dans U, considérons le sous-préschéma fermé Y_U de U défini par le faisceau d'idéaux associé à l'idéal $j(U\cap Y)$ de $A(U)$; c'est le plus petit sous-préschéma de U ayant $U\cap Y$ comme espace de base. En outre, si V est un ouvert affine de X contenu dans U, Y_V est <u>induit par</u> Y_U sur V, car il suffit de le vérifier pour $V=D(f)$, où $f\in A(U)$; posons $A=A(U)$, et soit l'homomorphisme canonique $A\to A/j(Y\cap U)=B$; il lui correspond un homomorphisme surjectif $\varphi_f : A_f\to B_{\varphi(f)}$, et tout revient à voir que le noyau de φ_f est l'idéal $j(Y\cap V)$. Or, si $\varphi_f(z/f^n)=0$, où $z\in A$, cela signifie que $\varphi(z)/(\varphi(f))^n=0$ dans $B_{\varphi(f)}$: et par suite que $\varphi(f^k z)=0$, ou encore $f^k z\in j(Y\cap U)$ pour un entier k ; mais cette relation signifie que $f\in j_y$ ou $z\in j_y$ pour tout $y\in U$, et comme les y tels que $f\notin j_y$ sont précisément les points $y\in V=D(f)$, $\varphi(f^k z)=0$ équivaut finalement à $z/1\in j(Y\cap V)$. Les Y_U sont donc les restrictions à $Y\cap U$ d'un préschéma (Y,O_Y) ayant Y pour espace de base, puisque les $Y\cap U$, où U parcourt les ouverts affines de X tels que $Y\cap U$ soit fermé dans U, forment une base de la topologie de Y. Si Z est un autre sous-préschéma ayant Y comme espace de base, on a nécessairement $Z_U > Y_U$ pour un U au moins, et par suite Z_U n'est pas réduit, donc il en est de même de Z.

Soit $f=(\psi,\theta) : X\to Y$ un morphisme de préschémas ; l'homomorphisme $\theta^\flat_x : O_{\psi(x)}\to O_x$ applique tout élément nilpotent de $O_{\psi(x)}$ sur un élément nilpotent de O_x ; par passage aux quotients, on déduit donc de $\theta^\flat$ un homomorphisme $\omega : \psi^*(O_Y/N_Y)\to O_X/N_X$, et par suite $(\psi,\omega^\#)$ est un morphisme $X_{red}\to Y_{red}$ que nous noterons f_{red} et appellerons le morphisme <u>réduit</u> de f. Il est immédiat que pour deux morphismes f, g, on a $(f\circ g)_{red}=f_{red}\circ g_{red}$; on voit ainsi que $X\to X_{red}$ est un <u>foncteur covariant</u>.

rifiant . En outre , le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_{red} \arrow[r, "f_{red}"] \arrow[d] & Y_{red} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

est commutatif , les flèches verticales étant les injections . On notera en particulier que si X est *réduit* , tout morphisme $f : X \to Y$ se factorise en $X \xrightarrow{f_{red}} Y_{red} \to Y$; en d'autres termes , ce morphisme est *majoré* par le morphisme d'injection $Y_{red} \to Y$.

Proposition 8 .– Soit f un morphisme de préschémas ; si f est surjectif (resp. géométriquement injectif , une immersion , une immersion fermée) , il en est de même de f_{red} .

La proposition est triviale si f est surjectif ; si f est géométriquement injectif, la proposition résulte de ce que pour tout $x \in X$, le corps $k(x)$ est le même pour le préschéma X et le préschéma X_{red} (cf. § 2, n°7, prop. 13) ; enfin , si $f=(\psi,\theta)$ est une immersion (resp. une immersion fermée) , la proposition résulte de ce que si $\theta^{\flat}_x$ est surjectif , il en est de même de l'homomorphisme obtenu en passant aux quotients par les racines de 0 dans $O_{\psi(x)}$ et O_x (cf. n°2, prop. 4).

Proposition 9 .– Si X *et* Y *sont deux S-préschémas , les préschémas* $X_{red} \times_{S_{red}} Y_{red}$ *et* $X_{red} \times_S Y_{red}$ *sont identiques , et s'identifient canoniquement à un sous-préschéma de* ~~XXXX~~ $X \times_S Y$ *ayant même espace de base que ce produit* .

L'identification canonique de $X_{red} \times_S Y_{red}$ à un sous-préschéma de $X \times_S Y$ ayant même espace de base résulte de la prop. 5 du n°2 , compte tenu du cor. de la prop. 6 . D'autre part , si φ et ψ sont les morphismes structuraux $X_{red} \to S$, $Y_{red} \to S$, ils se factorisent par S_{red}, et si $f : T \to X_{red}$, $g : T \to Y_{red}$ sont des S-morphismes , on a $\varphi \circ f = \psi \circ g$ donc (puisque $S_{red} \to S$ est un monomorphisme) $\varphi_{red} \circ f = \psi_{red} \circ g$; T peut donc être considéré comme un S_{red}-préschéma et f et g des S_{red}-morphismes . La réciproque étant évidente , on en déduit l'identité des produits $X_{red}\times_{S_{red}}Y_{red}$ et $X_{red}\times_{S}Y_{red}$ en vertu de la définition de ces derniers.

On notera que si X et Y sont réduits, il n'en est pas nécessairement de même de $X\times_S Y$, car le produit tensoriel de deux algèbres sans élément nilpotent peut avoir de tels éléments.

4. Diagonale et graphe d'un morphisme.

Soit X un S-préschéma ; on appelle morphisme diagonal de X dans $X\times_S X$ et on note Δ_X ou Δ le S-morphisme $(1_X,1_X)_S$, autrement dit l'unique S-morphisme tel que

$$(1) \qquad p_1\circ\Delta_X=p_2\circ\Delta_X=1_X$$

en désignant par p_1,p_2 les projections de $X\times_S X$.

Proposition 10.- Le morphisme diagonal Δ_X est une immersion de X dans $X\times_S X$.

En effet, les applications continues p_1 et Δ_X des espaces de base étant telles que $p_1\circ\Delta_X$ soit l'identité, Δ_X est un homéomorphisme de X sur $\Delta_X(X)$. De même, l'homomorphisme composé $O_X\to O_{\Delta_X(X)}\to O_X$ des homomorphismes correspondant à p_1 et à Δ_X respectivement étant l'identité, l'homomorphisme correspondant à Δ_X est surjectif ; la proposition résulte donc de la prop. 4 du n°2.

Le sous-préschéma de $X\times_S X$ associé à l'immersion Δ_X est encore appelé la diagonale de $X\times_S X$.

Proposition 11.- Soient X,Y deux S-préschémas ; si on identifie canoniquement les produits $(X\times Y)\times(X\times Y)$ à $(X\times X)\times(Y\times Y)$, le morphisme $\Delta_{X\times Y}$ s'identifie à $\Delta_X\times\Delta_Y$.

En effet, si p_1,q_1 sont les premières projections $X\times X\to X$, $Y\times Y\to Y$ la première projection $(X\times Y)\times(X\times Y)\to X\times Y$ s'identifie à $p_1\times q_1$, et on a $(p_1\times q_1)\circ(\Delta_X\times\Delta_Y)=(p_1\circ\Delta_X)\times(q_1\circ\Delta_Y)=1_{X\times Y}$

Corollaire.- Pour toute extension $S'\to S$ du préschéma de base, $\Delta_{X_{S'}}$ s'identifie canoniquement à $(\Delta_X)^{S'}$.

Il suffit de remarquer que $(X\times_S X)^{S'}$ s'identifie canoniquement à

$X^{S'} \times_{S'} X^{S'}$ (§ 2, n°5, cor. 1 de la prop. 9).

Proposition 12. – *Si $f : X \to Y$ est un S-morphisme, le diagramme*

$$(2)\qquad \begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "(1_X, f)_S"] \arrow[dr, "\Delta_X"] & \\ Y \arrow[dr, "\Delta_Y"'] & X \times_S Y \arrow[d, "f \times_S 1_Y"] & X \times_S X \arrow[l, "1_X \times_S f"'] \arrow[dl, "f \times_S f"] \\ & Y \times_S Y & \end{tikzcd}$$

est commutatif. En outre X *s'identifie au produit des* $(Y \times_S Y)$*-préschémas* Y *et* $X \times_S Y$, *les projections s'identifiant à* f *et* $(1_X, f)_S$.

La vérification de la commutativité du diagramme est triviale, compte tenu de la définition du produit et de (1) ; nous la laissons au lecteur. Désignons par p_1, p_2 les projections de $Y \times_S Y$, par p, q celles de $X \times_S Y$. Soient T un S-préschéma, $g : T \to Y$, $h : T \to X \times_S Y$ deux S-morphismes tels que $\Delta_Y \circ g = (f \times_S 1_Y) \circ h$. On déduit de là $g = p_1 \circ \Delta_Y \circ g = p_1 \circ (f \times_S 1_Y) \circ h = f \circ p \circ h$, et $g = p_2 \circ \Delta_Y \circ g = p_2 \circ (f \times_S 1_Y) \circ h = q \circ h$; en outre $p \circ (1_X, f)_S \circ p \circ h = p \circ h$, $q \circ (1_X, f)_S \circ p \circ h = f \circ p \circ h = g = q \circ h$, donc $h = (1_X, f)_S \circ (p \circ h)$. En outre, si u_1, u_2 sont deux S-morphismes de T dans X tels que $(1_X, f)_S \circ u_1 = (1_X, f)_S \circ u_2$, on déduit de $p \circ (1_X, f)_S = 1_X$ que $u_1 = u_2$, ce qui achève de prouver la proposition.

Corollaire. – *Si* X *est un sous-préschéma de* Y, *la diagonale* $\Delta_X(X)$ *s'identifie à un sous-préschéma de* $\Delta_Y(Y)$, *dont l'espace de base s'identifie à* $\Delta_Y(Y) \cap p_1^{-1}(X) = \Delta_Y(Y) \cap p_2^{-1}(X)$.

Il suffit d'appliquer la prop. 12 au cas où f est l'injection $X \to Y$; on sait alors que $f \times_S f$ est une immersion, identifiant l'espace de base de $X \times_S X$ à $p_1^{-1}(X) \cap p_2^{-1}(X)$ ~~XX~~ (n°2, prop. 5) ; en outre, si $z \in \Delta_Y(Y) \cap p_1^{-1}(X)$, on a $z = \Delta_Y(y)$ et $y = p(z) \in X$, donc $y = f(y)$, et $z = \Delta_Y(f(y))$ appartient à $\Delta_X(X)$ en vertu de la commutativité du diagramme (2).

Soient X, Y deux S-préschémas, $\psi : S \to T$ un morphisme, qui fait de tout S-préschéma un T-préschéma. Soient $f : X \to S$, $g : Y \to S$ les morphismes structuraux, p, q les projections de $X\times_S Y$, $\pi = f\circ p = g\circ q$ le morphisme structural $X\times_S Y\to S$.

<u>Proposition 13. - Le diagramme</u>

$$
(3)\qquad
\begin{array}{ccc}
X\times_S Y & \xrightarrow{(p,q)_T} & X\times_T Y \\
{\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f\times_T g} \\
S & \xrightarrow[\Delta_S]{} & S\times_T S
\end{array}
$$

<u>est commutatif. En outre</u>, $X\times_S Y$ <u>s'identifie au produit des T-préschémas S et</u> $X\times_T Y$, <u>les projections s'identifiant à</u>   <u>et</u> $(p,q)_T$.

Nous laissons de nouveau au lecteur la vérification de la commutativité de (3). Soient Z un préschéma, $u : Z\to S$ et $v : Z\to X\times_T Y$ deux morphismes tels que $\Delta_S\circ u = (f\times_T g)\circ v$. Soient p_1, p_2 les projections de $S\times_T S$, p', q' celles de $X\times_T Y$. On a

$$u = p_1\circ\Delta_S\circ u = p_1\circ(f\times_T g)\circ v = f\circ p'\circ v$$
$$u = p_2\circ\Delta_S\circ u = p_2\circ(f\times_T g)\circ v = g\circ q'\circ v .$$

Vu la définition du produit $X\times_S Y$, ces deux inégalités entraînent qu'il existe un morphisme $w : Z\to X\times_S Y$ tel que $p'\circ v = p\circ w$ et $q'\circ v = q\circ w$, d'où $u = (f\circ p)\circ w = \pi\circ w$. D'autre part, on a $p = p'\circ(p,q)_T$ et $q = q'\circ(p,q)_T$, donc $p'\circ v = p'\circ((p,q)_T\circ w)$ et $q'\circ v = q'\circ((p,q)_T\circ w)$, donc $v = (p,q)_T\circ w$. Enfin, si w_1, w_2 sont deux morphismes de Z dans $X\times_S Y$ tels que $(p,q)_T\circ w_1 = (p,q)_T\circ w_2$, les relations $p'\circ(p,q)_T = p$, $q'\circ(p,q)_T = q$ entraînent que $p\circ w_1 = p\circ w_2$ et $q\circ w_1 = q\circ w_2$, donc $w_1 = w_2$, ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire 1. - Le morphisme</u> $(p,q)_T$ <u>est une immersion, s'identifiant à</u> $1_{X\times_S Y}\times_P \Delta_S$ <u>(où on pose</u> $P = S\times_T S$).

Cela résulte de la prop. 13 (de la prop 5 du n°2 et du § 2, n°5, cor. de la prop. 8.

<u>Corollaire 2. - Si</u> X, Y <u>sont deux</u> S-<u>préschémas</u>, $f : X\to Y$ <u>un</u> S-<u>morphisme ; alors</u> $(1_X, f)_S$ <u>est une immersion</u> Γ_f <u>de</u> X <u>dans</u> $X\times_S Y$, <u>appelée le morphisme graphe de f, tel que, si</u> p', q' <u>sont les projections de</u> $X\times_S Y$, <u>on ait</u> $f = q'\circ\Gamma_f$ <u>et</u> $1_X = p'\circ\Gamma_f$.

En effet, si on considère X comme un Y-préschéma au moyen de f, on sait que $(1_X,f)_Y$ est un isomorphisme de X sur $X\times_Y Y$; d'autre part, il est immédiat que, si p,q désignent les projections de $X\times_Y Y$, $(1_X,f)_S$ se factorise en

$$X \xrightarrow{(1_X,f)_Y} X\times_Y Y \xrightarrow{(p,q)_S} X\times_S Y \quad ;$$

c'est donc une immersion en vertu du cor. 1 . La vérification de la seconde assertion est immédiate .

Le sous-préschéma de $X\times_S Y$ associé à l'immersion Γ_f est aussi appelé le <u>graphe</u> du morphisme f .

<u>5 . Morphismes et préschémas séparés</u> .

<u>Définition 4 .- On dit qu'un morphisme de préschémas</u> $f : X\to Y$ <u>est séparé si le morphisme diagonal</u> $X\to X\times_Y X$ <u>est une immersion fermée</u> ; <u>on dit aussi alors que</u> X <u>est un préschéma séparé au-dessus de</u> Y . <u>On dit qu'un préschéma</u> X <u>est séparé s'il est séparé au-dessus de</u> Z ; <u>on dit aussi alors que</u> X <u>est un schéma</u> .

<u>Proposition 14 .- Tout monomorphisme de préschémas</u> $f : X\to Y$ <u>(et en particulier toute immersion) est un morphisme séparé</u> .

En effet (n° 4, Remarque) , le préschéma $X\times_Y X$ s'identifie alors à X et à $\Delta_X(X)$.

<u>Proposition 15 .- Si</u> $f : X\to Y$ <u>et</u> $g : Y\to Z$ <u>sont séparés</u>, $g\circ f$ <u>est séparé</u> .

Désignons en effet par $\Delta_{X|Y}$ et $\Delta_{X|Z}$ les applications diagonales de X dans $X\times_Y X$ et $X\times_Z X$ respectivement (X étant considéré comme Y-préschéma par f et comme Z-préschéma par $g\circ f$) . On vérifie immédiatement que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\Delta_{X|Z}"] \arrow[dr, "\Delta_{X|Y}"'] & & X\times_Z X \\ & X\times_Y X \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif , j désignant l'immersion canonique (n° 4) . Comme le composé de deux immersions fermées est une immersion fermée , la proposition résulte donc du lemme suivant :

<u>Lemme 1 .- Soit</u> $S \to T$ <u>un morphisme séparé . Si</u> X <u>et</u> Y <u>sont deux</u> S-<u>préschémas . l'immersion canonique</u> $X \times_S Y \to X \times_T Y$ <u>est fermée</u> .

En effet , il résulte du n°4, cor. 1 de la prop. 13 que cette immersion s'identifie à un produit de deux immersions fermées , et le lemme est donc conséquence de la prop. 5 du n°2 .

<u>Corollaire .- Si</u> $f : X \to Y$ <u>est séparé , la restriction de</u> f <u>à tout sous-préschéma de</u> X <u>est séparée</u> .

C'est une conséquence immédiate des prop. 14 et 15 .

<u>Proposition 16 .- Si</u> $f : X \to Y$ <u>est un</u> S-<u>morphisme séparé , le</u> S'-<u>morphisme</u> $f^{S'} : X^{S'} \to Y^{S'}$ <u>est séparé pour toute extension</u> $S' \to S$ <u>du préschéma de base</u> .

En effet (§ 2, n°5, cor. 2 de la prop. 9) , $X^{S'} \times_{Y^{S'}} X^{S'}$ s'identifie canoniquement à $(X \times_Y Y^{S'}) \times_{Y^{S'}} (X \times_Y Y^{S'}) = (X \times_Y X) \times_Y Y^{S'}$, et on vérifie immédiatement que le morphisme diagonal $\Delta_{X^{S'}}$ s'identifie alors à $\Delta_X \times_Y 1_{Y^{S'}}$; la proposition résulte donc de la prop. 5 du n°2 .

<u>Corollaire .- Si</u> $f : X \to X'$ <u>et</u> $g : Y \to Y'$ <u>sont deux</u> S-<u>morphismes séparés</u> , $f \times_S g$ <u>est séparé</u> .

En effet , $f \times_S g$ se factorise en

$$X \times_S Y \xrightarrow{f \times_S 1_Y} X' \times_S Y \xrightarrow{1_{X'} \times_S g} X' \times_S Y'$$

et chacun des deux facteurs est séparé par la prop. 16 ; on conclut à l'aide de la prop. 15 .

<u>Proposition 17 .- Soit</u> (Y_λ) <u>un recouvrement ouvert d'un préschéma</u> Y ; <u>pour qu'un morphisme</u> $f : X \to Y$ <u>soit séparé , il faut et il suffit que chacune de ses restrictions</u> $f^{-1}(Y_\lambda) \to Y_\lambda$ <u>soit séparée</u> .

Si on pose $X_\lambda = f^{-1}(Y_\lambda)$, la nécessité de la condition résulte du cor. de la prop. 15 et du fait que les produits $X_\lambda \times_Y X_\lambda$ et $X_\lambda \times_{Y_\lambda} X_\lambda$ sont identiques (§ 2, n°4, prop. 7) . Inversement , supposons que chaque X_λ soit séparé au-dessus de Y_λ ; comme les $X_\lambda \times_Y X_\mu$ forment un recouvrement ouvert de $X \times_Y X$, il s'agit de montrer que l'intersection de la diagonale $\Delta_X(X)$ et de $X_\lambda \times_Y X_\mu$ est fermée dans ce dernier espace .

Or, si on pose $Y_{\lambda\mu}=Y_\lambda\cap Y_\mu$ et $X_{\lambda\mu}=X_\lambda\cap X_\mu=f^{-1}(Y_{\lambda\mu})$, ~~XXXXX~~ $X_\lambda\times_Y X_\mu$ s'identifie au produit $X_{\lambda\mu}\times_{Y_{\lambda\mu}}X_{\lambda\mu}$ (§ 2, n°4, partie b) de la démonstration du th.1), donc aussi à $X_{\lambda\mu}\times_Y X_{\lambda\mu}$ (§ 2, n°5, prop.7). L'hypothèse et la première partie de la démonstration montrent que ~~XXXXXXXXXX~~ $X_{\lambda\mu}$ est séparé au-dessus de Y, donc la proposition résulte du cor. de la prop.12 du n°4.

La prop.17 permet, en prenant un recouvrement de Y par des ouverts affines, de ramener l'étude des morphismes séparés à celle des morphismes séparés ~~dans~~ à valeurs des schémas affines.

<u>Proposition 18 .- Soient</u> Y <u>un schéma affine</u>, X <u>un préschéma</u>, (U_α) <u>un recouvrement de</u> X <u>par des ouverts affines. Pour qu'un morphisme</u> $f : X\to Y$ <u>soit séparé, il faut et il suffit que, pour tout couple d'indices</u> (α,β), $U_\alpha\cap U_\beta$ <u>soit un ouvert affine, et que l'anneau</u> $\Gamma(U_\alpha\cap U_\beta,\mathcal{O}_X)$ <u>soit engendré par les images canoniques des anneaux</u> $\Gamma(U_\alpha,\mathcal{O}_X)$ <u>et</u> $\Gamma(U_\beta,\mathcal{O}_X)$.

Les $U_\alpha\times_Y U_\beta$ forment un recouvrement ouvert de $X\times_Y X$, et en désignant par p et q les projections de $X\times_Y X$, on a $\Delta_X^{-1}(U_\alpha\times_Y U_\beta)=$ $=\Delta_X^{-1}(p^{-1}(U_\alpha)\cap q^{-1}(U_\beta))=\Delta_X^{-1}(p^{-1}(U_\alpha))\cap\Delta_X^{-1}(q^{-1}(U_\beta))=U_\alpha\cap U_\beta$; tout revient donc à voir que la restriction de Δ_X à $U_\alpha\cap U_\beta$ est une immersion fermée dans $U_\alpha\times_Y U_\beta$. Or, cette restriction n'est autre que $(j_\alpha,j_\beta)_Y$, en désignant par j_α (resp. j_β) l'injection canonique de $U_\alpha\cap U_\beta$ dans U_α (resp. U_β), ainsi qu'il résulte des définitions. Comme $U_\alpha\times_Y U_\beta$ est un schéma affine dont l'anneau est canoniquement isomorphe à $\Gamma(U_\alpha,\mathcal{O}_X)\otimes_{\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y)}\Gamma(U_\beta,\mathcal{O}_X)$, on voit que $U_\alpha\cap U_\beta$ doit être un schéma affine, et que l'application $h_\alpha\otimes h_\beta\to h_\alpha h_\beta$ de l'anneau $A(U_\alpha\times_Y U_\beta)$ dans $\Gamma(U_\alpha\cap U_\beta,\mathcal{O}_X)$ doit être surjective (n°2, cor.2 de la prop.4), ce qui achève la démonstration.

<u>Corollaire 1 .- Un schéma affine est séparé</u> (et est donc un schéma, ce qui justifie la terminologie).

<u>Corollaire 2 .- Soit</u> Y <u>un schéma affine ; pour que</u> $f : X\to Y$ <u>soit</u>

séparé, il faut et il suffit que X soit séparé (autrement dit, que X soit un schéma).

On observera en effet que le critère de la prop.18 ne dépend pas du schéma affine Y considéré.

Corollaire 3.- Pour qu'un morphisme $f : X \to Y$ soit séparé, il faut que pour tout ensemble ouvert séparé $U \subset Y$ (i.e. tel que le préschéma induit soit séparé), $f^{-1}(U)$ soit séparé, et il suffit qu'il en soit ainsi pour tout ouvert affine $U \subset Y$.

La nécessité de la condition résulte des prop. 17 et 15 ; la suffisance résulte de la prop 17 ~~18~~ et du cor.2 de la prop.18, compte tenu de l'existence de recouvrements ouverts affines de Y.

Corollaire 4.- Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux morphismes. Si $g \circ f$ est séparé, f est séparé.

Soient (Z_λ) un recouvrement de Z par des ouverts affines, $Y_\lambda = g^{-1}(Z_\lambda)$ $X_\lambda = f^{-1}(Y_\lambda)$; en vertu de la prop.17, X_λ est séparé au-dessus de Z_λ, et il suffit de prouver que X_λ est séparé au-dessus de Y_λ. On peut donc supposer Z affine. Soit alors (U_α) un recouvrement de Y par des ouverts affines, et soit $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$; en vertu de la prop.17, il suffit de montrer que V_α est séparé au-dessus de U_α ; mais V_α étant séparé au-dessus de X (prop.14), l'est aussi au-dessus de Z (prop. 15), donc est un schéma (cor.2), et par suite est séparé au-dessus de U_α (cor.2).

Proposition 19.- Pour qu'un morphisme $f : X \to Y$ soit séparé, il faut et il suffit que $f_{red} : X_{red} \to Y_{red}$ le soit.

En effet (n°3, prop.9), les préschémas $X_{red} \times_{Y_{red}} X_{red}$ et $X_{red} \times_Y X_{red}$ s'identifient canoniquement, et si on désigne par j l'injection $X_{red} \to X$, on vérifie aussitôt que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_{red} & \xrightarrow{\Delta_{X_{red}}} & X_{red} \times_Y X_{red} \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j \times j} \\ X & \xrightarrow{\Delta_X} & X \times_Y X \end{array}$$

et la proposition résulte de ce que les flèches verticales sont des homéomorphismes des espaces de base.

Corollaire. – Soit X un préschéma, et supposons que l'espace de base X soit réunion d'une famille finie de parties fermées X_i ($1\leq i\leq n$). On considère pour chaque i le sous-préschéma réduit ayant X_i pour espace de base (prop. 7). Pour qu'un morphisme $f : X\to Y$ soit séparé, il faut et il suffit que ses restrictions $X_i\to Y$ le soient.

La nécessité résulte des prop. 14 et 15. Inversement, si la condition est satisfaite, et si p_1, p_2 sont les projections de $X\times_Y X$, le sous-espace $\Delta_{X_i}(X_i)$ s'identifie au sous-espace $\Delta_X(X)\cap p_1^{-1}(X_i)$ (n°4, cor. de la prop. 12) de l'espace de base de $X\times_Y X$; ces sous-espaces étant fermés, il en est de même de leur réunion $\Delta_X(X)$.

Si en particulier l'espace de base de X est réunion finie de ses composantes irréductibles, le corollaire précédent ramène la notion de séparation au cas des schémas irréductibles.

6. Premières conséquences de la séparation.

Proposition 20. – Soient Y un S-préschéma séparé au-dessus de S, $f : X \to Y$ un S-morphisme. Alors le morphisme graphe $\Gamma_f : X\to X\times_S Y$ est une immersion fermée.

La démonstration est la même que celle du cor. 2 de la prop. 13 du n°4, compte tenu de ce que l'immersion canonique $X\times_Y Y\to X\times_S Y$ est fermée (n°6, lemme 1).

Corollaire 1. – Soient $f : X\to Y$, $g : Y\to Z$ deux morphismes, g étant séparé. Si $g\circ f$ est une immersion (resp. une immersion fermée), il en est de même de f.

En effet, f se factorise en : $X \xrightarrow{\Gamma_f} X\times_Z Y \xrightarrow{p_2} Y$, p_2 étant la seconde projection. D'autre part, p_2 s'identifie à $(g\circ f)\times_Z 1_Y$ (§ 2, n°5, cor. de la prop. 8) ; si $g\circ f$ est une immersion (resp. une immersion fermée) il en est de même de p_2 (n°2, prop. 5) ; d'autre part

Γ_f est une immersion fermée puisque g est séparé (prop.20) , donc $p_2\circ\Gamma_f$ est une immersion (resp. une immersion fermée) .

Remarque .- Si on ne suppose pas g séparé , le même raisonnement montre encore que f est une immersion , compte tenu du cor.2 de la prop. 13 du n°4 .

Corollaire 2 .- Soit $f : X\rightarrow Y$ un morphisme séparé . Tout morphisme $s : Y\rightarrow X$, section de f (i.e. tel que $f\circ s=1_Y$) est une immersion fermée .

C'est un cas particulier du cor.1 .

Corollaire 3 .- Soient Y un schéma , $f : X\rightarrow Y$ un morphisme . Pour tout ouvert affine U de X et tout ouvert affine V de Y , $U\cap f^{-1}(V)$ est affine .

Soient p_1,p_2 les projections de $X\times_{Z} Y$; le sous-espace $U\cap f^{-1}(V)$ est l'image par p_1 de $\Gamma_f(X)\cap p_1^{-1}(U)\cap p_2^{-1}(V)$. Or , $p_1^{-1}(U)\cap p_2^{-1}(V)$ s'identifie (en tant que préschéma) à $U\times_{Z} V$ (§ 2,n°4,cor. du th.1) , et est par suite un schéma affine (§ 2,n°4,prop.6) ; comme $\Gamma_f(X)$ est fermé dans $X\times_{Z} Y$ (prop.20), $\Gamma_f(X)\cap p_1^{-1}(U)\cap p_2^{-1}(V)$ est fermé dans $U\times_{Z} V$, et par suite le préschéma induit par le sous-préschéma de $X\times_{Z} Y$ associé à Γ_f , sur la partie ouverte $\Gamma_f(X)\cap p_1^{-1}(U)\cap p_2^{-1}(V)$ de son espace de base $\Gamma_f(X)$, est un sous-préschéma fermé d'un schéma affine , et par suite un schéma affine (n°2,cor.2 de la prop.4) . Le corollaire résulte alors du fait que Γ_f est une immersion .

Remarque .- Si on suppose réciproquement que la conclusion de la prop.20 est vérifiée lorsque f est l'identité 1_Y , on en conclut que Y est séparé au-dessus de S ; de même si on suppose la conclusion du cor.1 valide pour les morphismes $Y \xrightarrow{\Delta_Y} Y\times_Z Y \xrightarrow{p_1} Y$, on en conclut que Δ_Y est une immersion fermée , donc que Y est séparé au-dessus de Z ; enfin , la validité de la conclusion du cor.2 pour le morphisme Δ_Y , qui est une section de la projection $Y\times_S Y\rightarrow Y$, implique que Y est fermé au-dessus de S .

7. Exemples .-

Soit (X, O_X) un préschéma , et soit (U_α) un recouvrement de X par des ouverts affines . Désignons par X_α le schéma affine $(U_\alpha, O_X|U_\alpha)$, par $X_{\alpha\beta}$ l'espace annelé induit par X_α sur $U_\alpha \cap U_\beta$; soit $j_{\beta\alpha} : X_{\alpha\beta} \to X_{\beta\alpha}$ le morphisme identique ; les restrictions $j'_{\beta\alpha}, j'_{\gamma\beta}, j'_{\alpha\gamma}$ de $j_{\beta\alpha}, j_{\gamma\beta}, j_{\alpha\gamma}$ respectivement à l'espace annelé induit sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ par X_α , X_β, X_γ respectivement sont telles que $j'_{\alpha\gamma} \circ j'_{\gamma\beta} \circ j'_{\beta\alpha} = 1$.

Inversement , donnons-nous une famille (X_α) de schémas affines , et pour chaque couple d'indices , soit $U_{\alpha\beta}$ une partie ouverte de l'espace de base de X_α , et soit $u_{\beta\alpha}$ un isomorphisme d'espaces annelés de $U_{\alpha\beta}$ sur $U_{\beta\alpha}$; supposons en outre que $u_{\alpha\gamma} \circ u_{\gamma\beta} \circ u_{\beta\alpha} = 1$ dans l'espace annelé induit sur $U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha\gamma}$, quels que soient les indices α, β, γ . Alors , il existe un espace annelé X , une famille (U_α) d'ouverts affines de X formant un recouvrement de X , et pour chaque α un isomorphisme v_α de X_α sur l'espace annelé induit sur U_α , de sorte que v_α applique $U_{\alpha\beta}$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$ et que l'on ait $u_{\beta\alpha} = v_\beta^{-1} \circ v_\alpha$ pour tout couple d'indices (FAC ,I,1,4). Il est clair par définition que X est un préschéma , et on a ainsi un procédé général de définition des préschémas . Lorsque les $U_{\alpha\beta}$ sont des ouverts affines , les $u_{\beta\alpha}$ sont des isomorphismes de schémas affines , et sont donc définis par les isomorphismes correspondants des anneaux $A(U_{\beta\alpha})$ (§ 1,n°7,th.4) ; comme les $U_{\alpha\beta} \cap U_{\alpha\gamma}$ sont aussi des ouverts affines (prop. 18) la vérification des conditions de compatibilité se ramènera aussi à une vérification analogue pour les isomorphismes d'anneaux correspondants .

Par exemple , prenons deux schémas affines isomorphes X_1, X_2, spectres premiers des anneaux de polynômes $B = K[s]$, $C = K[t]$, où K est un corps , s, t deux indéterminées ; prenons $U_{12} = D(s)$, $U_{21} = D(t)$, et pour unique
u_{12} l'isomorphisme correspondant à l'isomorphisme d'anneaux
isomorphisme : $f(s)/s^n \quad f(1/t)/(1/t^n)$. Il n'y a pas de condition de compatibilité , et le préschéma X ainsi défini est séparé ,

les critères de la prop. 18 du n°5 étant trivialement vérifiés. Toutefois, le schéma ainsi obtenu n'est pas affine, car on constate aisément que les seules sections de O_X au-dessus de X_1 qui se prolongent en des sections au-dessus de X tout entier sont les constantes, et le spectre de $\Gamma(X, O_X)$ est donc réduit à un seul point.

Avec le même choix de X_1, X_2, U_1, U_2 mais en prenant pour u_{12} l'isomorphisme qui correspond à l'isomorphisme d'anneaux $f(s) \to f(t)$, on obtient cette fois un préschéma <u>non séparé</u> X, car la première condition de la prop. 18 est satisfaite, mais non la seconde.

On peut aussi donner des exemples où aucune des deux conditions de la prop. 18 n'est vérifiée. Remarquons d'abord que dans le spectre premier Y de l'anneau de polynômes $A = K[s, t]$ (s, t indéterminées, K corps), l'ouvert U réunion de $D(s)$ et de $D(t)$ n'est pas un ouvert affine : en effet, on constate aussitôt que les seules sections de O_Y au-dessus de U sont celles qui se prolongent en sections au-dessus de Y tout entier ; si U était un ouvert affine, le morphisme d'injection $j : U \to Y$ serait donc un isomorphisme (§ 1, n°7, th. 4), ce qui est absurde puisque $U \neq Y$.

Cela étant, prenons deux schémas affines Y_1, Y_2, spectres premiers des anneaux $A_1 = K[s_1, t_1]$, $A_2 = K[s_2, t_2]$; prenons $U_{12} = D(s_1) \cup D(t_1)$, $U_{21} = D(s_2) \cup D(t_2)$, et pour u_{12} la restriction à U_{21} de l'isomorphisme $Y_2 \to Y_1$ correspondant à l'isomorphisme d'anneaux $f(s_1, t_1) \to f(s_2, t_2)$; on a ainsi un exemple où aucune des conditions de la prop. 18 n'est satisfaite.

Enfin, pour avoir un exemple de spectre premier X dans lequel il y a des ouverts non quasi-compacts, il suffit de prendre l'anneau $C(K)$ des fonctions continues numériques sur un espace compact K dans lequel il y a un point a n'ayant pas de système fondamental dénombrable de voisinages ; si m est l'idéal premier maximal de $C(K)$ correspondant à $\underline{a}$, $\{m\}$ n'est pas intersection finie de $V(f)$ dans X.

Archives Grothendieck - Sept 59

§ 4 . Conditions de finitude .

1 . Préschémas noethériens , localement noethériens , artiniens .

Définition 1 .- On dit qu'un préschéma X est noethérien (resp. localement noethérien) s'il est réunion finie (resp. réunion) d'ouverts affines V_α tels que l'anneau de chacun des schémas induits sur les V_α soit noethérien .

Si un préschéma X est réunion finie (resp. réunion) d'ouverts W_λ tels que les préschémas induits sur les W_λ soient noethériens (resp. localement noethériens) , il est clair que X est noethérien (resp. localement noethérien) .

Proposition 1 .- Pour qu'un préschéma X soit noethérien , il faut et suffit qu'il soit localement noethérien et que son espace de base soit quasi-compact . L'espace de base de X est alors noethérien .

La première assertion est immédiate . La seconde résulte de ce que tout espace réunion finie de sous-espaces noethériens est noethérien (cf. § 1,n°1,cor.2 de la prop.2) .

Rappelons que tout espace noethérien est quasi-compact et que tout sous-espace d'un espace noethérien est noethérien . Un espace noethérien n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles . En outre :

Lemme 1 .- Dans un espace noethérien X vérifiant l'axiome (T_0) , toute partie fermée contient une partie fermée réduite à un point . Toute partie ouverte U de X contenant tous les points fermés est identique à X .

La première assertion résulte de ce que toute partie fermée contient un ensemble fermé minimal , et en vertu de (T_0) , un tel ensemble est réduit à un point . L'hypothèse sur U entraîne alors que son complémentaire U , qui est fermé , est nécessairement vide .

Proposition 2 .- Soit X un schéma affine d'anneau A . Les conditions suivantes sont équivalentes : a) X est noethérien ; b) X est localement noethérien ; c) A est noethérien .

L'équivalence de a) et b) résulte de (la prop.1 et de) ce que tout schéma affine a un espace de base quasi-compact (§ 1,n°1,prop.3) ; il est clair en outre que c) entraîne a) . Pour voir que a) entraîne c) , remarquons qu'il y a un recouvrement fini (V_i) de X par des ouverts affines tels que l'anneau A_i du préschéma induit sur V_i soit noethérien . Soit alors (a_n) une suite croissante d'idéaux de A ; il lui correspond canoniquement (§ 1,n°3,th.1) une suite croissante $(\tilde{a}_n)$ de faisceaux d'idéaux dans $\tilde{A}=O_X$; pour voir que la suite (a_n) est stationnaire , il suffit de montrer que la suite $(\tilde{a}_n)$ l'est . Or , la restriction $\tilde{a}_n|V_i$ est un faisceau quasi cohérent d'idéaux sur V_i , étant l'image réciproque de $\tilde{a}_n$ par l'injection canonique $V_i \to X$ (§ 1,n°6,cor.2 de la prop.8) ; $\tilde{a}_n|V_i$ est donc de la forme $\tilde{a}_{ni}$, où a_{ni} est un idéal de A_i (§ 1,n°3,th.1) . Comme A_i est noethérien , il existe un indice n_o tel que $\tilde{a}_{n+1,i}=\tilde{a}_{ni}$ pour $n \geqslant n_o$ et pour tout i ; on en conclut que $\tilde{a}_{n+1}=\tilde{a}_n$ pour $n \geqslant n_o$, ce qui achève la démonstration .

<u>Proposition 3 .- Tout sous-préschéma d'un préschéma noethérien</u> (resp. <u>localement noethérien) est noethérien</u> (resp. <u>localement noethérien</u>).

Il suffit de faire la démonstration pour un préschéma noethérien X ; en outre , on est aussitôt ramené au cas où X est un schéma affine . Comme tout sous-préschéma de X est un sous-préschéma fermé d'un préschéma induit sur un ouvert , on peut se borner à considérer le cas d'un sous-préschéma Y fermé ou induit sur un ouvert de X . Le cas où Y est fermé est immédiat , car si A est l'anneau de X , on sait que Y est un schéma affine d'anneau A/I , où I est un idéal de A (§ 3,n°2,cor.2 de la prop.4) ; comme A est noethérien (prop.2) ,il en est de même de A/I .

Supposons maintenant Y ouvert dans X ; l'espace de base Y est noethérien , donc quasi-compact , et par suite réunion finie d'ouvert $D(f_i)$ $(f_i \in A)$; tout revient à démontrer la proposition lorsque Y=D(f avec $f \in A$. Mais alors Y est un schéma affine dont l'anneau est isophe à A_f (§ 1,n°3,prop.6) ; comme A est noethérien (prop.2) , il en est de même de A_f .

On notera que le produit de deux préschémas noethériens n'est pas nécessairement noethérien , même si ces préschémas sont affines ,car le produit tensoriel de deux algèbres noethériennes n'est pas nécessairement un anneau noethérien .

Définition 2 .- On dit qu'un schéma affine est artinien si son anneau est artinien .

Proposition 4 .- Etant donné un préschéma X , les conditions suivantes sont équivalentes :

a) X est un schéma artinien ;

b) X est noethérien et son espace de base est discret ;

c) X est noethérien et les points de son espace de base sont fermés (condition T_1) .

Lorsqu'il en est ainsi , l'espace de base de X est fini , et l'anneau A de X est composé direct des anneaux locaux (artiniens) des points de X .

On sait que a) entraîne la dernière assertion (Bourbaki, Alg.comm., chap. ,§ ,) ; tout idéal premier de A est alors maximal et est l'image réciproque de l'idéal maximal de l'un des composants locaux de A , donc l'espace X est fini et discret ; a) entraîne donc b) et b) entraîne évidemment c) . Pour voir que c) entraîne a) , montrons d'abord que X est alors fini : on peut en effet se ramener alors au cas où X est affine , et on sait qu'un anneau noethérien dont tous les idéaux premiers sont maximaux est artinien (Bourbaki, loc. cit.) ,d'où notre assertion . L'espace de base X est alors discret , comme topologique d'un nombre fini de poin x_i , et les anneaux locaux $O_{x_i} = A_i$ sont artiniens ; il est clair alors que X est isomorphe au schéma affine spectre premier de l'anneau A composé direct des A_i.

2 . Morphismes de type fini .

Définition 2 .- On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ *est de type fini si* Y *est réunion d'une famille* (V_α) *d'ouverts affines ayant les propriétés suivantes :* $f^{-1}(V_\alpha)$ *est réunion finie d'ouverts affines* $U_{\alpha i}$ *tels que chacun des anneaux* $A(U_{\alpha i})$ *soit une algèbre de type fini sur* $A(V_\alpha)$ *On dit alors aussi que* X *est un préschéma de type fini sur* Y , *ou un* Y*-préschéma de type fini* .

Proposition 5 .- Si $f : X \to Y$ *est de type fini , alors , pour tout ouvert affine* W *de* Y , $f^{-1}(W)$ *est réunion finie d'ouverts affines dont les anneaux sont des algèbres de type fini sur* $A(W)$.

Démontrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 2 .- Soit $T \subset Y$ *un ouvert affine tel que* $f^{-1}(T)$ *soit réunion finie d'ouverts affines* Z_j *tels que* $A(Z_j)$ *soit une algèbre de type fini sur* $A(T)$, *alors la même propriété est valable pour tout ouvert affine de la forme* $D(g) \subset T$ $(g \in A(T))$.

En effet , si u_j est l'homomorphisme $A(T) \to A(Z_j)$ correspondant à la restriction de f à Z_j , et si on pose $g_j = u_j(g)$, on a $f^{-1}(D(g)) \cap Z_j = D(g_j)$ (§ 1, n° 2, formule (5)) ; or $A(D(g_j)) = (A(Z_j))_{g_j} = A(Z_j)[1/g_j]$ est de type fini sur $A(Z_j)$, et a fortiori sur $A(T)$ et aussi sur $A(D(g)) = A(T)[1/g]$, d'où le lemme .

Cela étant , comme W est quasi-compact , il existe un recouvrement ouvert fini de W par des ensembles de la forme $D(g_i)$ $(g_i \in A(W))$ dont chacun est contenu dans un des V_α ; le lemme 2 montre que chacun des $f^{-1}(D(g_i))$ admet un recouvrement fini par des ouverts affines U_{ij} tels que $A(U_{ij})$ soit une algèbre de type fini sur $A(D(g_i))$; comme $A(D(g_i)) = A(W)[1/g_i]$ est de type fini sur $A(W)$, la proposition est démontrée .

On voit donc que la notion de préschéma de type fini sur Y est *locale* sur Y .

Proposition 6 .- Soient X, Y *deux schémas affines ; pour que* X *soit* de type fini sur Y , il faut et il suffit que $A(X)$ soit une algèbre de type fini sur $A(Y)$.

La condition étant évidemment suffisante , prouvons qu'elle est nécessaire . Posons $A=A(Y)$, $B=A(X)$; en vertu de la prop.5 , il existe un recouvrement ouvert affine fini (V_i) de X tel que chacun des anneaux $A(V_i)$ soit de type fini sur A. En outre , les V_i étant quasi-compacts , on peut recouvrir chacun d'eux par un nombre fini d'ouverts de la forme $D(g_{ij})\subset V_i$ où $g_{ij}\in B$; si φ_i est l'homomorphisme canonique $B\to A(V_i)$, on a $B_{g_{ij}}=(A(V_i))_{\varphi_i(g_{ij})}$, donc $B_{g_{ij}}$ est de type fini sur A . On peut donc désormais supposer que $V_i=D(g_i)$, où $g_i\in B$; par hypothèse , il existe une partie finie T_i de B et un entier n_i tels que B_{g_i} soit l'algèbre engendrée sur A par les éléments $b_i/g_i^{n_i}$, où b_i parcourt T_i . Comme les g_i sont en nombre fini , on peut d'ailleurs supposer tous les n_i égaux à un même entier n . En outre , les $D(g_i)$ forment un recouvrement de X , l'idéal engendré dans B par les g_i est par suite égal à B , autrement dit il y a des $h_i\in B$ tels que $\sum_i h_i g_i=1$. Soit alors T la partie finie de B réunion des T_i , de l'ensemble des g_i et de l'ensemble des h_i ; montrons que le sous-anneau $B'=A[T]$ de B est égal à B . Par hypothèse , pour tout $b\in B$ et tout i , l'image canonique de b dans B_{g_i} est de la forme $b_i/g_i^{n_i}$, où $b_i\in B'$; en multipliant les b_i par des puissances convenables de g_i , on peut supposer tous les n_i égaux à un même entier n , Cela signifie encore que , dans B , il existe un entier $N\geqslant n$ (dépendant de b) tel que $g_i^N b\in B'$ pour tout i : or , dans l'anneau B', les g_i^N engendrent l'idéal B' , puisqu'il en est ainsi des g_i ; il y a donc des $c_i\in B'$ tels que $\sum_i c_i g_i^N=1$, d'où $b\in B'$, c.q.f.d.

Proposition 7 .- Une immersion $f : X\to Y$ est de type fini dans les cas suivants :

a) f est une immersion fermée .

b) *f est une immersion ouverte* , Y *est un schéma et l'espace de base de* X *est quasi-compact* ;

c) *l'espace de base de* Y *est localement noethérien* ;

d) *l'espace de base de* X *est noethérien* .

On peut toujours supposer que X est un sous-préschéma de Y .
Dans le cas a) , on peut supposer Y affine ; X étant un sous-préschéma fermé de Y , est un schéma affine (§ 3,n°2,cor.2 de la prop.4) , dont l'anneau est isomorphe à un anneau quotient $A(Y)/I$, qui est de type fini sur $A(Y)$. Dans le cas b) , il y a un recouvrement fini (V_i) de X par des ouverts affines ; pour tout ouvert affine W de Y , $W\cap V_i$ est par hypothèse un ouvert affine (§ 3,n°6,prop.20) , donc réunion d'un nombre fini d'ouverts de la forme $D(g_{ij})$ où $g_{ij}\in A(Y)$, et $A(D(g_{ij}))=A(Y)[1/g_{ij}]$ est une algèbre de type fini sur $A(Y)$. Dans le cas c) ,on peut supposer Y affine , et alors l'espace de base de X est noethérien ; on est donc ramené au cas d) . Dans ce dernier cas , on peut aussi supposer Y affine ; il existe encore un recouvrement de X par un nombre fini d'ouverts affines $D(g_i)\subset Y$ $(g_i\in A(Y))$ tels que $X\cap D(g_i)$ soit fermé dans $D(g_i)$; alors $A(X\cap D(g_i))$ est de type fini sur $A(D(g_i))$, d'après le cas a) , et $A(D(g_i))=A(Y)_{g_i}$ est de type fini sur $A(Y)$.

Proposition 8 .- Le composé de deux morphismes de type fini est de type fini .

Soient $f : X\to Y$, $g : Y\to Z$ deux morphismes de type fini . Soit U un ouvert affine dans Z tel que $g^{-1}(U)$ admette un recouvrement fini par des ouverts affines V_i tels que $A(V_i)$ soit une algèbre de type fini sur $A(U)$; d'après la prop.5 , chacun des $f^{-1}(V_i)$ admet un recouvrement fini par des ouverts affines W_{ij} tels que $A(W_{ij})$ soit de type fini sur $A(V_i)$ et par suite de type fini sur $A(U)$, d'où la proposition .

Corollaire .- Soit $f : X\to Y$ *un morphisme de type fini* ; *si* T *est un sous-préschéma de* X *qui est fermé , ou dont l'espace de base est noethérien , ou si* X *est localement noethérien , la restric* tion de f à T est de type fini .

Cela résulte des prop.7 et 8 .

Proposition 9 .- Soit X un préschéma de type fini au-dessus de Y ; pour tout morphisme $g : Y'\rightarrow Y$, $X^{Y'}$ est de type fini au-dessus de Y' .

Soit f le morphisme $X\rightarrow Y$, et soient p,q les projections $X^{Y'}\rightarrow X$ et $X^{Y'}\rightarrow Y'$. Soit V un ouvert affine dans Y tel que $f^{-1}(V)$ soit réunion finie d'ouverts affines $W_i\subset X$ dont chacun est tel que $A(W_i)$ soit de type fini sur $A(V)$. Soit V' un ouvert affine de Y' contenu dans $g^{-1}(V)$; comme $f\circ p=g\circ q$, $q^{-1}(V')$ est contenu dans la réunion des $p^{-1}(W_i)$; d'autre part , l'intersection $p^{-1}(W_i)\cap q^{-1}(V')$ s'identifie au produit $W_i\times_Y V'$, qui est un schéma affine d'anneau $A(W_i)\otimes_{A(Y)}A(Y')$; ce dernier étant par hypothèse une algèbre de type fini sur $A(V')$, la proposition est démontrée .

Corollaire 1 .- Si $f : X\rightarrow X'$, $g : Y\rightarrow Y'$ sont deux S-morphismes de type fini , il en est de même de $f\times_S g$.

Tout d'abord si $g=1_Y$, on déduit le résultat de la prop.9 , en remarquant que $X\times_S Y$ s'identifie à $X\times_{X'}(X'\times_S Y)$ et $X'\times_S Y$ à $X'\times_{X'}(X'\times_S Y)$; on passe de là au cas général en écrivant $f\times_S g=(f\times_S 1_Y)\circ(1_{X'}\times_S g)$ et appliquant la prop.8 .

Corollaire 2 .- Soient $f : X\rightarrow Y$, $g : Y\rightarrow Z$ deux morphismes . Si $g\circ f$ est de type fini , et si en outre g est séparé , ou X noethérien , ou $X\times_Z Y$ localement noethérien , f est de type fini .

On factorise $f : X\xrightarrow{\Gamma_f} X\times_Z Y\xrightarrow{p_2} Y$, p_2 s'identifiant à $(g\circ f)\times_Z 1_Y$. En vertu du cor.1 , p_2 est de type fini , et il suffit en vertu de la prop.8 de montrer que Γ_f est de type fini ; comme c'est une immersion (§ 3,n°5,cor.2 de la prop. 15) (resp. une immersion fermée si g est séparé (§ 3,n°7,prop.22) il suffit d'appliquer la prop.7 .

Proposition 10 .- Soit $f : X\rightarrow Y$ un morphisme de type fini ; si Y est noethérien (resp. localement noethérien) , X est noethérien (resp. localement noethérien).

On peut se borner à faire la démonstration lorsque Y est noethérien. Alors Y est réunion finie d'ouverts affines V_i tels que les $A(V_i)$ soient noethériens. D'après la prop. 5, chacun des $f^{-1}(V_i)$ est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines W_{ij} tels que $A(W_{ij})$ soit une algèbre de type fini sur $A(V_i)$, donc un anneau noethérien ; X est par suite noethérien.

Corollaire 1. - *Soit* X *un préschéma de type fini sur* S. *Pour toute extension* $S' \to S$ *telle que* S' *soit noethérien* (resp. *localement noethérien*), $X^{S'}$ *est noethérien* (resp. *localement noethérien*).

En effet, $X^{S'}$ est de type fini sur S' (prop. 9), et le corollaire résulte de la prop. 10.

Corollaire 2. - *Soit* X *un préschéma de type fini sur un préschéma noethérien* S. *Alors tout* S-*morphisme* $f : X \to Y$ *est de type fini*.

En effet, si $\varphi : X \to S$, $\psi : Y \to S$ sont les morphismes structuraux, on a $\varphi = \psi \circ f$, et X est noethérien d'après la prop. 10 ; donc f est de type fini en vertu du cor. 2 de la prop. 9.

Proposition 11. - *Pour qu'un morphisme de type fini* $f : X \to Y$ *soit surjectif, il faut et il suffit que pour tout corps algébriquement clos* Ω, *l'application* $X(\Omega) \to Y(\Omega)$ *correspondant à* f (§ 2, n°6) *soit surjective*.

La condition est suffisante en vertu de la prop. 12 du § 2, n°7. Inversement, supposons f surjective et soit $g : \{\xi\} = \mathrm{Spec}(\Omega) \to Y$ un morphisme, Ω étant un corps algébriquement clos. Posons $y = g(\xi)$; par hypothèse $f^{-1}(y)$ n'est pas vide, et le morphisme $f^{\xi} : f^{-1}(y) = X \times_Y \{\xi\} \to \{\xi\}$ est de type fini (prop. 9) ; donc $f^{-1}(y)$ est réunion finie d'ouverts affines Z_i tels que $A(Z_i)$ soit une algèbre de type fini sur Ω. Considérons un de ces schémas Z_i ; en vertu du th. des zéros de Hilbert il existe un homomorphisme $A(Z_i) \to \Omega$, et le morphisme correspondant $h : \{\xi\} \to Z_i$ est tel que $f^{\xi} \circ h$ soit l'identité. La commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} X & Z \arrow[l] \\ Y \arrow[u, leftarrow, "f"'] & \{\xi\} \arrow[l, "g"] \arrow[u, "f^{\xi}"'] \end{tikzcd}$$

achève alors de prouver la proposition .

Corollaire .- Soient K un corps , X et Y deux préschémas de type fini sur K , $f : X \to Y$ un K-morphisme . Pour que f soit surjectif , il faut et il suffit que pour toute extension algébriquement close Ω de K , l'application $X(\Omega)_K \to Y(\Omega)_K$ correspondant à f (§ 2, n°6) soit surjective .

Pour voir que la condition est suffisante , on peut encore appliquer la prop.12 du § 2,n°7 , en remarquant que pour tout $y \in Y$, $\kappa(y)$ est une extension de K ; la nécessité résulte de la prop.11 , appliquée à un K-morphisme $\mathrm{Spec}(\Omega) \to Y$, en remarquant que f est nécessairement de type fini (cor.2 de la prop.10) .

Etant donné un corps K , on appelle K-préschéma algébrique un préschéma X de type fini sur K ; K est appelé le corps de définition de X ; si X est un schéma , on dit aussi que c'est un K-schéma algébrique .

Proposition 12 .- Soit X un préschéma algébrique sur un corps K . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) X est artinien ;

b) l'espace de base X est discret ;

c) l'espace de base X est fini ;

d) les points de l'espace de base X sont fermés ;

e) on a $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est une K-algèbre de rang fini .

Il résulte de l'hypothèse que X est noethérien (prop.10) ; l'équivalence de a),b),d) et e) (et ces conditions entraînent c) ~~résulte alors de la prop.4 du n°1~~). Reste à voir que c) entraîne b) ; on peut se borner au cas où X est affine. Alors A(X) est une K-algèbre de type fini dans laquelle il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers ; on sait (Bourbaki, Alg. comm., chap., ,§) qu'une telle algèbre est de rang fini sur K, donc un anneau artinien, et par suite X est un espace discret.

Lorsque les conditions de la prop. 12 sont satisfaites, on dit que X est un schéma *fini sur* K, de *rang* $[A:K]$.

Corollaire 1.- Soit X *un schéma fini sur un corps* K. *Pour toute extension* K' *de* K, $X\otimes_K K'$ *est un schéma fini sur* K', *et son rang sur* K' *est égal au rang de* X *sur* K.

En effet, $[A\otimes_K K':K']=[A:K]$.

Corollaire 2.- Soit X *un schéma fini sur un corps* K ; *on pose* $n=\sum_{x\in X}[\kappa(x):K]_s$; *alors, pour toute extension algébriquement close* Ω *de* K, *l'espace de base de* $X\otimes_K\Omega$ *a exactement* n *points*.

On peut évidemment se borner au cas où l'anneau $A=A(X)$ est local ; soient m son idéal maximal, $L=A/m$ son corps résiduel, L_0 la plus grande extension séparable de K contenue dans L. Le radical de $A\otimes_K$ est l'image réciproque du radical de $L\otimes_K\Omega=L\otimes_{L_0}(L_0\otimes_K\Omega)$; comme $L_0\otimes_K\Omega$ est composé direct de $n=[L_0:K]$ corps isomorphes à Ω, et que $\Omega\otimes_{L_0}L$ est un anneau local de corps résiduel Ω, on voit que $A\otimes_K\Omega$ est composé direct de n anneaux locaux.

Le nombre n est appelé le *rang séparable* de A sur K, ou le *nombre géométrique de points* de X. Il résulte aussitôt de cette définition que pour toute extension K' de k, $X\otimes_K K'$ a même nombre géométrique de points que X. Si on désigne ce nombre par $n(X)$, il est clair que si X est somme de deux schémas finis Y,Z sur K, on a $n(X)=n(Y)+n(Z)$. En outre, si X,Y sont deux schémas finis sur K, on a $n(X\times_K Y)=n(X)n(Y)$: en effet, on peut encore se ramener au cas où X et Y sont des spectres premiers d'anneaux locaux A,B ; si E,F sont les corps résiduels de A et B, le nombre de composants locaux de $A\otimes_K B$ est égal au nombre des composants locaux de $E\otimes_K F$, et on conclut comme dans le cor. 2 ci-dessus.

tout $y\in Y$, *la fibre* $f^{-1}(y)$ *est un préschéma algébrique sur le corps résiduel* $\kappa(y)$.

Comme $f^{-1}(y)=X\times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))$, la proposition résulte de la prop.9 .

Proposition 14 .- Soient $f : X\to Y$, $g : Y'\to Y$ *deux morphismes ; posons* $X'=X\times_Y Y'$ *et* $f'=f^{Y'} : X'\to Y'$. *Si* $y'\in Y'$ *est tel que la fibre* $f^{-1}(y)$, *où* $y=g(y')$, *est un schéma algébrique fini sur* $\kappa(y)$, *alors* $f'^{-1}(y')$ *est un schéma algébrique fini sur* $\kappa(y')$, *ayant même rang et même nombre géométrique de points que* $f^{-1}(y)$.

Cela résulte aussitôt des cor.1 et 2 de la prop.12 ci-dessus et du § 2,n°7,prop.18 .

3 . Détermination locale d'un morphisme .

Proposition 15 .- Soient X *et* Y *deux* S-*préschémas* , Y *étant de type fini sur* S ; *soient* $x\in X$, $y\in Y$ *au-dessus d'un même point* $s\in S$.

(i) *Si deux* S-*morphismes* $f=(\psi,\theta)$, $f'=(\psi',\theta')$ *de* X *dans* Y *sont tels que* $\psi(x)=\psi'(x)=y$ *et que les* O_S-*homomorphismes* θ_x^b *et* θ'^b_x *de* O_y *dans* O_x *soient identiques , f et f' coïncident dans un voisinage de x* .

(ii) *Supposons en outre* S *localement noethérien . Pour tout* O_S-*homomorphisme* $\varphi : O_y\to O_x$, *il existe un* S-*morphisme* $f=(\psi,\theta)$ *d'un voisinage ouvert* U *de* X *dans* Y , *tel que* $\psi(x)=y$ *et* $\theta_x^b=\varphi$.

(i) On se ramène aussitôt au cas où S,X,Y sont affines d'anneaux respectifs A,B,C , f et f' étant de la forme $({}^a\varphi,\tilde{\varphi})$ et $({}^a\varphi',\tilde{\varphi}')$, où φ et φ' sont deux A-homomorphismes de C dans B tels que $\varphi^{-1}(j_x)=\varphi'^{-1}(j_x)=j_y$, et les homomorphismes φ_x et φ'_x de C_y dans B_x , déduits de φ et φ' , sont identiques ; on peut en outre supposer que C est une A-algèbre *de type fini* . Soient c_i $(1\leq i\leq m)$ des générateurs de C sur A , et posons $b_i=\varphi(c_i)$, $b'_i=\varphi'(c_i)$; par hypothèse , on a $b_i/1=b'_i/1$ dans l'anneau de fractions B_x . Autrement dit , il existe des éléments $s_i\in B-j_x$ tels que $s_i(b_i-b'_i)=0$, et on peut évidemment supposer tous les s_i égaux à un même élément

$g\in B-j_x$. Par suite , on a $b_i/1=b'_i/1$ dans l'anneau de fractions B_g , et si i_g est l'homomorphisme canonique $B\to B_g$, on voit donc que l'on a $i_g\circ\varphi=i_g\circ\varphi'$; on en conclut que les restrictions de f et f' à D(g) sont identiques .

(ii) On peut se ramener à la même situation que dans (i) et supposer en outre que A est <u>noethérien</u> . Soient c_i $(1\leq i\leq n)$ des générateurs de l'algèbre C sur A , et soit $\alpha : A[X_1,\ldots,X_n]\to C$ l'homomorphisme de l'algèbre de polynômes $A[X_1,\ldots,X_n]$ transformant X_i en c_i pour $1\leq i\leq n$; soit d'autre part i_y l'homomorphisme canonique $C\to C_y$, et considérons l'homomorphisme composé

$$\beta \ : \ A[X_1,\ldots,X_n]\xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{i_y} C_y \xrightarrow{\varphi} B_x \quad .$$

Désignons par a le noyau de β ; comme A est noethérien , il en est de même de $A[X_1,\ldots,X_n]$, et par suite a admet un système fini de générateurs $Q_j(X_1,\ldots,X_n)$ $(1\leq j\leq m)$. D'autre part , chacun des éléments $\varphi(i_y(c_i))$ peut s'écrire b_i/s_i où $b_i\in B$ et $s_i\notin j_x$; on peut en outre supposer tous les s_i égaux à un même élément $g\in B-j_x$. Cela étant , on a par hypothèse $Q_j(b_1/g,\ldots,b_n/g)=0$ dans B_x ; posons $Q_j(X_1/T,\ldots,X_n/T)=P_j(X_1,\ldots,X_n,T)/T^{k_j}$, où P_j est homogène de degré k_j ; on peut d'ailleurs supposer tous les k_j égaux à un même nombre k . Soit alors $d_j=P_j(b_1,\ldots,b_n,g)\in B$. Par hypothèse , on a $t_jd_j=0$ pour un $t_j\in B-j_x$ $(1\leq j\leq m)$, et on peut évidemment supposer tous les t_j égaux à un même élément $h\in B-j_x$; on en conclut que $P_j(hb_1,\ldots,hb_n,hg)=0$. Cela étant , considérons l'homomorphisme ρ de $A[X_1,\ldots,X_n]$ dans l'anneau de fractions B_{hg} qui applique X_i sur hb_i/hg ; l'image de a par cet homomorphisme est 0 , et il en est a fortiori de même de l'image par ρ du noyau $\alpha^{-1}(0)$; donc ρ se factorise en $A[X_1,\ldots,X_n]\xrightarrow{\alpha} C\xrightarrow{\gamma} B_{hg}$, avec $\gamma(c_i)=hb_i/hg$, et il est clair que si i_x est l'homomorphisme canonique B_{hg} B_x , le diagramme

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "i_y"'] & B_{hg} \arrow[d, "i_x"] \\ O_y \arrow[r, "\varphi"'] & B_x \end{tikzcd}$$

est commutatif ; $f=({}^a\gamma,\tilde{\gamma})$ est donc un S-morphisme du voisinage $D(hg)$ de x dans Y répondant à la question.

Proposition 16. – Soient $f = (\psi,\theta) : X \to Y$ un morphisme de type fini, x un point de X, $y=f(x)$.

(i) Pour que f soit une immersion locale au point x (§ 3, n°3, déf. 3), il faut et il suffit de $\theta_x^b : O_y \to O_x$ soit surjectif.

(ii) On suppose en outre Y localement noethérien. Pour que f soit un isomorphisme local au point x (§ 3, n°3, déf. 4), il faut et il suffit que θ_x^b soit un isomorphisme

(ii) D'après la prop. 15, il existe un voisinage ouvert V de y et un morphisme $g : V \to X$ tels que $g \circ f$ (resp. $f \circ g$) coïncide avec l'identité dans un voisinage de x (resp. y), d'où aussitôt la conclusion.

(i) On se ramène au cas où X et Y sont affines, d'anneaux respectifs A,B ; on a $f=({}^a\varphi,\tilde{\varphi})$, où φ est un homomorphisme $B \to A$, qui fait de A une B-algèbre de type fini ; on a $\varphi^{-1}(j_x)=j_y$, et l'homomorphisme $\varphi_x : B_y \to A_x$ déduit de φ est surjectif. Soit $(t_i)_{1\le i\le n}$ un système fini de générateurs de A sur B ; par hypothèse, il existe des $b_i \in B$ et $c \in B-j_y$ tels que $t_i/1=\varphi(b_i)/\varphi(c)$ dans l'anneau A_x ; cela implique par définition qu'il existe $a \in A-j_x$ tel que, si on pose $g=a\varphi(c)$, on ait aussi $t_i/1=a\varphi(b_i)/g$ dans l'anneau A_g. Cela étant, il existe par hypothèse un polynôme $Q(X_1,\dots,X_n)$ à coefficients dans l'anneau $\varphi(B)$ tel que $a=Q(t_1,\dots,t_n)$; posons $Q(X_1/T,\dots,X_n/T)=P(X_1,\dots,X_n,T)/T^m$, où P est homogène de degré m ; dans l'anneau A_g, on a $a/1=a^mP(\varphi(b_1),\dots,\varphi(b_n),\varphi(c))/g^m=a^m\varphi(d)/g^m$ avec $d \in B$. Mais comme dans A_g, $g/1=(a/1)(\varphi(c)/1)$ est inversible, il en est de même de $a/1$ et $\varphi(c)/1$, et on peut donc écrire $a/1=$ $=(\varphi(d)/1)(\varphi(c)/1)^{-m}$; on en conclut que $\varphi(d)/1$ est aussi inversible dans A_g . Posons alors $h=cd$; comme $\psi(h)/1$ est inversible dans A_g , l'homomorphisme composé $B \xrightarrow{\varphi} A \to A_g$ se factorise en $B \to B_h \xrightarrow{\gamma} A_g$. Montrons que γ est surjectif : il suffit de vérifier que l'image de B_h dans A_g contient les $t_i/1$ et $(g/1)^{-1}$; or, on a $(g/1)^{-1}=(\varphi(c)/1)^{m-1}(\varphi(d)/1)^{-1}=\gamma(c^m/h)$. et $a/1=\gamma(d^{m+1}/h^m)$ donc $(a\varphi(b_i))/1=\gamma(b_i d^{m+1}/h^m)$, et comme $t_i/1=(a\varphi(b_i)/1)(g/1)^{-1}$, notre assertion est démontrée . On en conclut aussitôt (§ 3, n°2, cor. 2 de la prop. 4) que la restriction de f à $D(g)$, égale à $({}^a\gamma, \tilde{\gamma})$, est une immersion fermée de $D(g)$ dans $D(h)$.

Corollaire .- Soit f $(=(\psi,\theta))$: $X \to Y$ un morphisme de type fini . On suppose X irréductible , on désigne par x son point générique et on pose $y=\psi(x)$. Pour qu'il existe un ouvert non vide U de X tel que la restriction de f au sous-préschéma induit sur U soit une immersion fermée dans un souspréschéma induit sur un ouvert de Y , il faut et il suffit que $\theta^b_x : O_y \to O_x$ soit surjectif . Si de plus Y est irréductible et localement noethérien , pour qu'il existe un ouvert non vide U de X tel que la restriction de f au sous-préschéma induit sur U soit un isomorphisme sur un sous-préschéma induit sur un ouvert de Y , il faut et il suffit que y soit le point générique de Y (autrement dit, que $\psi(X)$ soit dense dans Y) et que θ^b_x soit un isomorphisme .

La première assertion résulte de la prop. 16 , compte tenu de ce que tout ouvert non vide de X contient x . Comme $\{x\}$ est dense dans X , $\{y\}$ est dense dans $\psi(X)$ et pour que $\psi(X)$ contienne un ouvert non vide de Y , il est donc nécessaire que $\{y\}$ soit dense dans Y , autrement dit que y soit le point générique de Y (lorsque Y est supposé irréductible) ; la seconde assertion résulte alors de la prop. 16 .

Lorsque les conditions de la seconde partie du cor. de la prop. 16 sont vérifiées , on voit donc que θ^b_x est un isomorphisme de l'anneau des fonctions rationnelles sur Y , sur l'anneau des fonctions rationnelles sur X . On dit alors que f est un morphisme birationnel.

Archives Grothendieck — Sept 59

P.24 , before Prop.2 , add :

~~XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX~~ Si X lui-même est irréductible et si x est son point générique , on dit encore que O_x est l'anneau des fonctions rationnelles sur X .

P.30 , replace the first line by :

4 . Somme et produit de préschémas .

Soit (X_α) une famille quelconque de préschémas ; soit X un espace topologique somme des espaces de base X_α . X est alors réunion de sous-espaces ouverts disjoints X'_α , et pour chaque α il y a un homéomorphisme φ_α de X_α sur X'_α .Si on munit chacun des X'_α du faisceau $(\varphi_\alpha)_*(O_{X_\alpha})$, il est clair que X devient un préschéma,qu'on appelle somme de la famille de préschémas (X_α) . Si Y est un préschéma , l'application $f \to (f\circ\varphi_\alpha)$ est une bijection $\mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \prod_\alpha \mathrm{Hom}(X_\alpha,Y)$. En particulier si les X_α sont des S-préschémas de morphismes structuraux ψ_α , X est un S-préschéma pour l'unique morphisme $\psi : X \to S$ tel que $\psi\circ\varphi_\alpha = \psi_\alpha$ pour tout α .

P. 35 , before n°5 , insert :

Remarque .- Soient (X_α),(Y_λ) deux familles de S-préschémas , X (resp. Y) la somme de la famille (X_α) (resp. (Y_λ)) . Alors $X \times_S Y$ s'identifie à la somme de la famille $(X_\alpha \times_S Y_\lambda)$; cela résulte aussitôt de la partie a) de la démonstration du th.1 .

The end of § 2, from n°6 on, should be replaced by the following text :

6. Points d'un préschéma à valeurs dans un autre ; points géométriques.

Soit X un préschéma ; pour tout préschéma T, on désignera l'ensemble des morphismes de T dans X par $\mathrm{Hom}(T,X)$ ou encore par $X(T)$, et les éléments de cet ensemble seront encore appelés les points de X à valeurs dans T. Si on associe à tout morphisme $f : T \to T'$ l'application $u' \to u' \circ f$ de $X(T')$ dans $X(T)$, on voit que, pour X fixé, $T \to X(T)$ est un foncteur contravariant de la catégorie des préschémas dans celle des ensembles. En outre, tout morphisme de préschémas $g : X \to Y$ définit un homomorphisme fonctoriel $X(T) \to Y(T)$, faisant correspondre $g \circ v$ à $v \in X(T)$.

Etant donnés trois ensembles P, Q, R et deux applications $\varphi : P \to R$, $\psi : Q \to R$, on appelle produit fibré de P et Q au-dessus de R la partie de l'ensemble produit $P \times Q$ formée des couples (p,q) tels que $\varphi(p)=\psi(q)$; on le note $P \times_R Q$. La définition du produit de préschémas (n°4, déf. 1) peut encore s'interpréter, avec les notations précédentes, par la formule

$$(X \times_S Y)(T) = X(T) \times_{S(T)} Y(T) \tag{1}$$

les applications $X(T) \to S(T)$ et $Y(T) \to S(T)$ correspondent aux morphismes structuraux $X \to S$, $Y \to S$.

Si on se donne un préschéma S et qu'on ne considère que les S-préschémas et les S-morphismes (n°3), on désignera de même l'ensemble des S-morphismes $T \to X$ par $\mathrm{Hom}_S(T,X)$ ou $X(T)_S$ (en se permettant de supprimer l'indice S quand aucune confusion n'est possible). La formule (1) s'écrit alors aussi

$$(X \times_S Y)(T)_S = X(T)_S \times Y(T)_S \tag{2}$$

et plus généralement, si Z est un S-préschéma, X, Y, T des Z-préschémas (donc ipso facto des S-préschémas), on a

(3) $$(X\times_Z Y)(T)_S = X(T)_S \times_{Z(T)_S} Y(T)_S \ .$$

Lorsque dans ce qui précède T (resp. S) est de la forme Spec(B) (resp Spec(A)) , on se permet de remplacer T (resp. S) par B (resp. A) dans les notations précédentes , et on parle alors de *points de* X *à valeurs dans l'anneau* B , ou de *points du* A-*préschéma* X *à valeurs dans la* A-*algèbre* B pour les éléments de X(B) et de $X(B)_A$ respectivement . On notera que X(B) et $X(B)_A$ sont maintenant des foncteurs *covariants* de B . On écrira de même $X(T)_A$ pour l'ensemble des points du A-préschéma X à valeurs dans le A-préschéma T .

Considérons en particulier le cas où T est de la forme Spec(A) , où A est un *anneau local* ; les éléments de ~~X(T)~~ X(A) correspondent alors biunivoquement aux homomorphismes $O_x \to A$ $(x\in X)$ (n°2, prop.5) ; on dit que le point x de l'espace de base de X est la *localité* du point de X à valeurs dans A auquel il correspond .

Plus particulièrement , on appellera *points géométriques* d'un préschéma X les *points de* X *à valeurs dans un corps* K : la donnée d'un tel point revient donc à la donnée de sa localité x dans l'espace de base de X , et d'une *extension* K de $\kappa(x)$; K sera appelé le *corps des valeurs* du point géométrique correspondant, et on dit encore que ce point est *localisé* en x. On définit ainsi une application $X(K)\to X$, appliquant un point géométrique sur sa localité .

Si X et Spec(K) sont des S-préschémas (autrement dit , si K est considéré comme extension d'un corps résiduel $\kappa(s)$, où $s\in S$), un élément de $X(K)_S$, ou , comme on dit encore , un *point de* X *à valeurs dans l'extension* K de $\kappa(s)$, consiste en la donnée d'un $\kappa(s)$-isomorphisme d'un corps résiduel $\kappa(x)$ dans K , où x est un point de X *au-dessus de* s (donc $\kappa(x)$ une extension de $\kappa(s)$).

Lemme 5 .- Soient X_i $(1\leq i\leq n)$ *des* S-*préschémas* , s *un point de l'espace de base* S , x_i $(1\leq i\leq n)$ *un point de l'espace de base* X_i *au-dessus de* s . *Il existe alors une extension* K *de* $\kappa(s)$ *et un point géo-*

métrique du produit $Y = X_1 \times_S X_2 \times \dots \times_S X_n$, *à valeurs dans* K, *dont les projections soient localisées aux* x_i.

En effet, il existe des $\kappa(s)$-monomorphismes $\kappa(x_i) \to K$ dans une même extension K de $\kappa(s)$; les composés $\kappa(s) \to \kappa(x_i) \to K$ sont donc tous identiques (Bourbaki, *Alg.*, chap. V, § 4, prop. 2). On en déduit que les morphismes correspondants $\mathrm{Spec}(K) \to X_i$ sont des S-morphismes, et par suite définissent un S-morphisme unique $\mathrm{Spec}(K) \to Y$. Si y est le point correspondant de Y, il est clair que sa projection sur chacun des X_i est x_i.

Proposition 10.- Soient X_i ($1 \leq i \leq n$) *des S-préschémas, et pour chaque indice i soit* x_i *un point de l'espace de base* X_i. *Pour qu'il existe un point y de l'espace de base de* $Y = X_1 \times_S X_2 \times \dots \times_S X_n$ *dont* x_i *soit la projection d'indice i* ($1 \leq i \leq n$), *il faut et il suffit que les* x_i *soient au-dessus d'un même point s de l'espace de base S.*

La condition est évidemment nécessaire ; le lemme 5 montre qu'elle est suffisante.

En d'autres termes, si on désigne par (X) l'ensemble sous-jacent à l'espace de base de X, on voit qu'on a une application *surjective* canonique $(X \times_S Y) \to (X) \times_{(S)} (Y)$; il faut noter que cette application *n'est pas injective* en général (autrement dit, il peut exister plusieurs points z distincts ayant mêmes projections).

Corollaire.- Soient $f : X \times Y$ *un S-morphisme,* $f^{S'} : X^{S'} \to Y^{S'}$ *le S'-morphisme déduit de f par une extension* $S' \to S$ *du préschéma de base. Soit p (resp. q) la projection* $X^{S'} \to X$ *(resp.* $Y^{S'} \to Y$*) ; pour toute partie M de l'espace de base X, on a* $q^{-1}(f(M)) = f^{S'}(p^{-1}(M))$.

En effet (n°5, cor. 2 de la prop. 9), $X^{S'}$ s'identifie au produit $X \times_Y Y^{S'}$ par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & X^{S'} \arrow[l, "p"'] \arrow[d, "f^{S'}"] \\
Y & Y^{S'} \arrow[l, "q"]
\end{tikzcd}$$

En vertu de la prop.10 , la relation $q(y')=p(x)$ pour $x \in X$, $y' \in Y^{S'}$, équivaut à l'existence d'un $x' \in X^{S'}$ tel que $p(x')=x$ et $f^{S'}(x')=y'$, d'où le corollaire .

7 . Surjections et injections . Fibres .

Définition 6 .- On dit qu'un morphisme $(\psi,\theta) : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ *de préschémas est surjectif , ou est une surjection , si l'application continue* ψ *est surjective* .

On notera que cela n'entraîne nullement que (ψ,θ) soit un épimorphisme d'espaces annelés (θ n'est pas nécessairement injectif) .

Il est clair que le composé $g \circ f$ de deux surjections est une surjection , et que si inversement $g \circ f$ est une surjection , alors g est une surjection .

Proposition 11 .- a) Si un S-*morphisme* $f : X \to Y$ *est surjectif , tout* S'-*morphisme* $f^{S'} : X^{S'} \to Y^{S'}$ *déduit de* f *par extension du préschéma de base est surjectif* .

b) *Si* $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ *sont des* S-*morphismes surjectifs , le* S-*morphisme* $f \times_S g : X \times_S Y \to X' \times_S Y'$ *est surjectif* .

La première assertion est une conséquence immédiate du cor. de la prop.10 du n°6 . La seconde s'en déduit en remarquant que $f \times_S g$ est le morphisme composé

$$X \times_S Y \xrightarrow{f \times 1_Y} X' \times_S Y \xrightarrow{1_{X'} \times g} X' \times_S Y' \quad .$$

Proposition 12 .- Pour qu'un morphisme $f : X \to Y$ *soit surjectif , il faut et il suffit que pour tout corps* K *et tout morphisme* $\mathrm{Spec}(K) \to Y$, *il existe une extension* K' *de* K *et un morphisme* $\mathrm{Spec}(K') \to X$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Spec}(K') \arrow[l] \arrow[d] \\ Y & \mathrm{Spec}(K) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

La condition est suffisante , car pour tout $y \in Y$, il suffit de l'appliquer à un morphisme $\mathrm{Spec}(K) \to Y$ correspondant à un monomorphisme $\kappa(y) \to K$, K étant une extension de $\kappa(y)$ (n°2, cor. de la prop.5).

Inversement, supposons f surjectif, et soit $y \in Y$ l'image de l'unique élément de $\mathrm{Spec}(K)$; il existe $x \in X$ tel que $f(x)=y$, donc f définit un monomorphisme $\kappa(y) \to \kappa(x)$; il suffit alors de prendre K' extension de $\kappa(y)$, tel qu'il existe des $\kappa(y)$-monomorphismes de $\kappa(x)$ et K dans K' ; le morphisme $\mathrm{Spec}(K') \to X$ correspondant à $\kappa(x) \to K'$ répond à la question.

Avec le langage introduit au n°6, on peut dire encore que tout point géométrique de Y à valeurs dans K provient d'un point géométrique de X à valeurs dans une extension de K.

Définition 7.- On dit qu'un morphisme de préschémas $f : X \to Y$ *est géométriquement injectif, ou est une injection géométrique, si pour tout corps* K*, l'application correspondante* $X(K) \to Y(K)$ *est injective.*

Pour que f soit géométriquement injectif, il suffit que la condition de la déf.7 soit vérifiée pour tout corps *algébriquement clos*. En effet, si K est un corps quelconque, K' une extension algébriquement close de K, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X(K) & \xrightarrow{\alpha} & Y(K) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ X(K') & \xrightarrow{\alpha'} & Y(K') \end{array}$$

est commutatif, φ et φ' provenant du morphisme $\mathrm{Spec}(K') \to \mathrm{Spec}(K)$, et α, α' correspondant à f. Or φ est injectif et il en est de même de α' par hypothèse, donc α est nécessairement injectif.

Proposition 13.- Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *deux morphismes : si f et g sont géométriquement injectifs, il en est de même de* $g \circ f$ *; inversement, si* $g \circ f$ *est géométriquement injectif, il en est de même de f.*

Compte tenu de la définition, la proposition revient aux assertions correspondantes pour les applications $X(K) \to Y(K) \to Z(K)$, qui sont évidentes.

Proposition 14.- Si les S-morphismes $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ *sont géométriquement injectifs, il en est de même de* $f \times_S g$.

En effet, on a vu (n°6) que $(X\times_S Y)(K)=X(K)\times_{S(K)} Y(K)$ et de même $(X'\times_S Y')(K)=X'(K)\times_{S(K)} Y'(K)$; l'application $(X\times_S Y)(K)\to(X'\times_S Y')(K)$ correspondant à $f\times_S g$ s'identifie alors à $(u,v)\to(f\circ u,g\circ v)$, et la proposition en résulte aussitôt.

Corollaire.- Si le S-*morphisme* $f : X\to Y$ *est géométriquement injectif, il en est de même de* $f^{S'} : X^{S'}\to Y^{S'}$ *pour toute extension* $S'\to S$ *du préschéma de base.*

Proposition 15.- Pour qu'un morphisme $f=(\psi,\theta) : X\to Y$ *soit géométriquement injectif, il faut et il suffit que* ψ *soit injectif et que, pour tout* $x\in X$, *le monomorphisme* $\theta^x : \kappa(\psi(x))\to\kappa(x)$ *fasse de* $\kappa(x)$ *une extension radicielle de* $\kappa(\psi(x))$.

Supposons f géométriquement injectif ; montrons d'abord que la relation $\psi(x_1)=\psi(x_2)=y$ entraîne nécessairement $x_1=x_2$. En effet, il existe un corps K et des $\kappa(y)$-monomorphismes $\kappa(x_1)\to K$, $\kappa(x_2)\to K$; les morphismes correspondants $u_1 : \mathrm{Spec}(K)\to X$, $u_2 : \mathrm{Spec}(K)\to X$ sont donc tels que $f\circ u_1=f\circ u_2$, donc $u_1=u_2$ par hypothèse, et cela entraîne $x_1=x_2$. Considérons maintenant $\kappa(x)$ comme extension de $\kappa(\psi(x))$ au moyen de θ^x ; si $\kappa(x)$ n'est pas extension radicielle de $\kappa(\psi(x))$, il existe deux $\kappa(\psi(x))$-monomorphismes distincts de $\kappa(x)$ dans une extension algébriquement close K de $\kappa(\psi(x))$ et les deux morphismes correspondants $\mathrm{Spec}(K)\to X$ violeraient l'hypothèse. Inversement, il est clair que les conditions de l'énoncé sont suffisantes pour que f soit géométriquement injectif.

Corollaire 1.- Pour tout $x\in X$, *les morphismes canoniques* $\mathrm{Spec}(O_x)\to X$ *et* $\mathrm{Spec}(\kappa(x))\to X$ *sont des injections géométriques.*

En effet, avec les notations de la prop. 15, θ^x est alors un isomorphisme de $\kappa(\psi(x))$ sur $\kappa(x)$ (§ 2, n°2, prop. 4).

Corollaire 2.- Si A *est un anneau,* S *une partie multiplicative de* A, *le morphisme canonique* $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)\to\mathrm{Spec}(A)$ *est une injection géomé-*

En effet, ce morphisme est de la forme $({}^a\varphi,\tilde{\varphi})$, où φ est l'homomorphisme canonique $A \to S^{-1}A$; on sait que ${}^a\varphi$ est un homéomorphisme de $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ sur un sous-espace de $\mathrm{Spec}(A)$ (§ 1, n°2, cor.3 de la prop 5), et d'autre part $\tilde{\varphi}_x$ donne par passage aux quotients un isomorphisme des corps résiduels pour tout $x = {}^a\varphi(y)$.

Proposition 16 .- Soient $f : X \to Y$ *une injection géométrique, et soit* $g : Y' \to Y$ *un morphisme ; posons* $X' = X^{Y'} = X \times_Y Y'$. *Le morphisme* $f^{Y'} : X' \to Y'$ *est géométriquement injectif, et l'image par* $f^{Y'}$ *de l'espace de base de* X' *est l'image réciproque* $g^{-1}(f(X))$.

La première assertion a déjà été démontrée (cor. de la prop.14) ; en outre (n°6, cor. de la prop.10), les points $y' \in Y'$ qui sont images de points de X' sont ceux pour lesquels il existe x X tels que $f(x) = g(y')$

Corollaire .- Pour tout corps K, *l'ensemble* $X'(K)$ *s'identifie au sous-ensemble de* $Y'(K)$ *image réciproque du sous-ensemble* $X(K)$ *de* $Y(K)$ *par l'application* $Y'(K)$ $Y(K)$ *correspondant à* g.

Cela résulte de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} X'(K) \arrow[r] \arrow[d] & Y'(K) \arrow[d] \\ X(K) \arrow[r] & Y(K) \end{tikzcd}$$

Proposition 17 .- Soient $f : X \to Y$ *un morphisme,* y *un point de* Y. *La projection* $p : X \times_Y \mathrm{Spec}(k(y)) \to X$ *est un homéomorphisme de l'espace de base du* $k(y)$*-préschéma* $X \times_Y \mathrm{Spec}(k(y))$ *sur la fibre* $f^{-1}(y)$, *munie de la topologie induite par celle de l'espace de base de* X.

On sait déjà, puisque $\mathrm{Spec}(k(y)) \to Y$ est géométriquement injective (cor 1 de la prop.15) que p identifie l'espace de base de $X \times_Y \mathrm{Spec}(k(y))$ à $f^{-1}(y)$ en tant qu'ensemble (prop.16) ; tout revient à démontrer que p est un homéomorphisme. Comme on peut remplacer Y par tout ouvert contenant y (n°4, prop.7), la question est locale sur X et Y, et on peut donc supposer $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = \mathrm{Spec}(B)$ affines, A étant donc une B-algèbre. La proposition résulte alors du cor.2 de la prop.5, § 1, n°2, appliqué à l'homomorphisme $A \to A \otimes_B k(y)$.

Par la suite, on considérera toujours les fibres $f^{-1}(y)$ d'un morphis ne $f : X \to Y$ comme muni de la structure de $k(y)$-préschéma transportée par la projection p . Le cor. de la prop.16 montre en outre que les points de X à valeurs dans une extension K de $k(y)$ sont identifiés aux points de $f^{-1}(y)$ à valeurs dans K .

Proposition 18 ("transitivité des fibres") .- Soient $f : X \to Y$, $g : Y' \to Y$ deux morphismes ; posons $X' = X \times_Y Y'$, et $f' = f^{Y'} : X' \to Y'$. Pour tout $y' \in Y'$, le préschéma $f'^{-1}(y') = f^{-1}(y) \otimes_{k(y)} k(y')$, en posant $y = g(y')$.

Si on revient aux définitions , cela revient à montrer que les deux préschémas $(X \times_Y \mathrm{Spec}(k(y))) \times_{\mathrm{Spec}(k(y))} \mathrm{Spec}(k(y'))$ et $(X \times_Y Y') \times_{Y'} \mathrm{Spec}(k(y'))$ sont canoniquement isomorphes , ce qui résulte de la transitivité de l'extension du préschéma de base (n°5, prop.9) et de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(k(y)) \arrow[d] & \mathrm{Spec}(k(y')) \arrow[l] \arrow[d] \\ Y & Y' \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Proposition 19 .- Soient $f : X \to Y$ un morphisme , y un point de Y . La projection $p : X \times_Y \mathrm{Spec}(O_y) \to X$ est un homéomorphisme de l'espace de base de $X \times_Y \mathrm{Spec}(O_y)$ sur l'image réciproque par f de l'espace de base de $\mathrm{Spec}(O_y)$, munie de la topologie induite par celle de l'espace de base de X .

Comme dans la prop.17 , tout revient à prouver que p est un homéomorphisme (cor.1 de la prop.15 et prop.16) . Comme l'image de $\mathrm{Spec}(O_y)$ dans Y est contenue dans tout ouvert affine contenant y (n°2) , on se ramène encore comme dans la prop.17 au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $Y = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines , A étant une algèbre sur B . Alors $X \times_Y \mathrm{Spec}(O_y)$ est le spectre de $A \otimes_B B_y$, qui s'identifie à $S^{-1}A$, où S est l'image de $B - j_y$ dans A (chap.0, § 1, n°2) ; et on sait que $\mathrm{Spec}(S^{-1}A) \to \mathrm{Spec}(A)$ est un homéomorphisme sur un sous-espace de X (§ 1, n°2, cor.3 de la prop.5).

P. 45 , replace definition 2 by the following :

Définition 2 .- On dit qu'un morphisme $f : Y \to X$ est une immersion (resp. une immersion fermée , une immersion ouverte) s'il se factorise en un isomorphisme $g : Y \to Z$ sur un sous-préschéma Z de X (resp. un sous-préschéma fermé Z de X , un sous-préschéma induit sur un ouvert Z de X) et en le morphisme d'injection $j : Z \to X$.

P. 45 , replace prop.4 by the following :

Proposition 4 .- a) Pour qu'un morphisme $f=(\psi,\theta) : Y \to X$ soit une immersion ouverte , il faut et il suffit que ψ soit un homéomorphisme de Y sur une partie ouverte de X , et que pour tout $y \in Y$, l'homomorphisme $\theta_y^\flat : \mathcal{O}_{\psi(y)} \to \mathcal{O}_y$ soit bijectif .

b) Pour qu'un morphisme $f=(\psi,\theta) : Y \to X$ soit une immersion (resp. une immersion fermée) , il faut et il suffit que ψ soit un homéomorphisme de Y sur une partie localement fermée (resp. fermée) de X , et que pour tout $y \in Y$, l'homomorphisme $\theta_y^\flat : \mathcal{O}_{\psi(y)} \to \mathcal{O}_y$ soit surjectif .

a) Les conditions sont évidemment nécessaires . Inversement , si elles sont remplies , il est clair que $\theta^\flat$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_Y$ sur $\psi^*(\mathcal{O}_X)$, et ~~xxx~~ $\psi^*(\mathcal{O}_X)$ est le faisceau déduit par transport de structure au moyen de ψ^{-1} à partir de $\mathcal{O}_X|\psi(Y)$; d'où la conclusion.

b)...

~~XX~~ P.47 in cor.1 , p.48 in cor.3 and prop.5 ,p.50 in cor.1 , introduce in the "resp." the mention of "immersions ouvertes" ("préschéma induit sur un ouvert" in cor.3,p.50) . P.47 , in the proof of cor.1, line 1 of the proof , after "surjectif" , insert : (resp. bijectif s'il s'agit d'immersions ouvertes) ; in the other "resp." of the ~~p~~ proof , introduce "ouvert" . In the proof of cor.3 ,p.50 , in the "resp." introduce also "une immersion ouverte" .

P. 51 , insert a new n°3 :

3 . Immersions locales et isomorphismes locaux .

Définition 3 .– Soit $f : X \to Y$ un morphisme de préschémas . On dit que f est une immersion locale en un point x de l'espace de base X s'il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un voisinage ouvert V de $f(x)$ dans Y tels que la restriction de f au sous-préschéma induit U soit une immersion fermée de U dans le sous-préschéma induit V . On dit que f est une immersion locale si f est une immersion locale en tout point x de X .

Définition 4 .– On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ est un isomorphisme local en un point $x \in X$ s'il existe un voisinage ouvert U de x dans X tel que la restriction de f au sous-préschéma induit U soit une immersion ouverte de U dans Y . On dit que f est un isomorphisme local si f est un isomorphisme local en tout point de X .

Une immersion (resp. une immersion fermée) $f : X \to Y$ peut donc se caractériser comme une immersion locale telle que f soit un homéomorphisme de l'espace de base X sur une partie localement fermée (resp. fermée) de Y . Une immersion ouverte f peut se caractériser comme un isomorphisme local tel que f soit un homéomorphisme de l'espace de base X sur une partie ouverte de Y .

Proposition 6 .– Le composé de deux immersions locales (resp. de deux isomorphismes locaux) est une immersion locale (resp. un isomorphisme local) .

Cela résulte aussitôt de la transitivité des immersions (resp. fermées , ouvertes) (n°2, cor. 3 de la prop. 4) et du fait que si f est un homéomorphisme de X sur une partie fermée de Y , pour tout ouvert $U \subset X$, $f(U)$ est ouvert dans $f(X)$, donc il existe une partie ouverte V de Y telle que $f(U) = V \cap f(X)$, et $f(U)$ est donc fermé dans V.

Proposition 7 .– Soient $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ deux S-morphismes . Si f et g sont des immersions locales (resp. des isomorphismes locaux), il en est de même de $f \times_S g$.

En effet , soient $z \in X \times_S Y$, z' son image dans $X' \times_S Y'$ par $f \times_S g$, p,q les projections de $X \times_S Y$, p',q' celles de $X' \times_S Y'$. Il existe par hypothèse des voisinages ouverts U,U',V,V' de $x=p(z)$, $x'=p'(z')$, $y=q(z)$, $y'=q'(z')$ respectivement , tels que les restrictions de f et g à U et V soient des immersions fermées (resp. ouvertes) dans U' et V' respectivement . Comme l'espace de base de $U \times_S V$ et celui de $U' \times_S V'$ s'identifient aux voisinages ouverts $p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$ et $p'^{-1}(U') \cap q'^{-1}(V')$ de z et z' respectivement , la proposition résulte de la prop.5du n°2 .

Corollaire .- Si un S-morphisme f est une immersion locale (resp. *un isomorphisme local) , il en est de même de $f^{S'}$ pour toute extension* S' S *du préschéma de base* .

From p.51 on , section n is replaced by section n+1 , definition n (resp. prop.n) by definition n+2 (resp. prop. n+2).

P.53 , prop.10 , in the statement of the proposition and in the proof
immersion locale, isomorphisme locale
introduce in the "resp." the mention of "immersion ouverte" , and in the last line but one of the proof , after "surjectif" insert:(resp. bijectif s'il s'agit d'immersions ouvertes).

P.57 , before the final "Remarque" of section 5 , insert :

Corollaire 3 .- Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ *deux morphismes ; si* $g \circ f$ *est une immersion* (resp. *une immersion locale) . il en est de même de f* .

En effet , f se factorise en $X \xrightarrow{\Gamma_f} X \times_Z Y \xrightarrow{p_2} Y$. D'autre part , p_2 s'identifie à $(g \circ f) \times_Z 1_Y$ (§ 2,n°5,cor. de la prop.8) ; si $g \circ f$ est une immersion (resp. une immersion locale) il en est de même de p_2 (n°2, prop.5 et n°3,prop.7); en vertu du cor.2 , $p_2 \circ \Gamma_f$ est une immersion (resp. une immersion locale) (n°2, cor.3 de la prop.4 et n°3, prop.6).

Le même raisonnement vaudrait pour les immersions *fermées* si on savait que Γ_f est une immersion fermée ; on va introduire au n° 6 une condition assurant qu'il en est bien ainsi.

P.61 , replace cor.1 by :

Corollaire 1 .- Soient $f : X\to Y$, $g : Y\to Z$ *deux morphismes , g étant séparé . Si* $g\circ f$ *est une immersion fermée , il en est de même de f .*
Le raisonnement est le même que dans le cor.3 de la prop.15 du n°5, tenant compte de ce que Γ_f est une immersion fermée , et du cor.3 de la prop.4 du n°2 .

Suppress the "Remarque" on top of p.62 .

P.51 , before n°3 , add :

La commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} X\times_Y Y' \arrow[r, "f^{Y'}"] \arrow[d, "p"'] & Y' \arrow[d, "j"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

montre que la restriction de f au sous-préschéma $f^{-1}(Y')$ se factorise en $f^{-1}(Y')\xrightarrow{g} X\times_Y Y' \xrightarrow{f^{Y'}} Y' \xrightarrow{j} Y$, en désignant par g l'isomorphisme réciproque de l'isomorphisme associé à $p=1_X\times_Y j$. En outre :

Corollaire 4 .- Soient $f : X\to Y$, $g : Y\to Z$ *deux morphismes ,* $h=g\circ f$ *leur composé . Pour tout sous-préschéma* Z' *de* Z *, il existe un isomorphisme canonique de* $h^{-1}(Z')$ *sur* $g^{-1}(f^{-1}(Z'))$.
Cela résulte aussitôt de l'isomorphisme $X\times_Y(Y\times_Z Z')=X\times_Z Z'$ (§ 2, n°5,prop.9).

P.31 , replace prop.7 by the following :

Proposition 7 .- Soient $f : S' \to S$ un monomorphisme de préschémas , (T,I,1.1) , X,Y deux S'-préschémas , qui peuvent aussi être considérés comme des S-préschémas au moyen de f . Tout produit des S-préschémas X,Y est alors un produit des S'-préschémas X,Y et réciproquement.

Soient $\varphi : X \to S'$, $\psi : Y \to S'$ les morphismes structuraux . Si T est un S-préschéma , $u : T \to X$, $v : T \to Y$ deux S-morphismes , on a par définition $f\circ\varphi\circ u = f\circ\psi\circ v = \theta$, morphisme structural de T ; l'hypothèse sur f entraîne $\varphi\circ u = \psi\circ v = \theta'$, et on voit qu'on peut considérer T comme S'-préschéma de morphisme structural θ' , u et v comme des S'-morphismes . La conclusion de la proposition en résulte immédiatement , compte tenu de la déf.1 .

Corollaire .- Soient X,Y deux S-préschémas , $\varphi : X \to S$, $\psi : Y \to S$ leurs morphismes structuraux , S' une partie ouverte de S telle que $\varphi(X) \subset S'$ $\psi(Y) \subset S'$. Tout produit des S-préschémas X,Y est aussi un produit des S'-préschémas X,Y , et réciproquement .

Il suffit d'appliquer la prop.7 au cas où f est le morphisme d'injection du préschéma S' induit par S .

P.25 , before "Conventions de notations" insert :

Exemple .- Si V est une partie ouverte de X , l'injection canonique (chap.0,§ 2,n°5) du sous-préschéma $(V, \mathcal{O}_X|V)$ dans $(X, \mathcal{O}_X)$ est un morphisme de préschémas .

P.57 , the last "Remarque" of n°5 should be replaced by the following

Remarque .- Si $f : X \to Y$ est un monomorphisme de préschémas , les produits $X \times_X X$ et $X \times_Y X$ s'identifient canoniquement (§ 2,n°4,prop.7) et comme le premier s'identifie canoniquement à X , on voit que dans ce cas Δ_X est un isomorphisme de X sur $X \times_Y X$.

P. 54 , after prop.11 , add :

<u>Corollaire .-Les schémas</u> $(X \times_S Y)_{red}$ <u>et</u> $(X_{red} \times_S Y_{red})_{red}$ <u>s'identifient canoniquement</u> .

Cela résulte aussitôt des prop.9 et 11 .

P. 54 , before prop.12 , add :

Si $f : T \to X$, $g : T \to Y$ sont deux S-morphismes , on vérifie aussitôt que l'on a $(f,g)_S = (f \times_S g) \circ \Delta_T$.

Archives Grothendieck - sept 57

§ 5 . [redacted] applications rationnelles .

1 . Pseudo-morphismes et applications rationnelles .

Soient X,Y deux préschémas , U,V deux ouverts denses dans X , f (resp. g) un morphisme de U (resp. V) dans Y ; nous dirons que f et g sont équivalents s'ils coïncident dans [redacted] un ouvert dense dans $U \cap V$. Comme une intersection finie d'ouverts denses dans X est dense , il est clair que cette relation est bien une relation d'équivalence .

Définition 1 .- Etant donnés deux préschémas X,Y , on appelle pseudo-morphisme de X dans Y une classe d'équivalence de morphismes de parties ouvertes denses de X dans Y . Si X et Y sont des S-préschémas , on dit qu'un pseudo-morphisme de X dans Y est un pseudo-S-morphisme s'il existe un représentant dans cette classe qui est un S-morphisme . On appelle pseudo-S-section d'un S-préschéma X un pseudo-S-morphisme de S dans X . On appelle pseudo-fonction sur X toute pseudo-X-section du préschéma $X \otimes_{\underline{Z}} \underline{Z}[T]$ sur X (T indéterminée) .

Les pseudo-X-sections sur X s'identifient aux classes d'équivalence des sections du faisceau structural O_X au-dessus d'ouverts partout denses de X (deux telles sections étant équivalentes si elles coïncident dans un ouvert partout dense contenu dans l'intersection de leurs ensembles de définition) . En effet , soit (V_α) un recouvrement d'un ouvert partout dense U de X par des ouverts affines . Soit $u : U \to U \otimes_{\underline{Z}} \underline{Z}[T]$ un U-morphisme , et soit u_α sa restriction à $V_\alpha = \mathrm{Spec}(A_\alpha)$; le préschéma $V_\alpha \otimes_{\underline{Z}} \underline{Z}[T]$ est affine d'anneau $A_\alpha[T]$, et u_α correspond à un A_α-homomorphisme ~~XXX~~ $A_\alpha[T] \to A_\alpha$ (§ 2,n°2,prop.3) Or un tel homomorphisme est complètement déterminé par la donnée de l'image de T , soit $f_\alpha \in A_\alpha = \Gamma(V_\alpha, O_X)$, et si on écrit que les restrictions de u_α et u_β à un ouvert affine $W \subset V_\alpha \cap V_\beta$ coïncident , on voit aussitôt que f_α et f_β coïncident dans W , donc la famille

(f_α) est formée des restrictions aux V_α d'une section f de O_X au-dessus de U , et réciproquement , il est clair qu'une telle section détermine un U-morphisme $U \to U \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[T]$, d'où notre assertion (ces considérations seront généralisées au chap. II, § 2, n°8). On voit donc que les pseudo-fonctions sur X forment un *anneau* .

Lorsque X est *irréductible* , tout ouvert non vide est dense dans X; on peut encore dire que les ouverts non vides de X sont les *voisinages ouverts du point générique* x de X . Dire que deux morphismes de parties ouvertes non vides de X dans Y sont équivalents signifie donc dans ce cas qu'ils ont *même germe* au point x . Autrement dit les pseudo-morphismes (resp. pseudo-S-morphismes) $X \to Y$ sont les *germes de morphismes (resp. S-morphismes)* de X dans Y au point générique x de Y . En particulier :

Proposition 1 .- Si X *est un préschéma irréductible , l'anneau des pseudo-fonctions sur* X *s'identifie à l'anneau local* O_x *du point générique* x *de* X *. C'est un anneau local de dimension* 0 , *et par suite un anneau local artinien lorsque* X *est noethérien ; c'est un corps lorsque* X *est intègre* .

Nous avons en effet démontré la première assertion ; les autres se déduisent du § 2, n°2, cor. de la prop. 4 et des propriétés des anneaux locaux de dimension 0 (Bourbaki, Alg. com.).

Corollaire .- Si $X=\mathrm{Spec}(A)$, *où* A *est intègre , le corps des pseudo-fonctions sur* X *s'identifie au corps des fractions de* A .

Supposons maintenant que X ait un nombre fini de composantes irréductibles X_i $(1 \leq i \leq n)$ (ce qui est le cas *lorsque X est noethérien*) ; soit X_i' l'ouvert dense de X , complémentaire de la réunion des $X_i \cap X_j$ $(j \neq i)$. Il est clair que pour tout ouvert partout dense U de X , $U_i = U \cap X_i'$ est un ouvert non vide de X_i $(1 \leq i \leq n)$ et les U_i sont deux à deux sans point commun . Or , se donner un morphisme de $U' = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ dans Y revient à se donner (arbitrairement) un morphisme de chacun des U_i dans Y. Autrement dit :

Proposition 2 .- Soient X , Y deux préschémas (resp. S-préschémas), tels que X ait un nombre fini de composantes irréductibles X_i . L'ensemble des pseudo-morphismes (resp. S-pseudo-morphismes) de X dans Y s'identifie au produit des ensembles de pseudo-morphismes (resp. pseudo-S-morphismes) des X_i dans Y .

Corollaire 1 .- Soit X un préschéma noethérien . Alors l'anneau des pseudo-fonctions sur X est un anneau artinien , dont les composants locaux sont les anneaux de pseudo-fonctions sur les composantes irréductibles de X .

Corollaire 2 .- Soient A un anneau noethérien , $X=\mathrm{Spec}(A)$. L'anneau des pseudo-fonctions sur X s'identifie canoniquement à $S^{-1}A$, où S est le complémentaire de la réunion des idéaux premiers minimaux de A .

Cela résultera du lemme suivant :

Lemme 1 .- Pour qu'un élément $f\in A$ soit tel que l'ouvert D(f) soit partout dense , il faut et il suffit que $f\in S$, et tout ouvert dense dans X contient un ouvert de la forme D(f) , où $f\in S$.

En effet , si ce lemme est démontré , comme l'anneau des sections $\Gamma(D(f),\mathcal{O}_X)$ s'identifie à A_f (§ 1, n°3, prop. 6 et th. 1) , il résulte du fait que les D(f) avec $f\in S$ forment un ensemble cofinal dans l'ensemble ordonné (par $\supset$) des ouverts denses dans X , et de la définition 1 , que l'anneau des pseudo-fonctions sur X s'identifie à la limite inductive des A_f pour $f\in S$ (pour la relation d'ordre "g est multiple de f") , c'est-à-dire à $S^{-1}A$ (chap. 0, § 1, n°4) .

Pour démontrer le lemme 1 , remarquons que si D(f) est dense dans X, $D(f)\cap X_i\neq\emptyset$ pour $1\leq i\leq n$ et réciproquement ; mais cela signifie que $f\notin\mathfrak{p}_i$, si $\mathfrak{p}_i=\mathfrak{j}(X_i)$, donc $f\in S$, d'où la première assertion du lemme . D'autre part si U est un ouvert dense dans X , $U\cap X'_i\neq\emptyset$ pour tout i , donc il existe $f_i\in A$ tel que $D(f_i)\subset U\cap X'_i$ $(1\leq i\leq n)$. Par définition , cela signifie le complémentaire de U est de la forme $V(\underline{a})$, où $\underline{a}$ est un idéal qui n'est contenu dans aucun des $\underline{p}_i$; il n'est donc pas contenu dans leur réunion , et il y a par suite $f\in \underline{a}$ appartenant à S ; d'où $D(f)\subset U$, ce qui achève la démonstration .

Supposons de nouveau X irréductible , de point générique x . Comme tout ouvert non vide U de X contient x , et par suite contient aussi tout $z\in X$ tel que $x\in \overline{\{z\}}$, tout morphisme $U\to Y$ peut se composer avec le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(O_x)\to X$ (§ 2,n°2) ; et deux morphismes de parties ouvertes non vides de X qui coïncident dans une partie ouverte non vide de X donnent le même morphisme $\mathrm{Spec}(O_x)\to Y$ par composition . Autrement dit , à tout pseudo-morphisme $X\to Y$ correspond ainsi un morphisme $\mathrm{Spec}(O_x)\to Y$ bien déterminé .

Proposition 3 .- Soient X et Y deux S-préschémas ; on suppose X irréductible , de point générique x , et Y de type fini sur S . Soit $\xi=\mathrm{Spec}(O_x)$. Deux pseudo-S-morphismes de X dans Y auxquels correspond le même S-morphisme $\xi\to Y$ sont identiques . Inversement , si S est localement noethérien , tout S-morphisme de ξ dans Y correspond à un pseudo-S-morphisme de X dans Y .

Compte tenu de ce que tout ouvert non vide dans X est partout dense, cela résulte aussitôt de la prop.15 du § 4,n°3 .

Corollaire 1 .- On suppose S localement noethérien , et les autres hypothèses de la prop.3 satisfaites . Les pseudo-S-morphismes de X dans Y s'identifient alors aux points du S-préschéma Y , à valeurs dans le S-préschéma $\xi=\mathrm{Spec}(O_x)$.

Cela n'est autre que la prop.3 , avec la terminologie introduite au § 2,n°6 .

Corollaire 2 .- On suppose remplies les conditions du cor.1 . Soit s l'image de x dans S . La donnée d'un pseudo-S-morphisme $X\to Y$ équivaut à la donnée d'un point y de Y au-dessus de s , et d'un O_s-homomorphisme de O_y dans $R=O_x$ tel que l'image réciproque de l'idéal maximal de O_x soit l'idéal maximal de O_y.

Cela résulte du cor.1, ainsi que du § 2, n°2, prop.5.

En particulier :

Corollaire 3.- Sous les mêmes conditions, les pseudo-S-morphismes de X dans Y ne dépendent que du S-préschéma $\xi=\mathrm{Spec}(O_x)$ et restent les mêmes en particulier quand on remplace X par $\mathrm{Spec}(O_z)$, où $z \in X$.

En effet, comme $z \in \overline{\{x\}}$, x appartient à $\mathrm{Spec}(O_z)$ et en est par suite le point générique.

Lorsque X est intègre, $R=O_x$ est un corps ; les corollaires précédents se spécialisent en :

Corollaire 4.- On suppose vérifiées les conditions du cor.1, et en outre que X est intègre. Alors les pseudo-S-morphismes de X dans Y s'identifient aux points géométriques de $Y \otimes_S \kappa(s)$ à valeurs dans l'extension R de $\kappa(s)$, autrement dit chacun d'eux équivaut à la donnée d'un point $y \in Y$ au-dessus de s et d'un $\kappa(s)$-monomorphisme de $\kappa(y)$ dans $R=\kappa(x)$.

Les points de Y au-dessus de s s'identifient en effet à ceux de $Y \otimes_S \kappa(s)$ (§ 2, n°7, prop.17) et les O_s-homomorphismes $O_y \to R$ vérifiant la condition du cor.2 aux $\kappa(s)$-monomorphismes $\kappa(y) \to R$.

Plus particulièrement :

Corollaire 5.- Soient k un corps, X, Y deux préschémas algébriques sur k ; on suppose X intègre, et on désigne par R le corps des pseudo-fonctions sur X. Alors les pseudo-k-morphismes de X dans Y s'identifient aux points géométriques de Y à valeurs dans l'extension R de k.

2 . Applications rationnelles .

Définition 2 .- Soient X un S-préschéma réduit , Y un S-préschéma . On appelle S-application rationnelle de X dans Y un S-morphisme f d'un ouvert partout dense $U \subset X$ dans Y qui ne peut être prolongé en un morphisme (dans Y) d'un ouvert contenant strictement U . On dit que U est le domaine de définition de f , et que f est définie en x si $x \in U$. On appelle S-section rationnelle de X une S-application rationnelle de S dans X . On appelle fonction rationnelle sur X toute X-section rationnelle du préschéma $X \otimes_{Z} Z[T]$ sur X (T indéterminée).

Comme au n°1 , on voit aussitôt qu'une fonction rationnelle sur X s'identifie à une section de O_X au-dessus d'un ouvert dense U , qui ne peut être prolongée à un ouvert strictement plus grand .

Il est clair que tout S-morphisme $X \to Y$ de S-préschémas est une S-application rationnelle .

Lorsque X et Y sont des préschémas sans préschéma de base explicité, une application rationnelle de X dans Y sera une Z-application rationnelle par définition .

Proposition 4 .- Soient X,Y deux S-préschémas ; on suppose X réduit et Y séparé sur S . Soient U_1,U_2 deux ouverts partout denses de X , $f_i : U_i \to Y$ deux S-morphismes ($i=1,2$) tels qu'il existe un ouvert $V \subset U_1 \cap U_2$, dense dans X et dans lequel f_1 et f_2 coïncident . Alors f_1 et f_2 coïncident dans $U_1 \cap U_2$.

On peut évidemment se borner au cas où $X=U_1=U_2$. Comme X est réduit, c'est le plus petit sous-préschéma fermé de X majorant V (§ 3,n°4, prop.9) . Soit alors $g=(f_1,f_2)_S : X \to Y \times_S Y$; comme par hypothèse la diagonale $T=\Delta_Y(Y)$ est un sous-préschéma fermé de $Y \times_S Y$, $Z=g^{-1}(T)$ est un sous-préschéma fermé de X (§ 3,n°2,cor.3 de la prop.5). Si $h : V \to Y$ est la restriction commune de f_1 et f_2 à V , la restriction de g à V est $g'=(h,h)_S$ qui se factorise en $\Delta_Y \circ h$; comme $\Delta_Y^{-1}(T)=Y$, on a $g'^{-1}(T)=V$, et par suite Z est un sous-préschéma fermé de X induisant V , donc majorant V , et cela entraîne Z=X . De la relation $g^{-1}(T)=X$, on déduit que g se factorise en $\Delta_Y \circ f$, où f est un morphisme $X \to Y$, ce qui entraîne $f_1=f_2=f$.

Proposition 5 .- Les hypothèses sur X et Y étant celles de la prop.4, soit U un ouvert partout dense de X et soit $f : U \to Y$ un S-morphisme Il existe alors une S-application rationnelle et une seule $\bar{f}$ de X dans Y prolongeant f .

En effet , comme deux prolongements f_1, f_2 de f à des ouverts U_1, U_2 contenant U coïncident dans $U_1 \cap U_2$, la réunion U_0 des ouverts $V \supset U$ auxquels f est prolongeable est le plus grand ouvert auquel f est prolongeable , et ce prolongement est unique .

Corollaire 1 .- Sous les conditions de la prop.5 , il y a correspondance biunivoque entre les S-morphismes $U \to Y$ et les S-applications rationnelles de X dans Y , définies en tout point de U .

Corollaire 2.- Soient S un schéma , X un S-préschéma réduit , Y un S-préschéma séparé sur S , $f : U \to Y$ un S-morphisme d'une partie ouverte dense de X dans Y . Si $\bar{f}$ est la Z-application rationnelle de X dans Y prolongeant f , $\bar{f}$ est un S-morphisme (et est donc la S-application rationnelle de X dans Y prolongeant f).

En effet , si $p : X \to S$, $q : Y \to S$ sont les morphismes structuraux , il suffit de prouver que $q \circ \bar{f} = p$, ce qui résulte aussitôt de la prop. 4 appliquée à ces deux morphismes du domaine de définition de $\bar{f}$ dans S .

Corollaire 3 .- Soient X,Y deux S-préschémas ; on suppose X réduit , X et Y séparés sur S . Soient $p : Y \to X$ un S-morphisme (faisant de Y un X-préschéma) , U un ouvert partout dense de X , f une U-section de Y ; alors l'application rationnelle $\bar{f}$ de X dans Y prolongeant f est une X-section rationnelle de Y .

Il faut prouver que $p\circ\bar{f}$ est l'identité dans le domaine de définition de $\bar{f}$; puisque X est séparé sur S , cela résulte de la prop.4 .

Pour toute S-application rationnelle de X dans Y , désignons par Cl(f) le pseudo-S-morphisme de X dans Y auquel appartient f .

Proposition 6 .- Sous les hypothèses de la prop.4 , l'application $f \to Cl(f)$ est une bijection de l'ensemble des S-applications rationnelles de X dans Y sur l'ensemble des pseudo-S-morphismes de X dans Y .

Cela résulte aussitôt de la prop.5 .

Sous les conditions envisagées , on identifiera le plus souvent l'ensemble des S-applications rationnelles de X dans Y et l'ensemble des pseudo-S-morphismes de X dans Y , et en particulier les pseudo-fonctions sur X et les fonctions rationnelles sur X .

Soient X, Y deux S-préschémas , X étant supposé réduit et Y séparé sur S . Soient f une S-application rationnelle de X dans Y , et soit x un point de X ; on peut composer f avec le S-morphisme canonique $Spec(O_x) \to X$ pourvu que le domaine de définition de f rencontre l'espace de base de $Spec(O_x)$, identifié à l'ensemble des $z \in X$ tels que $x \in \overline{\{z\}}$. Ceci aura lieu dans les cas suivants :

1° X est irréductible (donc intègre) , car alors x est adhérent au point générique de X .

2° X est localement noethérien ; notre assertion résulte en effet alors du

Lemme 2 .- Soient X un préschéma localement noethérien , x un point de X . Les composantes irréductibles de $Spec(O_x)$ sont les traces sur $Spec(O_x)$ des composantes irréductibles de X contenant x . Pour qu'un ouvert $U \subset X$ soit tel que $U \cap Spec(O_x)$ soit dense dans $Spec(O_x)$, il faut et il suffit qu'il rencontre les composantes irréductibles de

X contenant x (ce qui a lieu en particulier si U est dense dans X) .

La seconde assertion découle évidemment de la première , et il suffit donc de démontrer celle-ci . Comme $\mathrm{Spec}(O_x)$ est contenu dant tout ouvert affine contenant x , on peut supposer X affine et noethérien , d'anneau A . Comme les idéaux premiers de A_x correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de A contenus dans $\mathfrak{j}_x$, les idéaux premiers minimaux de A_x correspondent aux idéaux premiers minimaux de A contenus dans $\mathfrak{j}_x$, d'où le lemme .

Cela étant , supposons que l'on soit dans l'un des deux cas précités si U est le domaine de définition de f , désignons par f' l'application rationnelle de $\mathrm{Spec}(O_x)$ dans Y qui coïncide avec f dans $U \cap \mathrm{Spec}(O_x)$; nous dirons que cette application rationnelle correspond à f .

Proposition 7 .- *Soient S un préschéma localement noethérien , X un S-préschéma réduit , Y un S-préschéma séparé et de type fini sur S . On suppose en outre X irréductible ou noethérien . Soient alors f une S-application rationnelle de X dans Y , x un point de X. Pour que f soit définie au point x , il faut et il suffit que l'application rationnelle f' de $\mathrm{Spec}(O_x)$ dans Y , correspondant à f , soit un morphisme .*

La condition étant évidemment nécessaire (Spec(O_x) étant contenu dans tout ouvert contenant x), prouvons qu'elle est suffisante . D'après le § 4,n°3,prop.15 , il existe un voisinage ouvert U de x dans X et un S-morphisme g de U dans Y , induisant f' sur Spec(O_x) . Si X est irréductible , on peut , en vertu de la prop.5 , supposer que g est une S-application rationnelle , puisque U est dense dans X . En outre , le point générique de X appartient à $\mathrm{Spec}(O_x)$ et au domaine de définition de f , donc f et g coïncident en ce point , et par suite dans un ensemble ouvert non vide de X (§ 4,n°3,prop.15)

Comme f et g sont des S-applications rationnelles , elles coïncident (prop.5) et par suite f est définie en x . Si X est localement noethérien , on peut supposer U noethérien ; il n'y a alors qu'un nombre fini de composantes irréductibles X_i de X contenant x (lemme 2) et on peut supposer que ce sont les seules rencontrant U ; on voit comme ci-dessus que f et g coïncident dans un ensemble ouvert non vide de chacun des X_i . Soit alors f_1 le morphisme défini dans un ouvert dense de $U \cup \complement U$, égal à g dans U et à f dans l'intersection de $\complement U$ et du domaine de définition de f . Comme $U \cup \complement U$ est dense dans X , f_1 et f coïncident dans un ouvert dense de X , donc f est une extension de f_1 (prop.4) et est par suite définie en x .

3 . Faisceau des fonctions rationnelles .

Soit X un préschéma . Pour tout ouvert $U \subset X$, désignons par $R(U)$ l'anneau des pseudo-fonctions sur U (n°1, déf.1) ; c'est une $\Gamma(U, O_X)$-algèbre ; en outre , si $V \subset U$ est un second ouvert de X , toute section de O_X au-dessus d'une partie ouverte partout dense de U donne par restriction à V une section au-dessus d'une partie ouverte partout dense de V , et si deux sections coïncident au-dessus d'une partie ouverte partout dense de U , leurs restrictions à V coïncident au-dessus d'une partie ouverte partout dense de V . On définit

$\rho_{V,U}$: donc ainsi un di- homomorphisme d'algèbres $R(U) \to R(V)$, et il est clair que si $U \supset V \supset W$ sont trois ouverts de X , on a $\rho_{W,U} = \rho_{W,V} \circ \rho_{V,U}$; les $R(U)$ définissent donc un préfaisceau d'algèbres sur X .

Définition 3 .- On appelle faisceau des pseudo-fonctions sur un préschéma X et on désigne par $\underline{R}(X)$ le faisceau d'algèbres associé au préfaisceau formé des $R(U)$.

Lorsque X est réduit, $R(U)$ s'identifie à l'anneau des fonctions rationnelles sur U (n°2, prop. 6) , et on dit alors que $\underline{R}(X)$ est le faisceau des fonctions rationnelles sur X .

Pour tout préschéma X et tout ouvert $U \subset X$, il est clair que le faisceau induit $\underline{R}(X)|U$ n'est autre que $\underline{R}(U)$.

Proposition 8 .- Soit X un préschéma n'ayant qu'un nombre fini de composantes irréductibles X_i $(1 \leq i \leq n)$. Alors le préfaisceau défini par les $R(U)$ est égal au faisceau $\underline{R}(X)$. Ce dernier est quasi-cohérent ; pour tout ouvert $U \subset X$, $\Gamma(U, \underline{R}(X)) = R(U)$ s'identifie canoniquement au composé direct des anneaux locaux des points génériques des X_i telles que $U \cap X_i \neq \emptyset$.

La dernière assertion résulte du n°1, cor. 1 de la prop. 2 . On en déduit aussitôt que le préfaisceau $U \to R(U)$ satisfait à l'axiome (F 1) des faisceaux . Il satisfait aussi à l'axiome (F 2) : en effet , si (V_α) est un recouvrement ouvert d'un ouvert $U \subset X$, et si les $s_\alpha \in R(V_\alpha)$ sont tels que les restrictions de s_α et s_β à $V_\alpha \cap V_\beta$ coïncident pour tout couple d'indices , on en conclut que pour chaque indice i tel que $U \cap X_i \neq \emptyset$, les composantes dans $R(X_i)$ de tous les s_α tels que $V_\alpha \cap X_i \neq \emptyset$ sont les mêmes ; désignant cette composante par s_i , il est clair que l'élément de $R(U)$ ayant les s_i pour composantes a pour restriction s_α à chaque V_α . Pour voir que $\underline{R}(X)$ est quasi-cohérent , on peut se limiter au cas où X est affine , et si x_i est le point générique de X_i et $X = \mathrm{Spec}(A)$, il est immédiat alors que $\underline{R}(X) = \widetilde{M}$, où M est somme directe des A-modules A_{x_i} .

Corollaire 1 .- Si X est irréductible , tout $\underline{R}(X)$-module quasi-cohérent $\underline{F}$ est un faisceau simple .

Il suffit de montrer que tout point de x admet un voisinage U tel que $\underline{F}|U$ soit un faisceau simple (FAC, II, 1, 36, lemme 2), autrement dit on est ramené au cas où X est affine ; on peut en outre supposer que $\underline{F}$ est alors le conoyau d'un homomorphisme $(\underline{R}(X))^{(I)} \to (\underline{R}(X))^{(J)}$, et tout revient donc à voir que $\underline{R}(X)$ est constant , ce qui est évident puisque $\Gamma(U, \underline{R}(X)) = R(X)$ pour tout ouvert non vide U .

Corollaire 2 .- Si X *est irréductible , pour tout* O_X*-Module quasi-cohérent* $\underline{F}$, $\underline{F}\otimes_{O_X}\underline{R}(X)$ *est un faisceau simple ; si en outre* X *est réduit ,* $\underline{F}\otimes_{O_X}\underline{R}(X)$ *est isomorphe à un faisceau de la forme* $(\underline{R}(X))^{(I)}$.

La seconde assertion résulte de ce que $\underline{R}(X)$ est alors un corps.
Si X est irréductible , le faisceau structural O_X est un sous-faisceau de $\underline{R}(X)$, car on définit un homomorphisme injectif $O_X \to \underline{R}(X)$ en faisant correspondre à toute section f de O_X au-dessus d'un ouvert $U \neq \emptyset$ (nécessairement partout dense) la pseudo-fonction Cl(f) correspondante . Pour tout O_X-Module $\underline{F}$, l'homomorphisme précédent définit donc un homomorphisme $\underline{F} = \underline{F}\otimes_{O_X}O_X \to \underline{F}\otimes_{O_X}\underline{R}(X)$, qui sur chaque fibre n'est autre que l'homomorphisme $s \to s\otimes 1$ de $\underline{F}_x$ dans $\underline{F}_x\otimes_{O_x}\underline{R}(X)$. Lorsque X est un préschéma intègre (donc chacun des O_x intègre et $\underline{R}(X)$ égal à son corps des fractions) , on dit que $\underline{F}$ est *sans torsion* si chacun des O_x-modules $\underline{F}_x$ est sans torsion ; alors les homomorphismes précédents sont injectifs , autrement dit :

Corollaire 3 .- Si X *est un préschéma intègre , tout* O_X*-Module quasi-cohérent sans torsion* $\underline{F}$ *est isomorphe à un sous-faisceau d'un faisceau simple de la forme* $(\underline{R}(X))^{(I)}$ *, engendré par ce sous-faisceau (considéré comme* $\underline{R}(X)$*-Module)* .

Le cardinal de I est appelé le *rang* de $\underline{F}$; c'est donc aussi le rang de chacun des O_x-modules $\underline{F}_x$, et aussi le rang de $\Gamma(U,\underline{F})$ en tant que $\Gamma(U,O_X)$-module sur tout ouvert affine $U \neq \emptyset$. En particulier :

Corollaire 4 .- Sur un préschéma intègre X *, tout* O_X*-Module quasi-cohérent sans torsion et de rang 1 est isomorphe à un sous-faisceau de* $\underline{R}(X)$.

Archives
Grothendieck - Sept. 59

§ 6 . Schémas d'anneaux locaux .

1 . Anneaux locaux apparentés .

Pour tout anneau local A , nous désignerons par $\underline{m}(A)$ l'idéal maximal de A .

Lemme 1 .- Soient A,B *deux anneaux locaux tels que* $A\subset B$; *les conditions suivantes sont équivalentes* : (i) $\underline{m}(B)\cap A=\underline{m}(A)$; (ii) $\underline{m}(A)\subset\underline{m}(B)$; (iii) 1 *n'appartient pas à l'idéal de* B *engendré par* $\underline{m}(A)$.

Il est évident que (i) entraîne (ii) et (ii) entraîne (iii) ; enfin si (iii) est vérifiée , $\underline{m}(B)\cap A$ contient $\underline{m}(A)$ et ne contient pas 1 donc est égal à $\underline{m}(A)$.

Lorsque $A\subset B$ et que les conditions équivalentes du lemme 1 sont vérifiées , on dit que B *domine* A . Il est clair que , dans l'ensemble des sous-anneaux locaux d'un anneau R , la relation de domination est une relation d'ordre .

Considérons maintenant un corps R . Pour tout sous-anneau A de R , nous désignerons par $L(A)$ l'ensemble des anneaux locaux $A_{\underline{p}}$, où $\underline{p}$ parcourt le spectre premier de A ; comme $\underline{p}=(\underline{p}A_{\underline{p}})\cap A$, l'application $\underline{p}\to A_{\underline{p}}$ de $\mathrm{Spec}(A)$ dans $L(A)$ est bijective .

Lemme 2 .- Soient R *un corps* , A *un sous-anneau de* R . *Pour qu'un sous-anneau local* M *de* R *domine un anneau* $A_{\underline{p}}\in L(A)$, *il faut et il suffit que* $A\subset M$; *l'anneau local* $A_{\underline{p}}$ *dominé par* M *est alors unique et correspond à* $\underline{p}=\underline{m}(M)\cap A$.

En effet , si M domine $A_{\underline{p}}$, on a $\underline{m}(M)\cap A_{\underline{p}}=\underline{p}A_{\underline{p}}$ d'après le lemme 1 , d'où l'unicité de $\underline{p}$; d'autre part , si $A\subset M$, $\underline{m}(M)\cap A=\underline{p}$ est premier dans A , et comme $A-\underline{p}\subset M$, $A_{\underline{p}}\subset M$ et $\underline{p}A_{\underline{p}}\subset\underline{m}(M)$, donc M domine $A_{\underline{p}}$.

Lemme 3 .- Soient R *un corps* , M,N *deux sous-anneaux locaux de* R , P *le sous-anneau de* R *engendré par* $M\cup N$. *Les conditions suivantes* *sont équivalentes* :

(i) *Il existe un idéal premier* $\underline{p}$ *de* P *tel que* $\underline{m}(M)=\underline{p}\cap M$, $\underline{m}(N)=\underline{p}\cap N$.

(ii) *L'idéal* $\underline{a}$ *engendré dans* P *par* $\underline{m}(M)\cup\underline{m}(N)$ *est distinct de* P .

(iii) *Il existe un sous-anneau local* Q *de* R *dominant à la fois* M *et* N .

Il est clair que (i) implique (ii) ; inversement , si $\underline{a}\neq P$, $\underline{a}$ est contenu dans un idéal maximal $\underline{n}$ de P et comme $1\notin\underline{n}$, $\underline{n}\cap M$ contient $\underline{m}(M)$ et est distinct de M , donc $\underline{n}\cap M=\underline{m}(M)$, et de même $\underline{n}\cap N=\underline{m}(N)$. Il est clair que si Q domine M et N , $P\subset Q$, et $\underline{m}(M)=$ $=\underline{m}(Q)\cap M=(\underline{m}(Q)\cap P)\cap M$, $\underline{m}(N)=(\underline{m}(Q)\cap P)\cap N$, donc (iii) entraîne (i); la réciproque est évidente en prenant $Q=P_{\underline{p}}$.

Lorsque les conditions du lemme 3 sont satisfaites , on dit que les anneaux locaux M et N sont *apparentés* .

Proposition 1 .- Soient A,B *deux sous-anneaux d'un corps* R , C *le sous-anneau de* R *engendré par* $A\cup B$. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Pour tout anneau local* Q *contenant* A *et* B *, on a* $A_{\underline{p}}=B_{\underline{q}}$ *, en posant* $\underline{p}=\underline{m}(Q)\cap A$, $\underline{q}=\underline{m}(Q)\cap B$.

(ii) *Pour tout idéal premier* $\underline{r}$ *de* C , *on a* $A_{\underline{p}}=B_{\underline{q}}$ *en posant* $\underline{p}=\underline{r}\cap A$, $\underline{q}=\underline{r}\cap B$.

(iii) *Si* $M\in L(A)$ *et* $N\in L(B)$ *sont apparentés , ils sont identiques* .

(iv) *On a* $L(A)\cap L(B)=L(C)$.

Les lemmes 2 et 3 prouvent que (i) et (iii) sont équivalentes ; il est clair que (i) entraîne (ii) en l'appliquant à $Q=C_{\underline{r}}$; inversement (ii) entraîne (i) , car si Q contient $A\cup B$, il contient C et si $\underline{r}=$ $=\underline{m}(Q)\cap C$, on a $\underline{p}=\underline{r}\cap A$ et $\underline{q}=\underline{r}\cap B$ d'après le lemme 2 . Il est immédiat que (iv) implique (i) , car si Q contient $A\cup B$, il domine un anneau local $C_{\underline{r}}\in L(C)$ (lemme 2) ; on a par hypothèse $C_{\underline{r}}\in L(A)\cap L(B)$, et les lemmes 1 et 2 prouvent que $C_{\underline{r}}=A_{\underline{p}}=B_{\underline{q}}$. Prouvons enfin que (iii) entraîne (iv) . Soit $Q \in L(C)$; Q domine un $M \in L(A)$ et un $N \in L(B)$ (lemme 2) , donc M et N , étant apparentés , sont identiques par hypothèse . Comme on a alors $C \subset M$, M domine un $Q' \in L(C)$, donc Q domine Q' , ce qui (lemme 2) entraîne nécessairement $Q=Q'=M$, donc $Q \in L(A) \cap L(B)$. Inversement , si $Q \in L(A) \cap L(B)$, on a $C \subset Q$, donc (lemme 2) Q domine un $Q'' \in L(C) \subset L(A) \cap L(B)$; Q et Q'' étant apparentés sont identiques , donc $Q''=Q \in L(C)$, ce qui achève la démonstration .

2 . Anneaux locaux d'un schéma intègre .

Soient X un préschéma intègre , R son corps des fonctions rationnelles , identique à l'anneau local du point générique $\underline{a}$ de X . Pour tout $x \in X$, l'anneau local O_x est intègre ; tout ouvert affine U contenant x contient $\underline{a}$; si A est l'anneau de U, R est le corps des fractions de A (§ 5,n°1, cor.de la prop.1 et n°2 , prop.6) , donc R est aussi l'anneau des fractions de O_x , et on identifie canoniquement O_x à un sous-anneau de R en faisant correspondre à tout germe de section $s \in O_x$ l'unique fonction rationnelle ayant ce germe au point x (toute section ayant pour germe s étant en effet définie sur un ouvert dense de X). Pour tout $f \in R$, le domaine de définition de f (§ 5,n°2,déf.2) n'est autre que l'ensemble ouvert $\delta(f)$ des $x \in X$ tels que $f \in O_x$ (avec l'identification précédente) . Pour tout ouvert $U \subset X$, on a $\Gamma(U,O_X)=\bigcap_{x \in U} O_x$ d'après ce qui précède

<u>Proposition 2 .- Soient</u> X <u>un préschéma intègre</u> , R <u>son corps des fonctions rationnelles . Pour que</u> X <u>soit un schéma , il faut et il suffit que la relation</u> "O_x <u>et</u> O_y <u>sont apparentés</u>" <u>entre points</u> x,y <u>de</u> X <u>implique</u> $x=y$.

Supposons cette condition vérifiée et montrons que X est séparé . Soient U et V deux ouverts affines distincts dans X , A et B leurs anneaux , identifiés à des sous-anneaux de R ; U (resp. V) s'identifie donc à $L(A)$ (resp. $L(B)$) et l'hypothèse entraîne (prop.1) que si C est le sous-anneau de R engendré par $A\cup B$, $W=U\cap V$ s'identifie à $L(A)\cap L(B)=L(C)$. En outre, on sait que tout sous-anneau E de R est égal à l'intersection des anneaux locaux appartenant à $L(E)$; C s'identifie donc à l'intersection des anneaux O_z, où $z\in W$, autrement dit à $\Gamma(W,O_X)$. Considérons alors le sous-préschéma induit par X sur W ; à l'homomorphisme identique $\varphi : C\to\Gamma(W,O_W)$ correspond (§ 2,n°2,prop.3) un morphisme $\Phi=(\psi,\theta) : W\to \mathrm{Spec}(C)$. Nous allons voir que Φ est un <u>isomorphisme</u> de préschémas, d'où résultera que W est un ouvert <u>affine</u>. Soient $T\subset W$ un ouvert affine de X, $E=\Gamma(T,O_X)$ son anneau ; comme T est affine, tout idéal premier de E est de la forme $\underline{m}_x\cap E$, où $x\in T$, et par suite $\varphi^{-1}(\underline{m}_x\cap E)=\underline{m}_x\cap C$. En d'autres termes, $\psi(x)=\underline{m}_x\cap C$ pour tout $x\in W$; si on compose ψ avec l'application $\rho : \mathrm{Spec}(C)\to\mathrm{Spec}(A)=U$ qui, à tout idéal premier $\underline{r}\subset C$, fait correspondre $\underline{r}\cap A$, on voit donc que $\rho\circ\psi$ n'est autre que l'injection canonique $W\to U$, ce qui montre déjà que ψ est <u>injective</u> ; en outre tout idéal premier de C est de la forme $\underline{m}_x\cap C$, où $x\in L(C)=W$, donc ψ est <u>bijective</u>. De plus, θ_x^b est l'injection $C_{\underline{r}}\to O_x$, si $\underline{r}=\underline{m}_x\cap C$; comme $C_{\underline{r}}=O_x$ (prop.1), θ_x^b est bijective pour tout $x\in W$. Il reste à voir que ψ est un homéomorphisme, autrement dit que pour toute partie fermée $F\subset W$, $\psi(F)$ est fermé dans C. Or F est la trace sur W d'un ensemble fermé de U, de la forme $V(\underline{a})$, où $\underline{a}$ est un idéal de A (§ 1,n°1,cor.1 de la prop.2) ; montrons que $\psi(F)=V(C\underline{a})$, ce qui prouvera notre assertion. En effet, les idéaux premiers de C contenant $C\underline{a}$ sont les idéaux premiers de C contenant $\underline{a}$, donc les idéaux de la forme $\psi(x)=\underline{m}_x\cap C$ où $\underline{a}\subset\underline{m}_x$ et $x\in W$; comme $\underline{a}\subset\underline{m}_x$ équivaut à $x\in V(\underline{a})=F$ pour $x\in U$, on a bien $\psi(F)=V(C\underline{a})$.

Il est maintenant immédiat de voir que X est séparé, car $U\cap V$ est affine et son anneau C est engendré par la réunion $A\cup B$ des anneaux fie donc à $L(A)$ (resp. $L(B)$) et l'hypothèse entraîne (prop.1) que si C est le sous-anneau de R engendré par $A\cup B$, $W=U\cap V$ s'identifie à $L(A)\cap L(B)=L(C)$. En outre, on sait que tout sous-anneau E de R est égal à l'intersection des anneaux locaux appartenant à $L(E)$; C s'identifie donc à l'intersection des anneaux O_z, où $z\in W$, autrement dit à $\Gamma(W,O_X)$. Considérons alors le sous-préschéma induit par X sur W ; à l'homomorphisme identique $\varphi : C\to\Gamma(W,O_W)$ correspond (§ 2,n°2,prop.3) un morphisme $\Phi=(\psi,\theta) : W\to\mathrm{Spec}(C)$. Nous allons voir que Φ est un <u>isomorphisme</u> de préschémas, d'où résultera que W est un ouvert <u>affine</u>. Soient $T\subset W$ un ouvert affine de X, $E=\Gamma(T,O_X)$ son anneau ; comme T est affine, tout idéal premier de E est de la forme $\mathfrak{m}_x\cap E$, où $x\in T$, et par suite $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_x\cap E)=\mathfrak{m}_x\cap C$. En d'autres termes, $\psi(x)=\mathfrak{m}_x\cap C$ pour tout $x\in W$; si on compose ψ avec l'application $\rho : \mathrm{Spec}(C)\to\mathrm{Spec}(A)=U$ qui, à tout idéal premier $\mathfrak{r}\subset C$, fait correspondre $\mathfrak{r}\cap A$, on voit donc que $\rho\circ\psi$ n'est autre que l'injection canonique $W\to U$, ce qui montre déjà que ψ est <u>injective</u> ; en outre tout idéal premier de C est de la forme $\mathfrak{m}_x\cap C$, où $x\in L(C)=W$, donc ψ est <u>bijective</u>. De plus, $\theta_x^\flat$ est l'injection $C_{\mathfrak{r}}\to O_x$, si $\mathfrak{r}=\mathfrak{m}_x\cap C$; comme $C_{\mathfrak{r}}=O_x$ (prop.1), $\theta_x^\flat$ est bijective pour tout $x\in W$. Il reste à voir que ψ est un homéomorphisme, autrement dit que pour toute partie fermée $F\subset W$, $\psi(F)$ est fermé dans C. Or F est la trace sur W d'un ensemble fermé de U, de la forme $V(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de A (§ 1,n°1,cor.1 de la prop.2) ; montrons que $\psi(F)=V(C\mathfrak{a})$, ce qui prouvera notre assertion. En effet, les idéaux premiers de C contenant $C\mathfrak{a}$ sont les idéaux premiers de C contenant $\mathfrak{a}$, donc les idéaux de la ~~forme~~ $\psi(x)=\mathfrak{m}_x\cap C$ où $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{m}_x$ et $x\in W$; comme $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{m}_x$ équivaut à $x\in V(\mathfrak{a})=F$ pour $x\in U$, on a bien $\psi(F)=V(C\mathfrak{a})$.

Il est maintenant immédiat de voir que X est séparé, car $U\cap V$ est affine et son anneau C est engendré par la réunion $A\cup B$ des anneaux de U et V (§ 3,n°6,prop.20).

Inversement, supposons X séparé, et soient x,y deux points de X tels que O_x et O_y soient apparentés. Soit U (resp. V) un ouvert affine contenant x (resp. y), d'anneau A (resp. B) ; on sait alors que $U \cap V$ est affine, et que son anneau C est engendré par A et B (§ 3,n°6,prop.20). Si $\underline{p}=\underline{m}_x \cap A$, $\underline{q}=\underline{m}_y \cap B$, on a $A_{\underline{p}}=O_x$, $B_{\underline{q}}=O_y$, et comme $A_{\underline{p}}$ et $B_{\underline{q}}$ sont apparentés, il existe un idéal premier $\underline{r}$ de C tel que $\underline{p}=\underline{r} \cap A$, $\underline{q}=\underline{r} \cap B$ (n°1,lemme 3). Mais alors il existe un point $z \in U \cap V$ tel que $\underline{r}=\underline{m}_z \cap C$, puisque $U \cap V$ est affine, et on a évidemment x=z et y=z, d'où x=y.

Corollaire 1.- Soient X *un schéma intègre, x,y deux points de* X. *Pour que* $x \in \overline{\{y\}}$, *il faut et il suffit que* $O_x \subset O_y$, *autrement dit que toute fonction rationnelle définie en x soit définie en* y.

La condition est évidemment nécessaire puisque $\delta(f)$ est ouvert pour toute fonction rationnelle $f \in R$; montrons qu'elle est suffisante. Si $O_x \subset O_y$, il existe un idéal premier $\underline{p}$ de O_x tel que O_y domine $(O_x)_{\underline{p}}$ (n°1,lemme 2) ; or (§ 2,n°2,prop.4) il existe $z \in X$ tel que $x \in \overline{\{z\}}$ et que $O_z=(O_x)_{\underline{p}}$; comme O_z et O_y sont apparentés, on a z=y par la prop.2, d'où le corollaire.

Corollaire 2.- Si X *est un schéma intègre, l'application* $x \to O_x$ *est injective ; autrement dit, si* x,y *sont deux points distincts de* X, *il existe une fonction rationnelle définie en l'un de ces points et non en l'autre.*

Cela résulte du cor.1 et de l'axiome (T_0).

Corollaire 3.- Soit X *un schéma intègre dont l'espace de base est noethérien ; lorsque f parcourt le corps* R *des fonctions rationnelles sur* X, *les* $\delta(f)$ *forment une base de la topologie de* X.

En effet, toute partie fermée de X est alors réunion finie d'ensembles fermés irréductibles, c'est-à-dire de la forme $\overline{\{y\}}$ (§ 2,n°1, prop.1). Or , si $x \notin \overline{\{y\}}$, il existe une fonction rationnelle f définie en x et non en y (cor.1) , autrement dit on a $x \in \delta(f)$ et $\delta(f)$ ne rencontre pas $\overline{\{y\}}$. Le complémentaire de $\overline{\{y\}}$ est par suite réunion d'ensembles de la forme $\delta(f)$, et en vertu de la première remarque, tout ouvert de X est réunion d'intersections finies d'ensembles de la forme $\delta(f)$.

Le cor.3 montre que la topologie de X est entièrement caractérisée par la donnée de la famille d'anneaux locaux $(O_x)_{x \in X}$ ayant R pour corps des fractions ; il revient au même d'ailleurs de dire que les parties fermées de X sont définies de la façon suivante : étant donnée une partie finie $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de X , on considère l'ensemble des $y \in X$ tels que $O_y \subset O_{x_i}$ pour un indice i au moins , et ces ensembles (pour tous les choix de la partie finie $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de X) sont les ensembles fermés de X . En outre , une fois connue la topologie de X , le faisceau structural O_X est aussi bien déterminé par la famille des O_x , puisque $\Gamma(U,O_X)=\bigcap_{x\in U} O_x$. La famille $(O_x)_{x \in X}$ détermine donc complètement le préschéma X lorsque X est un schéma intègre d'espace de base noethérien .

On dit qu'un morphisme $f : X \to Y$ de préschémas est <u>dominant</u> si $f(X)$ est <u>dense</u> dans Y .

<u>Proposition 3 .- Soient</u> X,Y <u>deux schémas intègres</u> , $f : X \to Y$ <u>un morphisme dominant</u> , K (resp. L) <u>le corps des fonctions rationnelles de</u> X (resp. Y) . <u>Alors</u> L <u>s'identifie à un sous-corps de</u> K<u>, et pour tout</u> $x \in X$; $O_{f(x)}$ <u>est l'unique anneau local de</u> Y <u>dominé par</u> O_x .

En effet , soit $f=(\psi,\theta)$; si a est le point générique de X , on a $\psi(X) \subset \overline{\{\psi(a)\}}$, et comme par hypothèse $\psi(X)$ est dense dans Y , on voit que $Y=\overline{\{\psi(a)\}}$, autrement dit $\psi(a)$ est le point générique de Y ; $\theta_a^\flat$ est par suite un monomorphisme de $L=O_{\psi(a)}$ dans $K=O_a$. Comme tout ouvert affine de Y contient

$\psi(a)$, il résulte de la prop.3 du § 2,n°2 que pour tout ouvert affine U de Y, l'homomorphisme de $\Gamma(U,O_Y)$ dans $\Gamma(\psi^{-1}(U),O_X)$ correspondant à f est la restriction de θ_a^b à $\Gamma(U,O_Y)$. Donc, pour tout $x \in X$, θ_x^b est la restriction à $O_{\psi(x)}$ de θ_a^b, et est par suite un monomorphisme ; on sait en outre, par définition d'un morphisme, que l'image réciproque par θ_x^b de l'idéal minimal de $O_{\psi(x)}$ est l'idéal minimal de O_x, et par suite, si on identifie L à un sous-corps de K par θ_a^b, $O_{\psi(x)}$ est dominé par O_x (n°1, lemme 1) ; c'est d'ailleurs le seul anneau local de Y dominé par O_x, puisque deux anneaux locaux de Y qui sont apparentés sont identiques (prop.2).

<u>Proposition 4 .- Soient</u> X <u>un préschéma irréductible</u>, f : $X \to Y$ <u>une immersion locale</u> (resp. <u>un isomorphisme local) ; on suppose en outre le morphisme f séparé. Alors f est une immersion</u> (resp. <u>une immersion ouverte</u>).

Soit $f=(\psi,\theta)$; il suffit de prouver, dans les deux cas, que ψ est un homéomorphisme de X sur $\psi(X)$; l'hypothèse entraînera alors que $\psi(X)$ est localement fermé (resp. ouvert) dans Y et que f est une immersion (resp. une immersion ouverte) (cf. § 3,n°3,déf.3). Remplaçant f par f_{red} (§ 3,n°4,prop.10), on peut supposer X et Y <u>réduits</u>. En outre, par hypothèse, pour tout $x \in X$, il y a un voisinage ouvert U de x et un voisinage ouvert V de $\psi(x)$ tel que la restriction de f à U s'écrive $j\circ g$, où g est un isomorphisme du préschéma induit sur U, sur un sous-préschéma fermé Z du préschéma induit sur V et j l'injection canonique de Z dans V. Si Y' est le plus petit sous-préschéma de Y ayant $\overline{\psi(X)}$ comme espace de base (§ 3,n°4, prop.9), il est clair que Y' <u>majore</u> Z, puisque $\overline{\psi(X)}\cap V$ est l'espace de base de Z. Donc le morphisme f est majoré par le morphisme d'injection $Y' \to Y$; en outre l'hypothèse que f est une immersion ouverte et que X est réduit, entraîne que le préschéma induit par Y' sur $\overline{\psi(X)}\cap V=\psi(X)\cap V$ est identique à Z (§ 3, n°4, prop.9) ; f est par suite le composé d'une immersion locale (resp. d'un isomorphisme local) de X dans Y' et de l'injection canonique $Y'\rightarrow Y$, et on peut donc se réduire au cas où Y=Y' , autrement dit au cas où f est *dominant* . Si a est le point générique de X , $\overline{\{\psi(a)\}}$ contient alors $\psi(X)$, et est donc identique à Y , autrement dit Y est irréductible . On est ainsi ramené au cas où X et Y sont tous deux *intègres* . En outre , la question étant locale sur Y , on peut supposer Y affine , donc un schéma ; comme f est supposé séparé (tenant compte de § 3, n°6, prop.21) et cor. 4 de la prop.20) , on en conclut que X est aussi un schéma (§ 3, n°6, cor.2 de la prop.20) , et on est ainsi dans les conditions d'application de la prop.3 . Pour tout $x\in X$, θ_x^b est donc injectif ; mais l'hypothèse que f est une immersion locale implique que θ_x^b est *surjectif* (§ 3, n°2, prop.4) , donc θ_x^b est bijectif , autrement dit $O_{\psi(x)}=O_x$ (avec l'identification de la prop.3) . Cela implique donc que ψ est une application *injective* (cor.2 de la prop.2) ; comme , avec les notations introduites plus haut , et l'hypothèse Y'=Y , on a vu que $\psi(U)=\psi(X)\cap V$ et que la restriction de ψ à U est par hypothèse un homéomorphisme de U sur $\psi(U)$, on en conclut bien que est un homéomorphisme de X sur $\psi(X)$.

3 . Les schémas de Chevalley .

Soient X un schéma noethérien intègre , R son corps de fonctions rationnelles ; désignons par X' l'ensemble des sous-anneaux locaux O_x de R $(x\in X)$. L'ensemble X' vérifie les trois conditions suivantes :

(Sch 1) *Pour tout* $M\in X'$, R *est le corps des fractions de* M .

(Sch 2) *Il existe un ensemble fini de sous-anneaux noethériens* A_i *de* R *tels que* $X'=\bigcup_i L(A_i)$ *et que , pour tout couple d'indices* i,j *, le sous-anneau* A_{ij} *de* R *engendré par* $A_i\cup A_j$ *soit de type fini sur* A_i

(Sch 3) <u>Deux éléments</u> M, N <u>de</u> X' <u>qui sont apparentés sont identiques</u> .

On a en effet vu au début du n°2 que (Sch 1) est satisfaite , et (Sch 3) résulte de la prop.2 du n°2 . Pour démontrer (Sch 2) , il suffit de recouvrir X par un nombre fini d'ouverts affines U_i d'anneaux noethériens et de prendre $A_i = \Gamma(U_i, O_X)$; l'hypothèse que X est un schéma entraîne alors que $U_i \cap U_j$ est affine et que $\Gamma(U_i \cap U_j, O_X) = A_{ij}$ (§ 3,n°6,prop.20) ; en outre , comme $U_i \cap U_j \rightarrow U_i$ est une immersion ouverte , c'est un morphisme de type fini (§ 4,n°2,prop.7) donc A_{ij} est une algèbre de type fini sur A_i (§ 4,n°2,prop.6).

Les structures dont les axiomes sont (Sch 1),(Sch 2),(Sch 3) généralisent les "schémas" au sens de C.Chevalley , qui suppose en outre que R est une extension de type fini d'un sous-corps K et que les A_i sont des K-algèbres de type fini (Sém.Cartan-Chevalley ,1955-56). Inversement , si on a une telle structure sur un ensemble X' , on peut lui associer un schéma intègre X en utilisant les remarques suivant le cor.3 de la prop.2 du n°2 : l'espace de base de X est égal à X' , muni de la topologie caractérisée comme il a été dit dans ces remarques , et du faisceau O_X tel que $\Gamma(U, O_X) = \bigcap_{x \in U} O_x$ pour tout ouvert $U \subset X$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'on obtient bien ainsi un schéma intègre , dont les anneaux locaux sont les éléments de X' ; nous n'utiliserons pas ce résultat par la suite .

Archives Grothendieck - Sept 89

§ 7 . Théorie de la dimension . Ensembles constructibles .

Pour l'essentiel , ce paragraphe ne fait que reprendre , dans un langage plus géométrique , des faits bien connus en théorie de la dimension pour les anneaux commutatifs . Font exception les th. 2 et 3 empruntés au Séminaire Cartan-Chevalley 1955-56 . Sauf au chap. III, § 2, n° et ~~§XIII~~ § 3 , n° , nous n'utiliserons pas les résultats de ce paragraphe avant le chap. IV .

1 . Dimension combinatoire d'un espace topologique .

Soit I un ensemble ordonné ; une *chaîne* d'éléments de I est par définition une suite finie strictement croissante $i_0 < i_1 < \ldots < i_n$ d'éléments de I ; par définition , la *longueur* de cette suite est n . Si X est un espace topologique , l'ensemble de ses parties fermées *irréductibles* est ordonné par inclusion, d'où la notion de chaîne de parties fermées irréductibles .

Définition 1 .- Soit X *un espace topologique . On appelle dimension combinatoire de* X (ou simplement *dimension de* X s'il n'y a pas de confusion) *et on note* dimc(X) , *ou simplement* dim(X) , *la borne supérieure des longueurs des chaînes de parties fermées irréductibles de X. Pour tout* $x \in X$, *on appelle dimension combinatoire de* X *en* x , *et on note* $\dim_x(X)$ *le nombre* $\inf_U(\dim(U))$, *où* U *parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de* x *. On dit que* X *est équidimensionnel si toutes les composantes irréductibles de* X *ont même dimension* .

Définition 2 .- Etant donnée une partie fermée irréductible Y *d'un espace topologique* X , *on appelle codimension combinatoire* (ou simplement *codimension*) *de* Y *dans* X *la borne supérieure des longueurs des chaînes de parties fermées irréductibles de* X , *dont* Y *est le plus petit élément ; on la note* $\operatorname{codim}_X(Y)$. *Si* Y *est une partie fermée quelconque de* X , *on appelle codimension combinatoire de* Y *dans* X, *et on note encore* $\operatorname{codim}_X(Y)$ *la borne inférieure des codimensions dans* les composantes irréductibles de Y .

Proposition 1 .- (i) Si Y est une partie d'un espace topologique X , $\dim(Y) \leqslant \dim(X)$.

(ii) Si un espace topologique X est réunion finie de parties fermées X_i , alors $\dim(X)=\sup_i(\dim(X_i))$.

Pour toute partie irréductible Z fermée dans Y , l'adhérence $\bar{Z}$ de Z dans X est irréductible ; d'où (i) . Si $X=\bigcup_i X_i$, les X_i étant fermés , toute chaîne de parties fermées irréductibles de X est nécessairement contenue dans l'un des X_i , ce qui prouve (ii) . On notera que si f est une application continue de X dans un espace topologique Y , on peut avoir $\dim(f(X)) > \dim(X)$; on en a un exemple en prenant pour X un espace discret à 2 éléments a, b , pour Y l'ensemble $\{a,b\}$ muni de la topologie dans laquelle $\emptyset$, $\{a\}$ et $\{a,b\}$ sont les seuls ensembles fermés; si f est l'application identique $X \to Y$, $\dim Y=1$ et $\dim X=0$.

Corollaire .- Soient x X , U un voisinage de x, Y_i $(1 \leq i \leqslant n)$ des parties fermées de U telles que $x \in Y_i$ pour $1 \leq i \leqslant n$ et que U soit la réunion des Y_i . Alors $\dim_x X=\sup_i(\dim_x(Y_i))$.

En effet , d'après la prop.1 , $\dim_x(X)=\inf_V(\sup_i(\dim(Y_i \cap V)))$ lorsque V parcourt l'ensemble des voisinages ouverts de x contenus dans U . Le corollaire est évident si $\sup_i(\dim_x(Y_i))=+\infty$; sinon , il y a un voisinage V_0 de x tel que $\dim(Y_i \cap V)=\dim_x(Y_i)$ pour tout i et tout $V \subset V_0$.

Proposition 2 .- (i) Soit Φ l'ensemble des parties fermées irréductibles de X . On a $\dim(X)=\sup_{Y \in \Phi}(\operatorname{codim}_X(Y))$.

(ii) On a $\dim(X)= \sup_{x \in X} \dim_x(X)$.

(i) découle aussitôt des déf.1 et 2 . La relation

D'autre part, si $Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n$ est une chaîne de parties fermées irréductibles de X et si $x \in Z_0$, pour tout ouvert $U \subset X$ contenant x, $U \cap Z_i$ est irréductible et fermé dans U, et comme $\overline{U \cap Z_i} = Z_i$, les $U \cap Z_i$ sont distincts ; donc $\dim(U) \geqslant n$, ce qui démontre (ii).

Corollaire 1.- Si (U_α) est un recouvrement ouvert de X, on a $\dim(X) = \sup_\alpha(\dim(U_\alpha))$.

Corollaire 2.- Soit X un espace noethérien vérifiant l'axiome (T_0), et soit F l'ensemble des points fermés de X. Alors $\dim(X) = \sup_{x \in F}(\dim_x(X))$

Avec les notations de la démonstration de la prop. 2 (ii), il suffit d'observer qu'il existe dans Z_0 un point fermé (§ 4, n°1, lemme 1).

Corollaire 3.- Soit Y une/ partie fermée de X. Alors

$$(1) \qquad \dim(Y) + \operatorname{codim}_X(Y) \leqslant \dim(X).$$

Toute chaîne de parties fermées irréductibles de Y étant contenue dans une composante irréductible de Y, on est ramené (par la déf. 2) au cas où Y est irréductible, et (1) est alors conséquence des définitions 1 et 2.

Corollaire 4.- Soient Y, Z, T trois parties fermées irréductibles de X telles que $Y \subset Z \subset T$. Alors

$$(2) \qquad \operatorname{codim}_T(Y) \geqslant \operatorname{codim}_Z(Y) + \operatorname{codim}_T(Z).$$

C'est une conséquence immédiate de la déf. 2.

Proposition 3.- Soit X un espace noethérien vérifiant l'axiome (T_0). Pour que $\dim(X)=0$, il faut et il suffit que X soit fini et discret. Pour qu'une partie fermée Y de X soit de codimension nulle dans X, il faut et il suffit que Y contienne une composante irréductible de X.

La seconde assertion est immédiate (et indépendante de toute hypothèse sur X). De même, si X est séparé (et a fortiori discret), il est clair que $\dim(X)=0$, les seuls ensembles fermés irréductibles étant les points. Inversement, si X est noethérien et satisfait à (T_0), toute composante irréductible de X contient un point fermé (§ 4, n°1, lemme 1) donc doit être réduite à ce point si $\dim(X)=0$; le nombre de ces composantes étant fini , X est fini et discret .

<u>Corollaire 1 .- Soit</u> ~~XX~~ X <u>un espace noethérien vérifiant</u> (T_0) . <u>Pour que</u> $\dim_x(X)=0$, <u>il faut et il suffit que x soit isolé</u> .

La condition est évidemment suffisante (sans hypothèse sur X) . Elle est nécessaire , car il en résulte que $\dim(U)=0$ pour un voisinage ouvert U de x , et comme U est noethérien et vérifie (T_0) , U est fini et discret .

<u>Corollaire 2 .- Soit</u> X <u>un espace irréductible . Pour qu'une partie fermée</u> Y <u>de</u> X <u>soit telle que</u> $\operatorname{codim}_X(Y)=0$, <u>il faut et il suffit que</u> $Y=X$.

Nous dirons qu'une chaîne $Z_0\subset Z_1\subset\ldots\subset Z_n$ de parties fermées irréductibles est <u>saturée</u> s'il n'existe pas de partie fermée irréductible Z' distincte des Z_i et telle que $Z_k\subset Z'\subset Z_{k+1}$ pour un ~~XX~~ indice k.

<u>Proposition 4 .- Soit</u> X <u>un espace topologique tel que , pour deux parties fermées irréductibles</u> $Y\subset Z$ <u>de</u> X , <u>on ait</u> $\operatorname{codim}_Z(Y)<+\infty$.<u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) <u>Deux chaînes saturées de parties fermées irréductibles de</u> X , <u>ayant mêmes extrémités</u> , ~~XXX~~ <u>ont même longueur</u> .

b) <u>Si</u> Y,Z,T <u>sont trois parties fermées irréductibles de</u> X <u>telles que</u> $Y\subset Z\subset T$, <u>on a</u>

$$\operatorname{codim}_T(Y)=\operatorname{codim}_Z(Y)+\operatorname{codim}_T(Z) . \tag{3}$$

Il est immédiat que a) entraîne b) . Réciproquement , supposons b) vérifié , et démontrons ~~XX~~ que si deux chaînes saturées de mêmes extrémités ont pour longueurs m et $n\leq m$, on a nécessairement $m=n$. Raisonnons par récurrence sur n , la proposition étant évidente pour $n=1$. Supposons donc $n>1$, $n<m$, et soit $Z_0\subset Z_1\subset\ldots\subset Z_n$ une chaîne saturée ~~XX~~ telle qu'il existe une autre chaîne saturée d'extrémités Z_0,Z_n et de longueur m . Comme $\operatorname{codim}_{Z_n}(Z_0)\geq m>n$, ~~XX~~ et que

$\mathrm{codim}_{Z_1}(Z_0)=1$, il résulte de b) que $\mathrm{codim}_{Z_n}(Z_1)=\mathrm{codim}_{Z_n}(Z_0)-1>n-1$ ce qui contredit l'hypothèse de récurrence .

Lorsque les conditions de la prop.4 sont remplies , on dit que X satisfait à la condition des chaînes .

Proposition 5 .- Soit X un espace noethérien , de dimension finie , vérifiant l'axiome (T_0) . Les conditions suivantes sont équivalentes:

a) Deux chaînes maximales de parties fermées irréductibles de X ont même longueur .

b) ~~[illegible]~~ (X est équidimensionnel), les points fermés de X ont même codimension , et X satisfait à la condition des chaînes .

c) ~~[illegible]~~ X est équidimensionnel et pour deux parties fermées irréductibles $Y\subset Z$ de X , on a

(4) $$\dim(Z)=\dim(Y)+\mathrm{codim}_Z(Y) .$$

d) Les codimensions des points fermés de X sont les mêmes , et pour deux parties fermées irréductibles $Y\subset Z$ de X , on a

(5) $$\mathrm{codim}_X(Y)=\mathrm{codim}_Z(Y)+\mathrm{codim}_X(Z) .$$

Les hypothèses sur X entraînent que les extrémités d'une chaîne maximale de parties fermées irréductibles sont nécessairement une composante irréductible de X et un point fermé ; en outre , toute chaîne saturée d'extrémités ~~[illegible]~~ Y et Z $(Y\subset Z)$ est contenue dans une chaîne maximale dont les éléments autres que ceux de la chaîne donnée sont ou bien contenus dans Y ou bien contiennent Z . Ces remarques établissent aussitôt l'équivalence de a) et b), et prouvent aussi que si a) est vérifiée , pour toute partie fermée irréductible Y de X , on a

(6) $$\dim(Y)+\mathrm{codim}_X(Y)=\dim(X) ,$$

et comme (3) a aussi lieu , (4) et (5) s'en déduisent aussitôt . Inversement , (4) entraîne (3) , donc la condition des chaînes (prop.4) et en outre , en appliquant (4) pour ~~[illegible]~~ Y ~~[illegible]~~ réduit à un point fermé x) et Z égal à une composante irréductible de X, on obtient $\mathrm{codim}_X(x)=\dim(Z)$; on en conclut que c) entraîne b). De même, (5) entraîne (3), donc la condition des chaînes ; avec le même choix de Y et Z que ci-dessus, on a encore, d'après (6), $\mathrm{codim}_X(x)=\dim X$, donc (puisque toute composante irréductible de X contient un point fermé), d) entraîne b).

Lorsque les conditions de la prop.5 sont remplies, on dit que X est <u>strictement équidimensionnel</u>.

<u>Corollaire.- Si</u> X <u>est strictement équidimensionnel, il en est de même de toute réunion de composantes irréductibles de</u> X ; <u>en outre, pour toute partie fermée</u> Y <u>de</u> X, <u>on a la relation</u> (6).

La première assertion découle aussitôt de la prop.5. D'autre part, (6) a lieu pour toute composante irréductible Y_i de Y, donc celle des Y_i pour laquelle $\dim(Y_i)$ est le plus grand est aussi celle pour laquelle $\mathrm{codim}_X(Y_i)$ est le plus petit, donc (6) est vrai par définition de $\dim(Y)$ et de $\mathrm{codim}_X(Y)$.

<u>Remarque</u>.- Le lecteur remarquera que les démonstrations des prop.4 et 5 s'appliquent à un ensemble ordonné quelconque (le fait que les éléments de cet ensemble sont des parties fermées irréductibles d'un espace topologique n'intervient pas).

<u>2. Dimension des préschémas</u>.

Compte tenu des déf.1 et 2 du n°1, les définitions classiques de la <u>dimension</u> d'un anneau commutatif et du <u>rang</u> d'un idéal dans un tel anneau équivalent aux suivantes :

<u>Définition 3.- Soient</u> A <u>un anneau commutatif. On appelle dimension de</u> A <u>la dimension de</u> Spec(A) ; <u>si</u> I <u>est un idéal de</u> A, <u>on appelle rang de</u> I et on note rg(I) <u>la codimension de</u> $V(I)$ <u>dans</u> Spec(A). <u>On dit que</u> A <u>satisfait à la condition des chaînes</u> (resp. <u>est équidimensionnel</u>, <u>strictement équidimensionnel) si</u> Spec(A) <u>satisfait à la condition</u>

des chaînes (resp. *est équidimensionnel, strictement équidimensionnel*).

On observera que dans un préschéma X, la relation d'inclusion entre parties fermées irréductibles est identique à l'opposée de la relation $x\in\overline{\{y\}}$ entre points de X (§ 2, n°1, prop. 1).

Proposition 6.- Soient X *un préschéma*, Y *une partie fermée irréductible de* X ; *on a*

(7) $$\operatorname{codim}_X(Y)=\dim(O_{X/Y}) .$$

En effet, soit y le point générique de Y, U un ouvert affine contenant y ; comme toute partie fermée irréductible de X contenant y est contenue dans U, il y a correspondance biunivoque entre ces parties et leurs traces sur U. On peut par suite supposer X affine, et la relation (7) résulte alors de la correspondance biunivoque entre idéaux premiers de $A=\Gamma(X,O_X)$ contenus dans $\mathfrak{j}_y$, et idéaux premiers de $O_y=O_{X/Y}$.

Corollaire 1.- Pour que le préschéma X *satisfasse à la condition des chaînes, il faut et il suffit que chacun des anneaux locaux* O_x ($x\in X$) *vérifie cette condition ; si de plus* X *est localement noethérien, il suffit que la condition des chaînes soit vérifiée par les* O_x *correspondant aux points fermés de* X.

En effet, par définition de la condition des chaînes (n°1) et en vertu de la correspondance biunivoque entre parties fermées irréductibles et points de X, on voit aussitôt que pour vérifier la condition des chaînes dans X, il suffit de le faire dans chacun des préschémas locaux $\mathrm{Spec}(O_x)$ (§ 2, n°2) ; si de plus X est localement noethérien, pour tout point x il existe un point fermé y tel que $y\in\overline{\{x\}}$ donc $x\in\mathrm{Spec}(O_y)$, d'où la seconde assertion du corollaire.

Corollaire 2.- Pour tout préschéma X, *on a* $\dim(X)=\sup_{x\in X}(\dim(O_x))$; *si de plus* X *est localement noethérien et si* F *est l'ensemble des* points fermés de X , alors $\dim(X)=\sup_{x\in F}(\dim(O_x))$.

Il suffit de remarquer que toute chaîne de parties fermées irréductibles de X correspond aux points contenus dans un même schéma local (resp. dans le schéma local d'un point fermé si X est localement noethérien) .

Rappelons maintenant que si A est un anneau local noethérien , ~~XXXX~~ dim(A) est ~~XXXXXX~~ égale au nombre minimum de générateurs d'un idéal de définition de A (   ) ; pour tout anneau noethérien A , la dimension de A est évidemment finie , et pour tout idéal premier $\underline{p}$ A , le rang de $\underline{p}$, égal à $\dim(A_{\underline{p}})$ est aussi fini . Par suite :

Corollaire 3 .- Pour tout préschéma localement noethérien X et toute partie fermée irréductible Y , $\operatorname{codim}_X(Y)$ est finie . Si en outre X est affine , $\operatorname{codim}_X(Y)$ est égal au nombre minimum de sections de O_X au-dessus de X telles que Y soit une composante irréductible de l'ensemble des $x\in X$ où ces sections "s'annulent" simultanément .

Remarque .1) Un anneau local noethérien ne vérifie pas nécessairement la condition des chaînes (Nagata, On the chain problem of prime ideals Nagoya Math.Journal, 10 (1956)) ; voir aussi Nagata , Note on a chain condition of prime ideals , à paraître dans Kyoto J. Math.) .

2) On dit qu'un préschéma X est régulier si tous les anneaux locaux O_x ($x\in X$) sont réguliers ; un tel préschéma est donc réduit et ses composantes irréductibles sont intègres puisque les O_x sont intègres (   ) . Un tel préschéma vérifie la condition des chaînes ; ~~car~~ en effet (cor. 1 de la prop. 6) il en est ainsi de tout anneau local régulier (J.P. Serre,   ).

On dira qu'un anneau A est régulier si Spec(A) est régulier . Comme la condition des chaînes se conserve évidemment par passage à un anneau quotient , les quotients d'anneaux réguliers vérifient cette condition. On sait que les anneaux noethériens qui interviennent en Géométrie algébrique ou en Arithmétique sont tous de cette nature .

On notera qu'un anneau régulier A n'est pas nécessairement strictement équidimensionnel, autrement dit (prop.5) les codimensions des divers points fermés de $X=\mathrm{Spec}(A)$ ne sont pas nécessairement les mêmes. Par exemple, soient B un anneau de valuation discrète, (π) son idéal maximal, k son corps résiduel, K le corps des fractions de B ; soit A l'anneau de polynômes à une indéterminée $B[T]$. Il y a dans A des idéaux maximaux de rang 2, par exemple $(\pi)+(T)$; mais il y a aussi des idéaux maximaux de rang 1, par exemple l'idéal principal $(\pi T-1)$, dont l'anneau local complété est $\hat{K}[[T]]$.

Si k est un corps, A une algèbre intègre de type fini sur k, $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A, on sait que la dimension de $A_{\mathfrak{m}}$ est égale au degré de transcendance $\mathrm{deg.tr.}_k K$ sur k du corps des fractions K de A. Comme A est quotient d'un anneau régulier, il vérifie la condition des chaînes et est par suite (prop.5) strictement équidimensionnel. D'où :

Proposition 7.- Si X est un préschéma algébrique irréductible sur un corps k, de point générique z, alors X est strictement équidimensionnel et de dimension égale à $\mathrm{deg.tr.}_k\, \kappa(z)$.

On peut en effet se borner au cas où X est réduit (les dimensions de X et de X_{red} étant évidemment les mêmes), et appliquer la remarque précédente à tout ouvert affine U de X (qui contient nécessairement z, donc est un schéma intègre admettant z comme point générique). Cette démonstration prouve en outre :

Corollaire 1.- Sous les conditions de la prop.7, la dimension de X est égale à celle de toute partie ouverte non vide de X.

Il convient de noter que cette dernière propriété n'est pas valable pour tous les préschémas intègres, même strictement équidimensionnels. Par exemple si B est un anneau de valuation discrète, $\mathfrak{p}$

son idéal maximal , X=Spec(B) a deux points , (0) et $\underline{p}$, ce dernier étant le seul point fermé ; on a dim(X)=1 mais dim{0}=0 .

<u>Corollaire 2 .- Soit</u> X <u>un préschéma algébrique sur un corps k . Pour tout point</u> x X , <u>on a</u> $\dim_x(X)=\sup_i(\dim(X_i))$, <u>où</u> X_i <u>parcourt l'ensemble des composantes irréductibles de</u> X <u>contenant</u> x . <u>Si</u> {x} <u>est fermé on a</u> $\dim_x X=\operatorname{codim}_X x=\dim(O_x)$.

En effet , pour tout ouvert U contenant ~~XX~~ x , on a (n°1, cor. de la prop.1) $\dim_x(X)=\sup_i(\dim_x(X_i))$ et ~~XXXXX~~ d'après le cor.1 , $\dim_x(X_i)=$ $=\dim(X_i)$. D'autre part , si {x} est fermé , comme toute chaîne de parties fermées irréductibles contenant x est contenue dans l'un des X_i , on a $\operatorname{codim}_X(x)=$ $=\sup_i(\operatorname{codim}_{X_i}(x))$, et en vertu de la formule (6) (applicable puisque X_i est strictement équidimensionnel), $\operatorname{codim}_{X_i}(x)=\dim(X_i)$, d'où ~~XX~~ la seconde assertion du corollaire .

<u>Corollaire 3 .- Soient</u> X,Y <u>deux préschémas algébriques sur un corps k . Pour tout k-morphisme</u> f : X→Y , <u>on a</u> $\dim(\overline{f(X)})\leq\dim(X)$.

En considérant les composantes irréductibles de $\overline{f(X)}$, on est aussitôt ramené au cas où ~~XXXXXXXXX~~ Y est irréductible et f dominant (n°1, prop.1 (ii)) ; en outre , une au moins des composantes irréductibles X_i de X est telle alors que ~~XX~~ $f(X_i)$ soit dense ~~XXXX~~ dans Y , donc on peut aussi supposer X irréductible . Alors , si x est le point générique de X , f(x)=y est le point générique de Y , et comme il ~~XXXXXXXXX~~ correspond à f un k-monomorphisme de $\kappa(y)$ dans $\kappa(x)$, on a ~~XXX~~ $\deg.\mathrm{tr.}_k\ \kappa(y)\leq\deg.\mathrm{tr.}_k\ \kappa(x)$, d'où le corollaire .

Ici encore , ce résultat ne s'étend pas à des schémas intègres quelconque . Par exemple , soient B un anneau de valuation discrète , K son corps des fractions , X=Spec(K) , Y=Spec(B) ; à l'injection canonique B K correspond un morphisme f : X→Y <u>de type fini</u> (K étant en effet engendré par $1/\pi$, si ~~XXXX~~ (π) est l'idéal maximal de B) ; mais on a ~~XXXX~~ dim(Y)=1 et dim(X)=0 .

Corollaire 4 .- Soient X,Y <u>deux préschémas algébriques sur k ; on a</u>

$\dim(X\times_k Y)=\dim(X)+\dim(Y)$; en particulier, pour tout corps K, extension de k, $\dim(X\otimes_k K)=\dim(X)$.

Si (U_i) et (V_j) sont des recouvrements ouverts affines de X et Y, $(U_i\times_k V_j)$ est un recouvrement ouvert affine de $X\times_k Y$, donc on peut se borner au cas où X et Y sont affines (n°1, cor. 1 de la prop. 2). D'autre part, si X_i (resp. Y_j) sont les composantes irréductibles de X (resp. Y), $X\times_k Y$ est réunion des $X_i\times_k Y_j$, qui sont fermés (§ 2, n°2, prop. 5), donc (n°1, prop. 1 (ii)) on peut supposer X et Y irréductibles ; enfin, comme $(X\times_k Y)_{red}$ et $(X_{red}\times_k Y_{red})_{red}$ sont identiques (§ 3, n°4, cor. de la prop. 11) : on peut supposer X et Y réduits. Soient donc $X=\mathrm{Spec}(A)$, $Y=\mathrm{Spec}(B)$, où A et B sont des algèbres intègres de type fini sur k. Si $m=\dim(X)$, $n=\dim(Y)$, il résulte du lemme de normalisation (Bourbaki, Alg. comm.   ) que A (resp B) est un module de type fini sur un sous-anneau $A_1=k[a_1,\dots,a_m]$ (resp. $B_1=k[b_1,\dots,b_n]$) où les a_i (resp. b_j) sont algébriquement indépendants sur k ; $C=A\otimes_k B$ est donc un module de type fini sur $C_1=A_1\otimes_k B_1$. Pour tout idéal premier minimal $\underline{p}$ dans C, on voit par suite que le degré de transcendance sur k du corps des fractions de $C/\underline{p}$ est au plus $m+n$; d'autre part, en vertu du th. de Cohen-Seidenberg, il existe un idéal premier $\underline{q}$ de C tel que $\underline{q}\cap C_1=\{0\}$, donc il y a un des idéaux premiers minimaux dans C tel que le corps des fractions de $C/\underline{p}$ soit de degré fini sur le corps des fractions de C_1, et par suite de degré de transcendance $m+n$ sur k.

Proposition 8.- Soient X, Y deux préschémas localement noethériens, $f : X\to Y$ un morphisme. Soient $y\in Y$, et soit x le point générique d'une composante irréductible de $f^{-1}(y)$, considéré comme préschéma sur $\kappa(y)$ (§ 2, n°7, prop. 17). Alors $\mathrm{codim}_X\overline{\{x\}}\leq \mathrm{codim}_Y\overline{\{y\}}$ (ou, ce qui revient au même, $\dim \mathcal{O}_x\leq \dim \mathcal{O}_y$).

La question est locale en x et en y, puisque toute composante irréductible de $f^{-1}(y)$, de point générique x , est contenue dans l'adhérence d'un voisinage ouvert affine de x . On peut aussi remplacer Y par le schéma local de y , donc supposer que Y=Spec(B) , où B est un anneau local noethérien, d'idéal maximal $\underline{m}=\underline{j}_y$, et X=Spec(A) , où A est une algèbre noethérienne sur B ; on peut en outre (remplaçant B par son image dans A) supposer $B\subset A$. Alors il s'agit de voir que si $\underline{p}$ est un idéal premier minimal associé à $A\underline{m}$, on a $rg(\underline{p})\leq rg(\underline{m})$. Or , dans l'anneau local $A_{\underline{p}}$, l'idéal maximal $\underline{p}A_{\underline{p}}$ est engendré par $A\underline{m}$, donc admet un système de r générateurs , si r est le rang de $\underline{m}$, ce qui démontre notre assertion .

Corollaire 1 .- *Soient X et Y deux préschémas localement noethériens, $f:X\to Y$ un morphisme , Y' une partie fermée irréductible de Y , X' une composante irréductible de $f^{-1}(Y')$, dont l'image dans Y soit dense dans Y' . Alors $\mathrm{codim}_X(X')\leq \mathrm{codim}_Y(Y')$.*

Si x et y sont les points génériques de X' et Y' respectivement , l'hypothèse signifie que f(x)=y , et le cor.1 n'est qu'une autre forme de la prop.8 .

Corollaire 2 .- *Soient X un préschéma localement noethérien, f une section de O_X au-dessus de X , qui n'est identiquement nulle dans aucune composante irréductible de X . Soit Z_f l'ensemble des $x\in X$ tels que f(x)=0 Alors toute composante irréductible de Z_f est de codimension 1 .*

Il suffit de démontrer qu'il en est ainsi dans un voisinage ouvert affine de tout point de Z_f , donc on peut supposer X=Spec(A) affine d'anneau A noethérien ; par hypothèse f n'est contenu dans aucun des idéaux premiers minimaux de A , et tous les idéaux premiers minimaux associés à l'idéal principal (f) sont donc de rang 1 ("Hauptidealsatz" de Krull ;cf.Bourbaki, Alg.comm.   ) , ce qui prouve le corollaire . Ce dernier se déduit aussi de la prop.8 , en consi dérant f comme une X-section du préschéma $S=X\otimes_{\underline{Z}}\underline{Z}[T]$ (§ 5, n°1) ; si G est le graphe de ce morphisme, g sa projection sur $Y=\mathrm{Spec}(\underline{Z}[T])$, Z_f s'identifie à $g^{-1}(y)$, où $\underline{j}_y$ est l'idéal premier (T) ; la prop.8 est donc applicable et donne ~~$\mathrm{codim}_X(Z_f)\leq 1$; par ailleurs l'hypothèse implique $\mathrm{codim}_X(Z_f)$~~ $\mathrm{codim}_X(M)\leq 1$ pour toute composante irréductible M de Z_f ; par ailleurs, on ne peut avoir $\mathrm{codim}_X(M)=0$ en vertu de l'hypothèse (n°1, cor.2 de la prop.3).

<u>Corollaire 3 .- La conclusion du cor.2 est encore valable lorsqu'on remplace</u> O_X <u>par un</u> O_X<u>-module localement isomorphe à</u> O_X .

Cela résulte du fait que la question est locale .

<u>3 . Dimension des fibres d'un morphisme de type fini : formule de dimension . théorème de Chevalley</u> .

<u>Proposition 9 .- Soient</u> A <u>un anneau noethérien</u> , T <u>une indéterminée.</u> $\underline{p}$ <u>un idéal premier de</u> A ; <u>alors</u> $\underline{p}'=\underline{p}A[T]$ <u>est premier dans</u> $A[T]$ <u>et</u> $\underline{p}'\cap A=\underline{p}$. <u>Il existe une infinité d'autres idéaux premiers de</u> $A[T]$ <u>dont l'intersection avec</u> A <u>est</u> $\underline{p}$; <u>ces idéaux sont deux à deux sans relation d'inclusion . En outre , si</u> $\underline{q}$ <u>est un tel idéal , on a</u>

(8) $$\mathrm{rg}(\underline{q})=\mathrm{rg}(\underline{p}')+1=\mathrm{rg}(\underline{p})+1 .$$

Dans les premières assertions , on se ramène aussitôt , en remplaçant A par $A/\underline{p}$, au cas où $\underline{p}=(0)$; elles résultent alors du fait que les idéaux premiers de $A[T]$ dont l'intersection avec A se réduit à 0 sont exactement ceux ne rencontrant pas la partie multiplicative $S=A-\{0\}$ de l'anneau intègre A , donc correspondent biunivoquement aux idéaux premiers de $S^{-1}A[T]=K[T]$, où K est le corps des fractions de A . La définition du rang d'un idéal premier implique alors $\mathrm{rg}(\underline{q})\geqslant\mathrm{rg}(\underline{p}')+1\geqslant\mathrm{rg}(\underline{p})+1$; il reste à prouver que $\mathrm{rg}(\underline{p})+1\geqslant\mathrm{rg}(\underline{q})$ (ce qui est la seule partie de la démonstration où intervient l'hypothèse que A est noethérien) . Si $\mathrm{rg}(\underline{p})=r$, il suffit de trouver un système de $r+1$ éléments de $\underline{q}$ engendrant un idéal de définition de

$(A[T])_{\underline{q}}$; si K est le corps des fractions de $A/\underline{p}$, il y a un élément $x\in\underline{q}$ dont la classe mod.$\underline{p}$ engendre dans $k[T]$ l'idéal premier correspondant à $\underline{q}/\underline{p}$; si $x_1,\ldots,x_r$ sont des éléments de A formant un système de générateurs d'un idéal ~~XXXXXXXXXXXXXX~~ de définition de $A_{\underline{p}}$, il est clair que les r+1 éléments $x,x_1,\ldots,x_r$ répondront à la question .

Corollaire 1 .- Pour tout anneau noethérien A , on a $\dim(A[T_1,\ldots,T_r])=\dim(A)+r$ (T_i indéterminées) .

Corollaire 2 .- Pour tout préschéma localement noethérien X, la dimension de $X\otimes_Z Z[T_1,\ldots,T_r]$ est ~~XX~~ $\dim(X)+r$.

Cela résulte du cor.1 et du n°1, cor.1 de la prop.2 .

Corollaire 3 .- Sous les hypothèses de la ~~XXX~~ prop.9 , soit $\underline{q}$ un idéal premier de $A[T]$ tel que $\underline{q}\cap A=\underline{p}$; si k et k' sont les corps résiduels de $A_{\underline{p}}$ et $(A[T])_{\underline{q}}$, on a

$$\dim(A_{\underline{p}})+1=\dim((A[T])_{\underline{q}})+\mathrm{deg.tr}_k k' \qquad (9)$$

Si $\underline{q}=\underline{p}A[T]$, on a , d'après la prop.9 , $rg(\underline{q})=rg(\underline{p})$, donc $\dim(A_{\underline{p}})=\dim((A[T])_{\underline{q}})$; comme dans ce cas $k'=k(T)$, la formule (9) est bien vérifiée . Dansle cas contraire , $rg(\underline{q})=rg(\underline{p})+1$, et comme $\underline{q}$ correspond à un idéal premier $\neq(0)$ de $k[T]$, ~~XXXX~~ k' est une extension algébrique de k , et on a encore la formule (9) .

Lemme 1 .- Soient A un anneau local intègre noethérien , $\underline{m}$ son idéal maximal , k son corps résiduel . Soient B un anneau intègre contenant A, tel que $B=A[x]$, où $x\in B$, $\underline{q}$ un idéal premier de B tel que $\underline{q}\cap A=\underline{m}$, k' le corps résiduel de $B_{\underline{q}}$. Alors on a

$$\dim(A)+\mathrm{deg.tr.}_A B\geqslant\dim(B_{\underline{q}})+\mathrm{deg.tr.}_k k' \qquad (10)$$

où on a noté $\mathrm{deg.tr.}_A B$ le degré de transcendance du corps des fractions de B sur celui de A . En outre , si $A[T]$ vérifie la condition des chaînes , les deux nombres de (10) sont égaux .

Si x est transcendant sur A , les deux nombres de (10) sont égaux en vertu de (9) . Dans le cas contraire , on a $B=A[T]/\underline{p}$, où $\underline{p}$ est un idéal premier $\neq(0)$ de $A[T]$, tel que $\mathfrak{p}\cap A=(0)$, donc de rang 1 en vertu de la prop.9 . L'idéal $\mathfrak{q}$ de B correspond à un idéal premier $\mathfrak{r}\supset\mathfrak{p}$ de $A[T]$ tel que $\mathfrak{r}\cap A=\mathfrak{m}$, et on a $B_{\mathfrak{q}}=A[T]_{\mathfrak{r}}/\mathfrak{p}A[T]_{\mathfrak{r}}$; on a donc, par la formule (1) du n°1

$$(11)\qquad \dim(A[T]_{\mathfrak{r}})\geq \mathrm{rg}(\mathfrak{p}A[T]_{\mathfrak{r}})+\dim(B_{\mathfrak{q}})=1+\dim(B_{\mathfrak{q}})$$

car $\mathrm{rg}(\mathfrak{p}A[T]_{\mathfrak{r}})=\mathrm{rg}(\mathfrak{p})=1$; en outre les deux membres de (11) sont égaux lorsque $A[T]$ (et par suite $A[T]_{\mathfrak{r}}$) vérifie la condition des chaînes (prop.5 et 9) . D'autre part , la formule (9) donne

$$\dim(A[T]_{\mathfrak{r}})=\dim(A)+1-\mathrm{deg.tr.}_k k'$$

puisque les corps résiduels de $B_{\mathfrak{q}}$ et de $(A[T])_{\mathfrak{r}}$ sont les mêmes . Enfin on a alors $\mathrm{deg.tr.}_A B=0$, d'où finalement (10) .

Théorème 1 (formule de dimension) .- *Soient A un anneau local intègre noethérien , B un anneau intègre contenant A et de type fini sur A , $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B tel que $\mathfrak{q}\cap A$ soit l'idéal maximal de A , k et k' les corps résiduels de A et de $B_{\mathfrak{q}}$. On a alors l'inégalité*

$$(12)\qquad \dim(A)+\mathrm{deg.tr.}_A B\geq \dim(B_{\mathfrak{q}})+\mathrm{deg.tr.}_k k' \ .$$

En outre les deux membres sont égaux si toute sous-algèbre de type fini de $B[T]$ vérifie la condition des chaînes (en particulier si A est quotient d'un anneau local régulier) .

Supposons que $B=A[x_1,\dots,x_n]$, et raisonnons par récurrence sur n; posons $C=A[x_1,\dots,x_{n-1}]$, et $\mathfrak{r}=\mathfrak{q}\cap C$; $C_{\mathfrak{r}}$ est un anneau local intègre noethérien , et si on pose $B_{\mathfrak{r}}=S^{-1}B$, $\mathfrak{q}_{\mathfrak{r}}=S^{-1}\mathfrak{q}$, où $S=C-\mathfrak{r}$, on a $B_{\mathfrak{q}}=(B_{\mathfrak{r}})_{\mathfrak{q}_{\mathfrak{r}}}$ $\mathfrak{q}_{\mathfrak{r}}\cap C_{\mathfrak{r}}=\mathfrak{r}C_{\mathfrak{r}}$ et $B_{\mathfrak{r}}=C_{\mathfrak{r}}[x_n]$; en outre les corps des fractions de $B_{\mathfrak{r}}$ et $C_{\mathfrak{r}}$ sont ceux de B et de C , Si k_1 est le corps résiduel de $C_{\mathfrak{r}}$, on a donc , d'après

$$(10)\qquad \dim(C_{\mathfrak{r}})+\mathrm{deg.tr.}_C B\geq \dim(B_{\mathfrak{q}})+\mathrm{deg.tr.}_{k_1} k' \ .$$

D'autre part , l'hypothèse de récurrence donne

$$\dim(A)+\mathrm{deg.tr.}_A C\geq \dim(C_{\mathfrak{r}})+\mathrm{deg.tr.}_k k_1$$

d'où (12) en ajoutant membre à membre ; en outre , si toute sous-algèbre de type fini de $C[T]$ vérifie la condition des chaînes , il en est de même de toute sous-algèbre de type fini de $C_r[T]$, ce qui achève la démonstration .

Corollaire 1 .- Soient Y un préschéma irréductible localement noethérien , X un préschéma irréductible , $f : X \to Y$ un morphisme dominant de type fini . Soit ξ (resp. η) le point générique de X (resp. Y) , et soit $e = \dim(f^{-1}(\eta)) = \deg.\mathrm{tr}_{k(\eta)} k(\xi)$ ("dimension de la fibre générique") . Pour tout $x \in X$, on a , en posant $y = f(x)$

(13) $$e + \mathrm{codim}_Y \overline{\{y\}} \geq \deg.\mathrm{tr}._{k(y)} k(x) + \mathrm{codim}_X \overline{\{x\}} .$$

En outre , les deux membres sont égaux lorsque O_y est un quotient d'anneau local régulier .

Comme la question est locale , on peut supposer X et Y affines , soient $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(A)$, où B est une algèbre intègre de type fini sur A; comme f est dominant , A s'identifie à une sous-algèbre de B (§ 1, n°2, cor.4 de la prop.5), donc O_y à une sous-algèbre de O_x . Comme $k(\eta)$ et $k(\xi)$ sont les corps de fractions de A et B respectivement , donc de O_y et O_x respectivement , la formule (13) résulte de (12) appliquée aux anneaux O_y et O_x .

On notera d'ailleurs que $\deg.\mathrm{tr}._{k(y)} k(x)$ n'est autre que la dimension de $f^{-1}(y) \cap \overline{\{x\}}$, comme il résulte de la prop.7 du n°2 , appliquée à $f^{-1}(y)$ considéré comme préschéma algébrique sur $k(y)$. En particulier :

Corollaire 2 .- Les hypothèses du cor.1 étant vérifiées , supposons en outre que x soit fermé dans $f^{-1}(y)$ et que O_y soit un quotient d'anneau régulier . Alors

(14) $$\mathrm{codim}_X \overline{\{x\}} = e + \mathrm{codim}_Y \overline{\{y\}} .$$

Corollaire 3 .- Les hypothèses du cor.1 étant vérifiées , on a

$$\dim(X) \leqslant \dim(Y) + e \quad . \tag{15}$$

Supposons en outre que tous les anneaux locaux $\mathcal{O}_y$ $(y \in Y)$ *soient quotients d'anneaux réguliers. Pour que les deux membres de (15) soient égaux, il faut et il suffit que* $\dim(Y) = \sup_{x \in X}(\dim(\mathcal{O}_{f(x)}))$.

L'inégalité (15) résulte en effet de (13) appliqué à un point fermé x de X (n°2, cor. 2 de la prop. ~~8~~ 6). Si les $\mathcal{O}_y$ sont quotients d'anneaux réguliers, l'égalité ~~XXX~~ (14) montre que $\dim(X) = e + \sup_{x \in X}(\dim(\mathcal{O}_{f(x)}))$.

En particulier :

Corollaire 4. — Sous les hypothèses du cor. 1, on a $\dim(X) = \dim(Y) + e$ *dans chacun des deux cas suivants* : 1° X *et* Y *sont des préschémas algébriques sur un corps* k_0 ; 2° *tous les anneaux* $\mathcal{O}_y$ $(y \in Y)$ *sont quotients d'anneaux réguliers*, *et* $f(X) = Y$.

La seconde assertion découle immédiatement du cor. 3 ainsi que du n°2, cor. 2 de la prop. 6 ; la première est une conséquence directe de la prop. 7 du n°2.

Corollaire 5. — *Soient* Y *un préschéma localement noethérien*, $f : X \to Y$ *un morphisme de type fini, et posons* $e = \sup_{y \in Y}(\dim(f^{-1}(y)))$. *Alors*

$$\dim(X) \leqslant \dim(Y) + e \quad . \tag{16}$$

Si en outre tous les $\mathcal{O}_y$ *sont quotients d'anneaux réguliers, et si* $\dim(f^{-1}(y)) = e$ *pour tout* $y \in Y$, *les deux membres de* (16) *sont égaux*.

Comme la dimension de X est la borne supérieure des dimensions de ses composantes irréductibles, on est ramené au cas où X est irréductible ; alors $\overline{f(X)}$ est irréductible, étant l'adhérence de $\{f(x)\}$ où x est le point générique de X ; on peut aussi supposer X et Y réduits (§4, n°2, cor. 3 de la prop. 9) ; comme $\dim(\overline{f(X)}) \leqslant \dim(Y)$, on est ramené (§3, n°4, cor. de la prop. 9) au cas où X et Y sont irréductibles et f dominant, et le corollaire est alors conséquence du cor. 3.

Remarques. — Nagata a démontré que l'égalité peut être en défaut dans la formule (12), même si B est entier sur A et $\mathfrak{q}$ maximal dans B ; autrement dit, il se peut que dans ces conditions, on ait

$rg(\mathfrak{q})=\dim(B_{\mathfrak{q}}) < \dim(A)$ (Nagata, On the chain problem of prime ideals, Nagoya Math. Journ., 10 (1956)). On dit avec Nagata qu'un anneau local intègre noethérien A vérifie la condition des chaînes stricte ("second chain condition") si la clôture intégrale de A est un anneau strictement équidimensionnel (ou, ce qui revient au même, lorsqu'il en est ainsi pour toute A-algèbre finie sur A contenue dans cette clôture). Alors on peut montrer que toute A-algèbre de type fini vérifie la condition des chaînes (Nagata, Note on a chain condition of prime ideals, à paraître dans Kyoto J. Math.) ; a fortiori, l'égalité (alors a lieu) dans (12).

Lemme 2.— Sous les hypothèses du cor.1 du th.1, toutes les composantes de $f^{-1}(y)$ sont de dimension $\geq e$.

Si les deux membres de (13) sont égaux, le lemme résulte de cette égalité appliquée à un point générique x d'une composante irréductible de $f^{-1}(y)$, en tenant compte de la prop.8 du n°2. En fait, Nagata a démontré (dans l'article du Kyoto J. Math. précité) que le lemme 2 est valable sans restriction sur les O_y ; mais sa démonstration est délicate. Au chap.III, § 4, nous obtiendrons une démonstration directe simple du th.2 ci-dessous (et a fortiori du lemme 2 qui en est une conséquence), comme corollaire du "main theorem" de Zariski ; jusque là, le § actuel excepté, nous n'utiliserons le lemme 2 et le th.2 que dans les cas où les deux membres de (13) sont égaux.

Lemme 3.— Si A est un anneau, B un anneau entier sur A, on a $\dim(B) \leq \dim(A)$.

En effet, si $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ sont deux idéaux premiers de B tels que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ et $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{q} \cap A$, on a nécessairement alors $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}$ (Bourbaki, Alg. comm.)

Archives Grothendieck Sept 59

Proposition 10 .- Soient Y un préschéma irréductible localement noethérien, X un préschéma irréductible, $f : X \to Y$ un morphisme dominant de type fini, ξ (resp. η) le point générique de X (resp. Y).
(i) Il existe un ouvert non vide $U \subset Y$ tel que pour tout $y \in U$, la fibre $f^{-1}(y)$ soit équidimensionnelle de dimension $e = \mathrm{deg.tr.}_{\kappa(\eta)} \kappa(\xi)$.
(ii) Pour tout $y \in f(X)$, toute composante de $f^{-1}(y)$ est de dimension $\geqslant e$.

(ii) n'est autre que le lemme 2. Pour démontrer (i), on peut évidemment supposer X et Y réduits (§ 4, n°2, cor.3 de la prop.9), donc intègres. On peut évidemment supposer Y affine, et X réunion d'un nombre fini d'ouverts affines X_i ; si à chaque X_i correspond un ouvert non vide $U_i \subset Y$ tels que les composantes irréductibles de $X_i \cap f^{-1}(y)$ soient de dimension e pour tout $y \in U_i$, l'ouvert $U = \bigcap_i U_i$ vérifiera la condition de (i). On peut donc aussi supposer X affine, et la proposition sera conséquence du lemme suivant :

Lemme 4 .- Soient X, Y deux préschémas intègres, $f : X \to Y$ un morphisme dominant de type fini, tel que $f^{-1}(V)$ soit affine pour tout ouvert affine $V \subset Y$ (de tels morphismes seront étudiés au chap.II, § 2, sous le nom de morphismes affines). Il existe alors un ouvert affine non vide U de Y, tel que, si on désigne par C l'anneau de $U \otimes_{\underline{Z}} \underline{Z}[T_1, \dots, T_e]$ (T_i indéterminées, $e = \mathrm{deg.tr.}_{R(Y)} R(X)$), l'anneau D de $f^{-1}(U)$ soit entier fini sur C.

Supposons en effet ce lemme démontré. Alors, pour $y \in U$, $f^{-1}(y)$ considéré comme préschéma sur $\kappa(y)$, est un schéma affine dont l'anneau, isomorphe à $D \otimes_E \kappa(y)$ (E anneau de U), est entier fini sur $\kappa(y)[T_1, \dots, T_e]$; le lemme 3 et le cor.1 de la prop.9 montrent alors que $\dim(f^{-1}(y)) \leqslant e$ ce qui, tenant compte de (ii), achève de prouver (i).

Pour établir le lemme 4, on peut évidemment supposer Y affine d'anneau intègre A, donc X affine d'anneau B, où B est une A-algèbre intègre de type fini sur A contenant A. Soit K le corps des fractions de A ; $B\otimes_A K$ est une K-algèbre intègre de type fini ; en vertu du lemme de normalisation, il existe des éléments algébriquement indépendants (sur K) $c_1,\dots,c_e$ de $B\otimes_A K$ tels que $B\otimes_A K$ soit un anneau entier fini sur l'anneau $B'=K[c_1,\dots,c_e]$. On peut écrire $c_i=b_i/a$, où $a\in A$, $b_i\in B$; d'autre part, si (x_j) est un système fini de générateurs de B sur A, les x_j sont entiers sur B', donc sur un anneau de la forme $A_f[c_1,\dots,c_e]$ ($f\in A$). Si on pose $g=af$, on voit que les x_j, et a fortiori les x_j/g, sont entiers sur $A_g[b_1,\dots,b_e]$; comme les b_i sont algébriquement indépendants sur le corps des fractions K de A_g, il suffit de prendre $U=D(g)$ pour répondre à la question.

Théorème 2. — Soient Y *un préschéma localement noethérien*, $f : X\to Y$ *un morphisme de type fini. Pour tout entier* n, *l'ensemble* $F_n(X)$ ~~des~~ $x\in X$ *tels que* $\dim_x(f^{-1}(f(x)))\geqslant n$ *est fermé*.

La question étant locale sur Y, on peut supposer Y noethérien. Si $\underline{E}$ est l'ensemble des parties fermées $Y'\subset Y$ telles que le théorème soit vrai pour tout sous-préschéma de base Y' et $f^{-1}(Y')$, il suffit de prouver que le complémentaire $\underline{E}'$ de $\underline{E}$ dans l'ensemble des parties fermées de Y est vide. Or dans le cas contraire $\underline{E}'$ admet un élément minimal Y_0, puisque Y est noethérien ; remplaçant Y par Y_0, on est ramené à démontrer le théorème en supposant qu'il est vrai pour toute partie fermée $Y'\neq Y$ de Y. D'autre part, si X_i ($1\leq i\leq m$) sont les composantes irréductibles de X, on a $F_n(X)=\bigcup_i F_n(X_i)$ (n°1, cor. de la prop. 1), et on peut donc supposer X irréductible ; enfin, comme on peut supposer X et Y réduits (§ 4, n°2, cor. 3 de la prop. 9), on peut remplacer Y par $\overline{f(X)}$ (§ 3, n°4, cor. de la prop. 9), donc on peut supposer f dominant et Y irréductible. En vertu de la prop. 10 (ii), on a $F_n(X)=X$ pour n e, on peut par suite supposer $n>e$. Mais alors, en vertu de la prop. 10 (i), il existe une partie fermée $Y'=Y-U$ distincte

/pour

de Y telle que $F_n(X) \subset f^{-1}(Y')$, ce qui termine la démonstration .

Corollaire 1 .- L'ensemble des $x \in X$ *tels que x soit isolé dans* $f^{-1}(f(x))$ *est ouvert dans* X .

C'est en effet le complémentaire de $F_1(X)$.

Corollaire 2 .- Sous les hypothèses du th.2 , supposons de plus que l'application f soit fermée . Alors , pour tout entier n , l'ensemble des $y \in Y$ *tels que* $\dim(f^{-1}(y)) \geqslant n$ *est fermé* .

En effet , cet ensemble n'est autre que $f(F_n(X))$ (n°2, prop.2 (ii)).

Remarque .- On notera que la prop.10 (et par suite le lemme 2) sont conséquences du th.2 : en effet , sous les hypothèses de la prop 10 , l'ensemble des x tels que $\dim(f^{-1}(f(x)) < e$ est ouvert , et comme il ne peut contenir ξ , il est vide ; de même , l'ensemble des x tels que $\dim(f^{-1}(f(x)) = e$ est ouvert et non vide , puisqu'il contient ξ .

Signalons enfin le résultat plus facile suivant :

Proposition 11 .- Soit Y *un préschéma dont l'espace de base est quasi compact . Si* $f : X \rightarrow Y$ *est un morphisme de type fini , il existe un entier n tel que , pour tout* $y \in Y$, $\dim(f^{-1}(y)) \leqslant n$.

Comme il y a un recouvrement ouvert affine fini (V_i) de Y tel que $f^{-1}(V_i)$ soit réunion finie d'ouverts affines , on est ramené aussitôt au cas où $X = \mathrm{Spec}(B)$ et $Y = \mathrm{Spec}(A)$ sont affines (n°1, prop.1 (ii)) . Si B est une A-algèbre engendrée par n éléments , pour tout y Y , l'anneau du schéma $f^{-1}(y)$ sur $\kappa(y)$ est une algèbre sur $\kappa(y)$ ayant n générateurs , donc $\dim(f^{-1}(y)) \leqslant$ $\leqslant n$ (cor.1 de la prop.9).

4 . Ensembles constructibles .

Définition 4 (Chevalley) .- Soit X *un espace topologique . On appelle ensemble constructible dans* X *une réunion finie de parties localement fermées de* X .

Définition 5 .- Soit h une application d'un espace topologique X dans un ensemble T . On dit que h est constructible si $h^{-1}(t)$ est constructible pour tout $t \in T$, et vide sauf pour un nombre fini de valeur de t ; pour toute partie S de T, $h^{-1}(S)$ est alors constructible.

On peut dire que l'ensemble des parties constructibles de X est la plus petite partie de $\underline{P}(X)$ contenant les ensembles fermés et stable par intersection finie et passage au complémentaire (ce qui entraîne qu'elle est aussi stable par réunion finie) . L'image réciproque d'un ensemble constructible par une application continue est constructible . Si Y est une partie constructible de X , les parties de Y qui sont constructibles en tant que sous-espaces de Y sont identiques à celles qui sont constructibles en tant que sous-espaces de X .

Proposition 12 .- Soit X un espace topologique noethérien . Pour qu'une partie E de X soit constructible , il faut et il suffit que pour toute partie fermée irréductible Y de X , $E\cap Y$ soit rare dans Y ou contienne un ouvert non vide de Y .

La nécessité de la condition résulte de ce que $E\cap Y$ doit être une partie constructible de Y , et du

Lemme 5 .- Soient X un espace topologique irréductible , E une partie constructible de X . Pour que E soit dense dans X , il faut et il suffit que E contienne un ouvert non vide de X . Si X admet un point générique x (c'est-à-dire si $X=\overline{\{x\}}$) , il revient au même de dire que x E .

En effet , comme X est irréductible , tout ouvert non vide est dense Inversement , supposons que $E=\bigcup_i (U_i \cap F_i)$, où les U_i sont ouverts non vides dans X et les F_i fermés dans X; on a donc $\overline{E}\subset\bigcup_i F_i$, et par suite si $\overline{E}=X$, X est égal à un des F_i , d'où $E\supset U_i$. Si $X=\overline{\{x\}}$ et si $x\in E$, il est clair que E est dense dans X ; la réciproque résulte de ce qui précède et de ce que tout ouvert non vide contient x.

Pour démontrer que la condition de la prop. 12 est suffisante, considérons l'ensemble $\underline{F}$ des parties fermées Y de X telles que $E \cap Y$ soit constructible (par rapport à Y ou par rapport à X, ce qui revient au même). Il s'agit de montrer que le complémentaire $\underline{F}'$ de $\underline{F}$ dans l'ensemble de toutes les parties fermées de X est vide. Dans le cas contraire $\underline{F}'$ contient un élément minimal Y_0; remplaçant X par Y_0, on voit qu'on peut supposer que pour toute partie fermée $Y \neq X$ de X, $E \cap Y$ est constructible. Si X est réductible et si X_i $(1 \leq i \leq n)$ sont ses composantes irréductibles, les $E \cap X_i$ sont constructibles par hypothèse, donc aussi E qui est leur réunion (finie). Si X est irréductible, ou bien E est rare, donc $\bar{E} \neq X$, et $E = E \cap \bar{E}$ est constructible ; ou bien E contient un ouvert non vide U, donc est réunion de U et de $E \cap (X-U)$; comme l'ensemble fermé $X-U$ est distinct de X, $E \cap (X-U)$ est constructible, et il en est par suite de même de E.

Corollaire. - Soient X un espace noethérien, (E_α) une famille filtrante croissante de parties constructibles de X, telle que :

1° X est réunion de la famille (E_α).

2° Toute partie fermée irréductible de X est contenue dans l'adhérence d'un des E_α.

Alors il existe α tel que $X = E_\alpha$.

Lorsque toute partie fermée irréductible de X admet un point générique, l'hypothèse 2° peut être supprimée.

les E_α ~~partout~~ Soit $\underline{M}$ l'ensemble des parties fermées de X contenues dans l'un des E_α ; il s'agit de montrer que le complémentaire $\underline{M}'$ de $\underline{M}$ dans l'ensemble de toutes les parties fermées de X est vide . Sinon , $\underline{M}'$ contient un élément minimal ; on est donc ramené à prouver le corollaire en supposant que toute partie fermée $Y \neq X$ de X est contenue dans un des E_α . La proposition est alors évidente si X est réductible , car chacune des composantes irréductibles X_i de X est contenue dans un E_{α_i} , et il existe un E_α contenant tous les E_{α_i} . Supposons donc X irréductible . Alors par hypothèse il existe un indice β tel que $X = \overline{E}_\beta$, donc (lemme 5) E_β contient un ouvert non vide U . Mais alors l'ensemble fermé X-U est contenu dans un E_γ , et il suffit de prendre E_α contenant E_β et E_γ . Lorsque toute partie fermée irréductible Y de X admet un point générique y , il existe α tel que $y \in E_\alpha$, donc $Y = \overline{\{y\}} \subset \overline{E}_\alpha$, et la condition 2° est conséquence de 1° .

<u>Proposition 13 .- Soient</u> X <u>un espace noethérien , x un point de</u> X , E <u>une partie constructible de</u> X . <u>Pour que</u> E <u>soit un voisinage de x</u> , <u>il faut et il suffit que pour toute partie fermée irréductible</u> Y <u>de</u> X <u>contenant x</u> , $E \cap Y$ <u>soit dense dans</u> Y <u>(s'il existe un point générique</u> <u>y de</u> Y , <u>cela signifie aussi (lemme 5) que</u> y E).

La condition est évidemment nécessaire ; prouvons qu'elle est suffisante . Soit $\underline{M}$ l'ensemble des parties fermées Y de X contenant x et telles que $E \cap Y$ soit un voisinage de x dans Y ; en considérant un ensemble minimal dans le complémentaire de $\underline{M}$ par rapport à l'ensemble de toutes les parties fermées de X contenant x , on se ramène au cas où pour toute partie fermée $Y \neq X$ de X contenant x, $E \cap Y$ est un voisinage de x dans Y . Si X est réductible , chacune des composantes irréductibles X_i de X contenant x est distincte de X , donc $E \cap X_i$ est un voisinage de x par rapport à X_i , et par suite E est un voisinage de x dans la réunion (ouverte) des composantes irréductibles de X contenant x, et a fortiori dans X. Si X est irréductible, E contient une partie ouverte non vide U ; la propositon est évidente si $x \in U$; sinon, par hypothèse x est intérieur à $E \cap (X-U)$ par rapport à $X-U$, donc l'adhérence dans X de $X-E$ ne contient pas x, ce qui achève la démonstration.

Proposition 14.- Soit h une application d'un espace noethérien X dans un ensemble T. Pour que h soit constructible, il faut et il suffit que pour toute partie fermée irréductible Y de X, il existe dans Y un ouvert non vide U dans lequel h est constante.

La condition est nécessaire : en effet, par hypothèse, h ne prend dans Y qu'un nombre fini de valeurs t_i, et chacun des ensembles $Y \cap h^{-1}(t_i)$ est constructible. Comme ils ne peuvent être tous rares, un d'entre eux contient un ensemble ouvert non vide (lemme 5)
Pour voir que la condition est suffisante, considérons l'ensemble $\underline{M}$ des parties fermées Y de X telles que la restriction de h à Y soit constructible ; en considérant un ensemble minimal dans le complémentaire de $\underline{M}$ par rapport à l'ensemble de toutes les parties fermées de X, on se ramène au cas où pour toute partie fermée $Y \neq X$ de X, la restriction de h à Y est constructible. Si X est réductible, la restriction de h à chacune des composantes irréductibles X_i de X est constructible, d'où suit aussitôt (déf.2) que h est constructible. Si X est irréductible, il existe par hypothèse une partie ouverte non vide U de X dans laquelle h est constante ; d'autre part, la restriction de h à $X-U$ est constructible par hypothèse, et il en résulte aussitôt que h est constructible.

Corollaire.- Soit X un espace noethérien dans lequel toute partie fermée irréductible admet un point générique. Si h est une application de X dans un ensemble T telle que pour tout $t \in T$, $h^{-1}(t)$ soit

<u>constructible , alors h est constructible</u> .

En effet , si Y est une partie fermée irréductible de X et y son point générique , $Y \cap h^{-1}(h(y))$ est constructible et contient y , donc (lemme 5) contient une partie ouverte non vide de Y , et il suffit d'appliquer la prop. 14 .

<u>Théorème 3</u> (Chevalley) .- <u>Soient</u> Y <u>un préschéma noethérien</u> , f: X→Y <u>un morphisme de type fini. Alors l'image par f de toute partie constructible de</u> X <u>est une partie constructible de</u> Y .

Il suffit de prouver que f(Z) est constructible pour toute partie localement fermée Z de X. On peut supposer X et Y réduits (§ 4, n° 2, cor. 3 de la prop. 9). En considérant un sous-préschéma de X ayant Z pour espace de base (§ 3, n° 4, prop. 9) et la restriction de f à Z (§ 4, n° 2, prop. 7 et 8) on est ramené à prouver que f(X) est constructible . Appliquons le critère de la prop. 12 ; pour toute partie fermée irréductible T de Y , il faut prouver que $T \cap f(X) = f(f^{-1}(T))$ est rare dans T ou contient un ouvert non vide de T ; en prenant un sous-préschéma de Y ayant T pour espace de base (§ 3, n° 4, prop. 9) , et considérant son image réciproque par f (§ 3, n° 2, cor. 3 de la prop. 5) , on voit finalement qu'on est ramené à prouver que si on suppose Y <u>irréductible</u> et f(X) <u>dense</u> dans Y , f(X) contient un ouvert non vide de Y . On peut supposer en outre Y affine ; alors X est par hypothèse réunion finie d'ouverts affines V_i et comme f(X) est dense dans Y , un au moins des $f(V_i)$ est dense dans Y (l'intersection d'un nombre fini d'ouverts non vides de Y étant non vide) . On est ainsi ramené au cas où en outre X et Y sont affines ; enfin , si $(X_j)_{1 \leq j \leq n}$ est la famille des composantes irréductibles de X , on voit comme ci-dessus que l'un des $f(X_j)$ est dense dans Y ; on peut donc supposer X irréductible . Alors X=Spec(B) , Y=Spec(A) , où A est un anneau intègre noethérien , B une A-algèbre intègre de type fini , contenant A . Nous allons voir qu'il existe $g \in A$ tel que pour tout $x \in D(g)$ (c'est-à-dire tel que $g \notin j_x$), l'idéal j_x soit l'intersection de A et d'un idéal premier de B, ce qui prouvera que $D(g) \subset f(X)$. On est donc ramené à démontrer le

Lemme 6.- Soient A un anneau intègre, B une A-algèbre intègre de type fini contenant A. Il existe $g \in A$ tel que tout homomorphisme de A dans un corps algébriquement clos Ω, non nul en g, se prolonge en un homomorphisme de B dans Ω.

Or, il s'agit là d'un résultat classique d'algèbre commutative (Sém. Cartan-Chevalley 1955, 3-01).

Corollaire.- Sous les hypothèses du th.3, les fonctions $y \to \dim(f^{-1}(y))$ sur Y et $x \to \dim(f^{-1}(f(x)))$ sur X sont constructibles.

En vertu du th.2 du n°3, pour tout n, l'ensemble E_n des x tels que $\dim(f^{-1}(f(x))=n$ est différence de deux ensembles fermés, donc constructible, et l'assertion relative à $x \to \dim(f^{-1}(f(x)))$ résulte donc du cor. de la prop.14. Comme $f(E_n)$ est l'ensemble des y tels que $\dim(f^{-1}(y))=n$, il est constructible d'après le th.3 et on conclut de même que la fonction $y \to \dim(f^{-1}(y))$ est constructible.

5. Applications ouvertes et équidimensionnalité.

Proposition 15.- Soient Y un préschéma localement noethérien, $f : X \to Y$ un morphisme de type fini, x un point de X, $y=f(x)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'image par f de tout voisinage de x est un voisinage de y.

(ii) Pour tout y' Y dont y est une spécialisation, il existe $x' \in X$ tel que $f(x')=y'$ et que x soit une spécialisation de x'.

(iii) Pour toute partie fermée irréductible Y' de Y contenant y, il existe une partie fermée irréductible X' de X contenant x et telle que $f(X')$ soit contenu et dense dans Y'.

Pour prouver que (i) entraîne (iii), soit $Y'=\overline{\{y'\}}$, et soit F la réunion des composantes irréductibles de $f^{-1}(Y')$ qui ne contiennent pas x. $X-F=U$ est un voisinage de x dans X ; en effet, si V est un voisinage ouvert affine de y, d'anneau noethérien, l'intersection de $f^{-1}(V)$ et d'une composante irréductible de $f^{-1}(Y')$ est une composante irréductible de $f^{-1}(Y'\cap V)$, donc ces composantes sont en nombre fini, et notre assertion résulte de ce que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x dans X. Cela étant, par hypothèse $f(U)$ est un voisinage de y dans Y, donc il existe $x'\in U$ tel que $f(x')=y'$; par définition x' appartient à une des composantes irréductibles X' de $f^{-1}(Y')$ contenant x, et comme $y'\in f(X')$, $f(X')$ est dense dans Y'. D'ailleurs, si X' est irréductible et fermé, contient x et est tel que $f(X')\subset Y'$ est dense dans Y', et si x'' est le point générique de X', on a nécessairement $f(x'')=y'$, donc (iii) entraîne (ii). Enfin, (ii) entraîne (i) : en effet, si U est un ensemble ouvert dans X contenant x, U contient tout x' dont x est une spécialisation, donc $f(U)$ contient par hypothèse tout y' dont y est une spécialisation. Comme $f(U)$ est constructible (n°4, th.3), il résulte de la prop.13 du n°4 que $f(U)$ est un voisinage de x.

Corollaire 1.- Les hypothèses sur X, Y, f étant celles de la prop.15, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *f est une application ouverte.*

(ii) *Pour tout $x\in X$ et tout $y'\in Y$ tel que $f(x)\in\overline{\{y'\}}$, il existe $x'\in X$ tel que $y'=f(x')$ et $x\in\overline{\{x'\}}$.*

(iii) *Pour toute partie fermée irréductible Y' de Y, il existe une composante irréductible X' de $f^{-1}(Y')$ telle que $f(X')$ soit dense dans Y'.*

Lorsque le morphisme f est tel que pour un $y \in Y$ et pour tout ouvert $U \subset X$ rencontrant $f^{-1}(y)$, $f(U)$ est un voisinage de y, on dit que f est un morphisme ouvert au-dessus de y.

Définition 5.- Soient Y un préschéma, $f : X \to Y$ un morphisme, y un point de Y. On dit que f est universellement ouvert (resp. universellement ouvert au-dessus de y) si pour tout morphisme de type fini $g : Y' \to Y$, $f^{Y'} : X^{Y'} \to Y'$ est ouvert (resp. est ouvert au-dessus de y' pour tout y' tel que $g(y')=y$).

Corollaire 2.- Les hypothèses sur X, Y, f étant celles de la prop. 15, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est universellement ouvert.

(ii) Pour tout Y' de la forme $Y \otimes_{\underline{Z}} \underline{Z}[T_1, \dots, T_r]$ (T_k indéterminées), $f^{Y'}$ est ouvert.

(iii) Pour tout Y' irréductible et tout morphisme de type fini $g : Y' \to Y$, il existe une composante irréductible X' de $X^{Y'}$ telle que $f^{Y'}(X')$ soit dense dans Y'.

Comme une immersion fermée est de type fini, ainsi que le composé de deux morphismes de type fini (§ 4, n°2, prop. 7 et 8)

Il résulte du cor. 1 que (i) et (iii) sont équivalentes; il suffit de prouver que (ii) entraîne (i). On peut se borner au cas où Y est affine ainsi que Y', car pour prouver que $f^{Y'}(U')$ est ouvert pour un ouvert $U' \subset X^{Y'}$, il suffit de montrer qu'il en est ainsi pour les ensembles $f^{Y'}(U' \cap (f^{Y'})^{-1}(V_\alpha))$, si (V_α) est un recouvrement ouvert affine de Y'. Alors si $Y=\mathrm{Spec}(A)$, $Y'=\mathrm{Spec}(A')$, A' est une A-algèbre de type fini (§ 4, n°2, prop. 6), donc de la forme $A''/\underline{I}$, où $A''=A[T_1, \dots, T_r]$ et $\underline{I}$ est un idéal de A''. On peut d'autre part aussi supposer X affine, soit $X=\mathrm{Spec}(B)$, où B est une A-algèbre de type fini ; on a alors $X'=\mathrm{Spec}(B')$ et $X''=\mathrm{Spec}(B'')$, où $B'=B \otimes_A A'$, $B''=B \otimes_A A''$, et par suite $B'=B''/\underline{J}$ où $\underline{J}$ est l'image de $B \otimes_A \underline{I}$ dans B''; X' (resp. Y') est donc un sous-préschéma fermé de X'' (resp. Y''), et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X'' \\ {\scriptstyle f^{Y'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^{Y''}} \\ Y' & \longrightarrow & Y'' \end{array}$$

est commutatif, les ~~XXEEE~~ flèches horizontales étant les injections canoniques. Cela étant, tout ouvert U' de X' est de la forme ~~U"XX'~~ $U''\cap X'$, où U'' est un ouvert dans X'' ; comme $(f^{Y''})^{-1}(Y')=X'$ (§ 1, n°2 formule (5)), on a $f^{Y''}(U''\cap X')=f^{Y''}(U'')\cap Y'$, et comme $f^{Y''}(U'')$ est ouvert dans Y'' par hypothèse, on voit que $f^{Y'}(U')$ est ouvert dans Y'.

On verra au chap. IV que si Y'' est localement noethérien, pour tout morphisme $g : Y'\to Y$ (non nécessairement de type fini), $f^{Y'}$ est encore ouvert.

Corollaire 3.- Les hypothèses sur X,Y,f *étant celles de la prop. 15, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est universellement ouvert au-dessus de* $y\in Y$.

(ii) *Pour tout morphisme de type fini* $g : Y'\to Y$ ~~EE~~, *tout* $y'\in Y'$ *tel que* $g(y')=y$, *et tout* $x'\in(f^{Y'})^{-1}(y')$, *alors, pour tout* $y'_1\in Y'$ *dont* y' *est spécialisation, il existe* x'_1 *dont* x' *est spécialisation et tel que* $f^{Y'}(x'_1)=y'_1$.

(iii) *Pour tout préschéma irréductible* Y' ~~EE~~, *tout morphisme de type fini* $g : Y'\to Y$ *et tout* $y'\in Y'$ *tel que* $g(y')=y$, *tout point de* $(f^{Y'})^{-1}(y')$ *appartient à une composante irréductible de* $X^{Y'}$ ~~EE~~ *dont l'image par* $f^{Y'}$ *est dense dans* Y'.

Cela résulte aussitôt de la prop. 15.

Corollaire 4.- Soit Y *un préschéma localement noethérien irréductible*, η *son point générique*, $f : X\to Y$ *un morphisme de type fini universellement ouvert* (resp. *universellement ouvert au-dessus de* $y\in Y$)

Soient Y' un préschéma irréductible de point générique η', $g : Y' \to Y$ un morphisme dominant de type fini. Alors les points génériques des composantes irréductibles de $X^{Y'}$ sont les points génériques des composantes irréductibles de $(f^{Y'})^{-1}(\eta') = f^{-1}(\eta) \otimes_{\kappa(\eta)} \kappa(\eta')$ (resp. pour tout $y' \in Y'$ tel que $g(y') = y$, tout point de $(f^{Y'})^{-1}(y')$ appartient à une composante irréductible de $X^{Y'}$ dont l'image par $f^{Y'}$ est dense dans Y'). En particulier, si $\kappa(\eta) = \kappa(\eta')$ et si X est irréductible, alors $X^{Y'}$ est irréductible (resp. $X^{Y'}$ a une seule composante irréductible dont l'image par $f^{Y'}$ est dense dans Y', et $(f^{Y'})^{-1}(y')$ est contenu dans cette composante).

Observons que si f (resp. $f^{Y'}$) est ouvert et Y (resp. Y') irréductible, la restriction de f (resp. $f^{Y'}$) à toute composante irréductible de X (resp. $X^{Y'}$) est un morphisme dominant. Lorsque f est universellement ouverte, les assertions du corollaire résultent du

Lemme 7.- Soient X, Y deux préschémas noethériens, $f : X \to Y$ un morphisme. Supposons Y irréductible de point générique η ; alors les points génériques des composantes irréductibles de X dont l'image par f est dense dans Y sont les points génériques des composantes irréductibles de $f^{-1}(\eta)$.

En effet, les composantes irréductibles Z de X qui rencontrent $f^{-1}(\eta)$ sont celles pour lesquelles $f(Z)$ est dense dans Y ; si ζ est le point générique de Z, il est clair $f(\zeta) = \eta$ et que $Z \cap f^{-1}(\eta)$ est l'unique composante irréductible de $f^{-1}(\eta)$ contenue dans Z, puisque c'est l'adhérence de $\{\zeta\}$ dans $f^{-1}(\eta)$ et que toute composante irréductible de $f^{-1}(\eta)$ est contenue dans une composante irréductible de X ; d'où le lemme.

Pour appliquer le lemme au cas où f est universellement ouverte, il suffit de remarquer qu'on peut remplacer Y par un ouvert affine donc supposer Y (et par suite Y' et X) noethérien ; cela entraîne la première assertion. Pour la seconde, le lemme montre que $f^{-1}(\eta)$ est irréductible, donc aussi $(f^{Y'})^{-1}(\eta')=f^{-1}(\eta)$, et une nouvelle application du lemme prouve que $X^{Y'}$ est irréductible.

Quant aux assertions relatives au cas où f est universellement ouverte au-dessus de y, la première a été énoncée dans le cor.3 ; la seconde résulte comme ci-dessus du lemme 7.

Proposition 16 .- Soient Y un préschéma localement noethérien irréductible de point générique η, X un préschéma irréductible, f : un morphisme dominant de type fini. Soient x X, $y=f(x)$; supposons que pour toute partie ouverte U de X qui rencontre une des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ contenant x, f(U) soit un voisinage de y. Alors les composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$ contenant x ont une dimension égale à $e=\dim(f^{-1}(\eta))$.

On peut évidemment se borner au cas où x est point générique d'une des composantes irréductibles de $f^{-1}(y)$, et l'hypothèse entraîne alors que l'image par f de tout voisinage de x est un voisinage de y. En vertu de la prop.15, pour toute chaîne $Y_0=\overline{\{y\}}\subset Y_1\subset\ldots\subset Y_r$ de parties fermées irréductibles de Y, il existe une chaîne $X_0=\overline{\{x\}}\subset X_1\subset\ldots\subset X_r$ de parties fermées irréductibles de X telle que $f(X_i)$ soit contenue dans Y_i et dense dans Y_i : il suffit en effet d'appliquer la prop.15 par récurrence descendante sur i. On en conclut par définition (n°2, prop.6) que $\dim(O_y)\leq\dim(O_x)$, et par suite (n°2, prop.8) $\dim(O_x)=\dim(O_y)$; le cor.1 du th.1 donne alors $\deg.\mathrm{tr}._{K(y)}K(x)\leq e$, et on conclut à l'aide de la prop.10 (ii) du n°3.

Corollaire .- Si f est ouvert, pour tout $y\in f(X)$, toutes les composantes de $f^{-1}(y)$ sont de dimension e.

la conclusion de la prop. 16 implique que

Au chap.III nous verrons inversement que lorsque Y est normale en y, f est universellement ouvert au-dessus de y.

Archives Grothendieck-Apt 59

p. 71 , before prop. 10 , add :

<u>Corollaire 3 .- Si</u> $f : X \to Y$ <u>est de type fini , il en est de même de</u> f_{red} .

On a en effet le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X_{red} & \xrightarrow{f_{red}} & Y_{red} \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j'} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

d'après les prop. 7 et 8 , $f \circ j$ est de type fini , donc il en est de même de $j' \circ f_{red}$; mais j' étant une immersion fermée , est de type fini (prop 7) , et la conclusion résulte du cor. 2 .

P. 52 after the proof of prop. 9 insert a corollary :

<u>Corollaire XX.- Soient</u> X <u>un</u> <u>préschéma réduit</u> , $f : X \to Y$ <u>un morphisme</u> , Z <u>le sous-préschéma fermé réduit de</u> Y <u>ayant pour</u> <u>espace de base l'adhérence</u> $\overline{f(X)}$; <u>alors f se factorise en</u> $X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{i} Y$, <u>où i est le morphisme d'injection</u> .

On se ramène aussitôt au cas où $Y = \mathrm{Spec}(B)$ est affine ; soit φ l'homomorphisme $\Gamma(Y, O_Y) = B \to \Gamma(X, O_X)$ correspondant à f (§ 2, n°2, prop. 3). Désignons par $\underline{a}$ le noyau de φ , et soit Z le sous-préschéma fermé de Y défini par le faisceau quasi-cohérent $\tilde{\underline{a}}$; comme φ se factorise en $B \to B/\underline{a} \to \Gamma(X, O_X)$, on est ramené au cas où $\underline{a} = 0$, $Z = Y$, et tout revient à démontrer dans ce cas que Y est réduit et f(X) partout dense dans Y . Soit (V_α) un recouvrement de X par des ouverts affines , et soit φ_α l'homomorphisme $B \to \Gamma(V_\alpha, O_X|V_\alpha)$ composé de φ et de l'homomorphisme de restriction ; si a_α est le noyau de φ_α , on a $\bigcap_\alpha a_\alpha = (0)$. Notons d'autre part que comme X est réduit , il n'y a pas d'élément nilpotent dans $\Gamma(V_\alpha, O_X|V_\alpha)$; donc l'image par φ_α d'un élément nilpotent b de B est nécessairement 0 , d'où $b \in a_\alpha$ pour tout α, autrement dit $b = 0$. D'autre part , dire que $y \in f(X)$ signifie que j_y est de la forme $\varphi_\alpha^{-1}(j_x)$ pour un α et un $x \in V_\alpha$; comme l'interse tion des $\mathfrak{j}_x$ pour $x \in V_\alpha$ est réduite à 0 , l'intersection des $\varphi_\alpha^{-1}(\mathfrak{j}_x)$ pour $x \in V_\alpha$, est $\mathfrak{a}_\alpha$; on en conclut que $\bigcap_{y \in f(X)} \mathfrak{j}_y = \bigcap_\alpha \mathfrak{a}_\alpha = (0)$, d'où $Y = \overline{f(X)}$.

P.1 , after the definition of Spec(A) , add :

Pour que Spec(A) soit <u>vide</u> , il faut et il suffit que l'anneau A soit réduit à 0 .

P.27 , replace the last 5 lines of the proof of prop.4 by :

ma affine ; dans ce cas , la proposition résulte du :

<u>Lemme 2 bis .- Soient</u> A <u>un anneau</u> , S <u>une partie multiplicative de</u> A, φ <u>l'homomorphisme canonique</u> $A \to S^{-1}A$; <u>alors</u> ${}^a\varphi$ <u>est un homéomorphisme de</u> $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ <u>sur le sous-espace de</u> Spec(A) <u>formé des x tels que</u> $\mathfrak{j}_x \cap S = \emptyset$; <u>et pour tout</u> $y \in \mathrm{Spec}(S^{-1}A)$, <u>si on pose</u> $x = {}^a\varphi(y)$ $\varphi_y^\flat$ <u>est un isomorphisme de</u> O_x <u>sur</u> O_y .

La première partie a déjà été démontrée (§ 1,n°2,cor.3 de la prop.5) La seconde est un résultat classique d'algèbre commutative (chap.0,§ 1,n°).

P. 41 bis (end of § 2,n°7) , replace Prop.19 by :

<u>Proposition 19 .- Soient</u> $f : X \to Y$ <u>un morphisme</u> , <u>y un point de</u> Y ,Z <u>le préschéma</u> $\mathrm{Spec}(O_y)$, $p = (\psi, \theta)$ <u>la projection</u> $X \times_Y \mathrm{Spec}(O_y) \to X$; ψ <u>est un homéomorphisme de l'espace de base de</u> $X \times_Y Z$ <u>sur le sous-espace</u> $f^{-1}(Z)$ <u>de l'espace de base de</u> X ; <u>et pour tout</u> $t \in X \times_Y Z$, <u>si on pose</u> $z = \psi(t)$, $\theta_t^\flat$ <u>est un isomorphisme de</u> O_z <u>sur</u> O_t .

Comme l'image canonique de Z dans Y (identifiée à Z) est contenue dans tout ouvert affine contenant y (n°2) , on se ramène encore , comme dans la prop.17 , au cas où X=Spec(A) et Y=Spec(B) sont affines A étant une algèbre sur B . Alors $X \times_Y Z$ est le spectre premier de

$A \otimes_B B_y$, et cet anneau s'identifie à $S^{-1}A$, où S est l'image de $B-j_y$ dans A (chap.0, § 1,n°2) . Comme p identifie $X \times_Y Z$ et $f^{-1}(Z)$ en tant qu'ensembles (cor.1 de la prop.15 et prop.16), la proposition résulte du lemme 2 bis du n°2 .

P.58 , cor. of prop.18 becomes cor.1 ; add afterwards :

<u>Corollaire 2 .- Si</u> X,Y <u>sont deux</u> S-<u>préschémas tels que</u> Y <u>soit séparé au-dessus de</u> S , <u>la projection</u> $X \times_S Y \to X$ <u>est un morphisme séparé</u> .

Il suffit , dans la prop.18 , de remplacer Y par S et S' par Y (§ 2, n°5, cor. de la prop.8).

P.62 , after cor.3 of prop.22 , add :

<u>Corollaire 4 .- Soient</u> X_1, X_2 <u>deux</u> S-<u>préschémas séparés au-dessus de</u> S ; <u>soient</u> $f : Y \to X_1$, $g : Y \to X_2$ <u>deux</u> S-<u>morphismes . Si f ou g est une immersion fermée</u> , $(f,g)_S$ <u>est une immersion fermée</u> .

En effet , on sait (n°6, cor.2 de la prop.18) que les projections p_1, p_2 sont des morphismes séparés ; le corollaire résulte donc du cor.1 .

P.65 , after def.1 , add :

<u>Remarque</u> .- Si X est localement noethérien , le faisceau structural O_X est un <u>faisceau cohérent d'anneaux</u> (FAC,I,2,15) : en effet , il suffit de montrer que le noyau d'un homomorphisme $O_X^{\nu} \to O_X$ est un O_X-Module de type fini ; la question étant locale , on est ramené au cas où X=Spec(A) , A étant un anneau noethérien , et tout revient à remarquer que le noyau d'un homomorphisme $A^{\nu} \to A$ est de type fini (§ 1,n°3,cor.4 du th.1) . On en déduit en particulier que tout <u>faisceau quasi-cohérent d'idéaux</u> dans O_X est cohérent , et que si F est un O_X-Module pour lequel , tout $x \in X$ a un voisinage U tel que F|U soit isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $O_X^p|U \to O_X^q|U$, F est cohérent (FAC, <u>loc.cit.</u>).

quasi-cohérent
<u>sous-faisceau</u>
un faisceau
... sur X
est cohérent, plus
particulièrement,
tout

P.67 , replace def.2 by :

<u>Définition 2 .- On dit qu'un préschéma est artinien s'il est affine et si son anneau est artinien</u> .

P.74 , replace the line before cor.1 by :

X est un schéma <u>fini sur</u> K , de <u>rang</u> $[A:K]$, que l'on note $rg_K(X)$; pour deux préschémas finis sur K , X,Y , on a

$$rg_K(X+Y)=rg_K(X)+rg_K(Y) \quad , \quad rg_K(X\times_K Y)=rg_K(X)rg_K(Y) .$$

P.78 , after cor. to prop.16 , add :

<u>Remarque</u> .- Si $\theta^{\flat}_x$ est surjectif , il résulte de la démonstration de la prop.16 (i) que l'on peut toujours supposer que l'ensemble ouvert U est de la forme $\psi^{-1}(V)$, où V est ouvert dans Y .

P.1 , after the introduction of f(x) , add :

Plus généralement , lorsque (X,O_X) est un espace annelé tel que tout anneau O_x soit un anneau <u>local</u> , pour toute section $f\in\Gamma(X,O_X)$,nous désignerons par f(x) la classe du germe f_x de f au point $x\in X$, modulo l'idéal maximal de O_x .

(This of course will ultimately go into chap.0 when that chapter is rewritten).

P. 54 , at the end of n°4 , add :

Nous dirons qu'un préschéma X est <u>intègre</u> s'il est <u>irréductible</u> et <u>réduit</u> . Il revient au même de dire que l'espace de base X est irréductible et que le faisceau structural O_X est <u>intègre</u> (i.e. que chaque fibre O_x est intègre) ,comme il résulte de la prop.4 du § 1,n°1.

P. II-4 , replace the 8 lines after def.1 by:

Si les X_i $(1\leq i\leq n)$ sont des S-préschémas , F_i un faisceau quasi-cohérent sur X_i $(1\leq i\leq n)$, on définit de la même manière le produit tensoriel $F_1\otimes_S F_2\otimes\cdots\otimes_S F_n$ sur le préschéma $X_1\times_S X_2\times\cdots\times_S X_n$; c'est un faisceau quasi-cohérent , et il est cohérent si les F_i le sont et si les X_i et le produit $X_1\times_S X_2\times\cdots\times_S X_n$ sont localement noethériens .

On notera que si on prend X=Y=S , on retrouve la notion usuelle de produit tensoriel de O_S-modules . En outre , comme $q^*(O_Y)=O_{X\times_S Y}$ (chap.0,§ 2,n°6) , le produit $F\otimes_S O_Y$ s'identifie canoniquement à $p^*(F)$, et de même $O_X\otimes_S G$ s'identifie canoniquement à $q^*(G)$. Plus particulièrement , si on prend Y=S et qu'on désigne par f le morphisme structural X Y , on a $O_X\otimes_Y G=f^*(G)$: le produit tensoriel ordinaire et l'image réciproque apparaissent donc comme des cas particuliers du produit tensoriel général .

P. II-12 , replace the last line of the proof of prop.10 by :

$u(s)\in\Gamma(U,O_X)$. Pour voir qu'on définit ainsi un isomorphisme , on peut supposer que $L|U$ et $L'|U$ sont isomorphes à $O_X|U$; autrement dit, on est ramené au cas où $L=L'=O_X$, et la proposition est alors immédiate .

P. II-22 , after the definition of $A(X)$, add :

Si U est une partie ouverte de S , on a donc $\underline{A}(f^{-1}(U))=\underline{A}(X)|U$.

P. II-29 , after cor.3 , add :

<u>Corollaire 4 .- Soit</u> X <u>un préschéma affine au-dessus de</u> S ; <u>pour que</u> X <u>soit de type fini sur</u> S , <u>il faut et il suffit que la</u> O_S-<u>Algèbre</u> $\underline{A}(X)$ <u>soit de type fini</u> .

On est aussitôt ramené au cas où S est affine ; alors X est un schéma affine (cor.2) et si S=Spec(A) , X=Spec(B) , $\underline{A}(X)$ est le faisceau associé à la A-algèbre B ; ~~XXXXXXXXXX~~ le corollaire résulte donc des définitions et de I,4,2,prop.6 .

P.II-33 , at the end of prop.12 , add :

(vi) <u>Si</u> f : X→Y <u>est affine , il en est de même de</u> f_{red} .

P.II-33 , at the end of the proof of prop.12 , add :

Enfin , pour démontrer (vi) , on remarque que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_{red} \arrow[r, "f_{red}"] \arrow[d] & Y_{red} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

est commutatif , les flèches verticales étant des immersions fermées, donc des morphismes séparés ; la conclusion résulte alors de (ii) et de (v) .

P.II-36 , at the end of prop.15 , add :

(vi) <u>Si</u> f : X→Y <u>est un morphisme fini</u> (resp. <u>entier) , il en est de même de</u> f_{red} .

P.II-37 , at the end of the proof of prop.15 , add :

Enfin , (vi) se déduit de (i), (ii) et (v) par le même raisonnement formel que dans la prop.12 .

P.II-38 , before n°8 , add :

<u>Proposition 17 .- Soit</u> f : X→Y <u>un morphisme fini . Alors , pour tout</u> y∈Y , <u>la fibre</u> $f^{-1}(y)$ <u>est un espace discret fini</u> .

En effet, en tant que $\underline{k}(y)$-préschéma, $f^{-1}(y)$ est identifié à $X \times_Y \mathrm{Spec}(\underline{k}(y))$ (I,2,7,prop.17), qui est fini au-dessus de $\mathrm{Spec}(\underline{k}(y))$ (prop.15 (iii)) ; c'est donc un schéma affine dont l'anneau est une algèbre de dimension finie sur $\underline{k}(y)$ (prop.14). Le corollaire résulte par suite de I,4,2,prop.12 .

P.II-3, in the statement of prop?2, suppress the assumption on Y, and replace the proof by :

Si G est quasi-cohérent (resp. cohérent), pour tout $x \in X$, il y a un voisinage ouvert V de f(x) tel que $G|V$ soit isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $O_Y^{(I)}|V \to O_Y^{(J)}|V$ (resp. $O_Y^m|V \to O_Y^n|V$). Comme $f^*(O_Y) = O_X$ et que f^* est exact à droite et commute aux sommes directes (chap 0,§ 2,n°), on voit que si $U = f^{-1}(V)$, $f^*(G)|U$ est isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $O_X^{(I)}|U \to O_X^{(J)}|U$ (resp. $O_X^m|U \to O_X^n|U$) ; d'où la proposition, compte tenu de ce que X est localement noethérien, lorsque G est supposé cohérent .

P.II-4, in the statement about the tensor product $F_1 \otimes_S F_2 \otimes \ldots \otimes_S F_n$, delete the assumption that the X_i are locally noetherian.

P.II-8, add a footnote concerning the "set" N :

(*) Pour que $\underline{N}$ soit un ensemble, il faut modifier légèrement la définition donnée ci-dessus. Convenons d'appeler hauteur d'un faisceau H sur un espace V le plus petit cardinal supérieur aux cardinaux des fibres de H. Etant donné un préschéma X, et un cardinal $\underline{m}$, il y a un ensemble $\underline{N}$ de faisceaux quasi-cohérents définis sur des ouverts de X tel que, pour tout couple (V,H) formé d'un ouvert $V \subset X$ et d'un faisceau quasi-cohérent H sur V, de hauteur $\leq \underline{m}$, il y ait un faisceau $\underline{H}' \in \underline{N}$ tel que $\underline{H}'$ et $\underline{H}$ soient isomorphes (cela est dû à ce que pour un anneau donné A, tout A-module de cardinal $\leq \underline{m}$ est isomorphe à un quotient de $A^{(\underline{m})}$). D'autre part si X est affine noethérien et si F est donné sur U, de hauteur $\underline{n}$, la méthode de I,1,4,th.2 donne un faisceau quasi-cohérent sur X, induisant F et dont la hauteur est $\leq \underline{n}^{\mathrm{Card}(U)}$. Dans le cas général, on prend pour $\underline{m}$ un cardinal infini supérieur à $\underline{n}^{\mathrm{Card}(X)}$; on considè re l'ensemble $\underline{N}$ correspondant , que l'on peut supposer être tel que deux faisceaux distincts de $\underline{N}$ ne sont jamais isomorphes . On ordonne alors N par la relation "il existe une immersion ouverte de N dans N'", et le reste de la démonstration est inchangée (on peut évidemment supposer que $F\in\underline{N}$).

From p.II-11 on , the word "divisoriel" should everywhere be replaced by "inversible" . P.II-12 , in the remark after def.1 , add :

si O_X est un faisceau d'anneaux cohérent .

P.II-12 , replace the proof of prop.11 by :

Plus généralement , si L est localement ~~libre de rang fini~~ , L' un O_X-module quelconque , on a un isomorphisme canonique fonctoriel $\underline{Hom}_{O_X}(L,O_X)\otimes_{O_X}L'\simeq\underline{Hom}_{O_X}(L,L')$: pour tout ouvert U tel que $L|U$ soit isomorphe à $O_X^n|U$, à tout couple (u,t) où $u\in\Gamma(U,\underline{Hom}_{O_X}(L,O_X))$ et $t\in\Gamma(U,L')$, on fait correspondre l'élément $s\to u(s)t$ de $\Gamma(U,\underline{Hom}_{O_X}(L,L'))$. Pour voir qu'on a un isomorphisme, on peut supposer U=X , et comme $\underline{Hom}_{O_X}(O_X^n,O_X)$ est canoniquement isomorphe à O_X^n et $\underline{Hom}_{O_X}(O_X^n,L')$ à L'^n, on est ramené au cas $L=O_X$, qui est immédiat .

P.II-15 , line 7 , add :

l'associativité de cette multiplication se vérifie aussitôt .

P.II-15 and 16 , replace subsection D) by :

__Proposition 13 .- Soient__ (X,O_X) __un espace annelé tel que les__ $O_X(x)=O_x$ __soient des anneaux locaux , dont on désigne par__ $\underline{m}_x$ __l'idéal maximal . Soit__ L __un__ O_X__-module inversible , et soit__ $f\in\Gamma(X,L)$. __Pour tout__ $x\in X$, __les conditions suivantes sont équivalentes : a)__ f_x __est un générateur de__ O_x ; b) $f_x\notin\underline{m}_xL_x$; c) __il existe une section__ g __de__ L^{-1} __au-dessus d'un voisinage__ U __de__ x __telle que l'image canonique de__ $f\otimes g$ __dans__ $\Gamma(U,O_X)$ (prop.10) __soit l'unité__ .

On peut évidemment se borner au cas où $L=O_X$; l'équivalence de a) et b) est évidente , et il est clair que c) entraîne b) ; d'autre part, si $f_x \notin m_x$, f_x est inversible dans O_x, soit $f_x g_x = 1_x$. Par définition des germes de sections, cela veut dire qu'il existe un voisinage U de x et une section g de O_X au-dessus de U telle que $fg = 1$ dans U, d'où c).

Corollaire 1 .- L'ensemble X_f des x vérifiant les conditions équivalentes a), b), c) est ouvert dans X.

Cela est évident pour la condition c).

Corollaire 2 .- Soient L, L' deux faisceaux inversibles sur X (les O_x étant supposés être des anneaux locaux) ; si $f \in \Gamma(X,L)$, $g \in \Gamma(X,L')$ on a

(1) $$X_f \cap X_g = X_{f \otimes g}.$$

Par définition, on peut en effet se ramener au cas où $L = L' = O_X$; alors $f \otimes g$ s'identifie au produit fg, et le corollaire est évident.

Par abus de langage, on dit parfois (lorsqu'aucune confusion n'en résulte) que X_f est l'ensemble des $x \in X$ où f ne s'annule pas.

Remarque .- Supposons que X soit un schéma local (I,2,2) ; si a est l'unique point fermé de X, tout ouvert affine contenant a est nécessairement X tout entier ; il s'ensuit que tout faisceau inversible sur X est nécessairement isomorphe à O_X (ou, comme on dit encore, est trivial). Cette propriété n'a pas lieu en général pour un schéma affine quelconque Spec(A) ; on verra au chap.IV que si A est un anneau normal, elle équivaut au fait que A est factoriel.

P. II-18, in prop.14 (former prop.15), ~~xxxxxxxxx~~ instead of $\underline{J}(x) = 0$, read :

tels que le support de F soit contenu dans le support de $O_X/\underline{J}$.

P.II-18, line -4, instead of "contenu dans Y" read "égal à Y".

P. II-20 , replace lines 3-14 by :

«Montrons que pour tout $z \notin Y' \cap Y''$, l'homomorphisme $F(z) \to F'(z) \oplus F''(z)$ est *bijectif* . En effet , par définition de J , on a $J' \cap J'' = J$; si $z \notin Y''$, on a donc $J'(z) = J(z)$ et par suite pour tout germe de section $\tilde{s}(z)$ de $F(z)$, on a $\tilde{s}(z) \otimes 1_z = \tilde{s}(z)$; autrement dit $F'(z) = F(z)$, et comme $F''(z) = 0$, notre assertion est établie dans ce cas ; on raisonne de même si $z \notin Y'$. Par suite , le noyau et le conoyau de $\varphi : F \to F' \oplus F''$ ont leurs supports dans $Y' \cap Y''$, et sont dans $\underline{K}'$ par hypothèse ; il en est de même de F' et F'' pour la même raison , donc $F' \oplus F''$ est aussi dans $\underline{K}'$, $\underline{K}'$ étant exacte . La conclusion résulte alors de la considération des deux suites exactes

$$0 \to \mathrm{Im}\,\varphi \to F' \oplus F'' \to \mathrm{Coker}\,\varphi \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Ker}\,\varphi \to F \to \mathrm{Im}\,\varphi \to 0$$

et de l'hypothèse que $\underline{K}'$ est exacte .

P.II-21 , last line of corollary , instead of "remplacée par $G_y \neq 0$" read "supprimée" .

P.II-52 , replace Prop.7 by :

Proposition 7 .- Si l'anneau S *est intègre , le schéma* Proj(S) *est réduit et son espace de base est irréductible et non vide . Inversement , si* Proj(S) *possède ces propriétés , et si en outre* S_+ *ne contient pas d'élément nilpotent* $\neq 0$ *et* S_0 *ne contient pas de diviseur de* 0 *dans* S , *alors* S *est intègre.*

Si S est intègre , (0) est un idéal premier gradué , donc l'irréductibilité de l'espace de base Proj(S) résulte du cor.6 de la prop.5 . D'autre part , pour f homogène $\neq 0$ dans S_+ , S_f , et a fortiori $S_{(f)}$, n'a pas d'élément nilpotent et n'est pas réduit à 0 , donc $D_+(f)$ est un schéma réduit non vide ; il en est par suite de même de X=Proj(S) (I,3,4,déf.5) . Réciproquement , si S_+ n'a pas d'élément nilpotent $\neq 0$, pour tout f homogène $\neq 0$ dans S , $D_+(f) \neq \emptyset$ (cor.1 de la prop. 4) ; l'hypothèse que Proj(S) est irréductible entraîne $D_+(f) \cap D_+(g) \neq \emptyset$ pour f, g homogènes et $\neq 0$ dans S_+ , donc $fg \neq 0$ d'après (7) , ce qui montre que S_+ n'a pas de diviseur de 0 ; comme S_0 ne contient pas non plus de diviseur de 0 dans S , on en conclut aussitôt que S est intègre .

P. II-60 , after line 8 , add :

(puisque $O_X(n)$ est localement libre)

Il est clair que Γ_* est un foncteur covariant additif <u>exact à gauche</u> ; en particulier , si $\underline{J}$ est un faisceau d'idéaux sur X , $\Gamma_*(\underline{J})$ s'identifie à un <u>idéal gradué</u> de $\Gamma_*(O_X)$.

P. II-62 , before n°4 , add :

<u>Remarque</u> .- Avec les notations antérieures , les homomorphismes composés

$$(20) \qquad \tilde{M} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} (\Gamma_*(\tilde{M}))^\sim \xrightarrow{\beta} \tilde{M}$$

$$\text{et} \quad (21) \qquad \Gamma_*(F) \xrightarrow{\alpha} \Gamma_*((\Gamma_*(F))^\sim) \xrightarrow{\Gamma_*(\beta)} \Gamma_*(F)$$

sont les <u>isomorphismes identiques</u> . En effet , la vérification de (20) est locale , et dans un ouvert affine $D_+(f)$, elle résulte aussitôt des définitions et de ce que β , appliqué à des faisceaux quasi-cohérents , est déterminé par son action sur les sections au-dessus de $D_+(f)$ (I, 1, 3, cor. 2 du th. 1) . La vérification de (21) se fait pour chaque degré séparément : si on pose $M = \Gamma_*(F)$, on a $M_n = \Gamma(X, F(n))$ et $(\Gamma_*(\tilde{M}))_n = \Gamma(X, \tilde{M}(n)) = \Gamma(X, (M(n))^\sim)$. Or , si $f \in S_1$ et $z \in M_n$, $\alpha_n^f(z)$ est l'élément $z/1$ de $(M(n))_{(f)}$, égal à $(f/1)^n(z/f^n)$; il lui correspond par β la section $((\alpha_1(f))^n | D_+(f))((z|D_+(f))(\alpha_1(f))^n | D_+(f))^{-1})$ au-dessus de $D_+(f)$, c'est-à-dire la restriction de z à $D_+(f)$, ce qui vérifie (21) .

re l'ensemble $\underline{N}$ correspondant, que l'on peut supposer être tel que deux faisceaux distincts de $\underline{N}$ ne sont jamais isomorphes. On ordonne alors N par la relation "il existe une immersion ouverte de H dans H'", et le reste de la démonstration est inchangée (on peut évidemment supposer que $F\in\underline{N}$).

From p.II-11 on, the word "divisoriel" should everywhere be ~~XXX~~ replaced by "inversible". P.II-12, in the remark after def.1, add :

~~XX~~ si O_X est un faisceau d'anneaux cohérent.

P.II-12, replace the proof of prop.11 by :

Plus généralement, si L est localement libre de rang fini, L' un O_X-module quelconque, on a un isomorphisme canonique fonctoriel $\underline{Hom}_{O_X}(L,O_X)\otimes_{O_X}L' \simeq \underline{Hom}_{O_X}(L,L')$: pour tout ouvert U tel que $L|U$ soit isomorphe à $O_X^n|U$, à tout couple (u,t) où $u\in\Gamma(U,\underline{Hom}_{O_X}(L,O_X))$ et $t\in\Gamma(U,L')$, on fait correspondre l'élément $s\to u(s)t$ de $\Gamma(U,\underline{Hom}_{O_X}(L,L'))$. Pour voir qu'on a un isomorphisme, on peut supposer U=X, et comme $\underline{Hom}_{O_X}(O_X^n,O_X)$ est canoniquement isomorphe à O_X^n et $\underline{Hom}_{O_X}(O_X^n,L')$ à ~~XXX~~ L'^n, on est ramené au cas $L=O_X$, qui est immédiat.

P.II-15, line 7, add :

l'associativité de cette multiplication se vérifie aussitôt.

P.II-15 and 16, replace subsection D) by :

Proposition 13. - Soient (X,O_X) un espace annelé tel que les $O_X(x)=O_x$ soient des anneaux locaux, dont on désigne par $\underline{m}_x$ l'idéal maximal. Soit L un O_X-module inversible, et soit $f\in\Gamma(X,L)$. Pour tout $x\in X$, les conditions suivantes sont équivalentes : a) ~~XX~~ f_x est un générateur de O_x ; b) $f_x\notin \underline{m}_x L_x$; c) il existe une section g de L^{-1} au-dessus d'un voisinage U de x telle que l'image canonique de $f\otimes g$ dans ~~XX~~ $\Gamma(U,O_X)$ (prop.10) soit l'unité.

On peut évidemment se borner au cas où $L=O_X$; l'équivalence de a) et b) est évidente, et il est clair que c) entraîne b) ; d'autre part, si $f_x \notin m_x$, f_x est inversible dans O_x, soit $f_x g_x = 1_x$. Par définition des germes de sections, cela veut dire qu'il existe un voisinage U de x et une section g de O_X au-dessus de U telle que $fg = 1$ dans U, d'où c).

<u>Corollaire 1.- L'ensemble</u> X_f <u>des x vérifiant les conditions équivalentes a), b), c) est ouvert dans</u> X.

Cela est évident pour la condition c).

<u>Corollaire 2.- Soient</u> L, L' <u>deux faisceaux inversibles sur</u> X <u>(les</u> O_x <u>étant supposés être des anneaux locaux) ; si</u> $f \in \Gamma(X, L)$, $g \in \Gamma(X, L')$ <u>on a</u>

(1) $$X_f \cap X_g = X_{f \otimes g} .$$

Par définition, on peut en effet se ramener au cas où $L = L' = O_X$; alors $f \otimes g$ s'identifie au produit fg, et le corollaire est évident.

Par abus de langage, on dit parfois (lorsqu'aucune confusion n'en résulte) que X_f est l'ensemble des $x \in X$ où <u>f ne s'annule pas</u>.

<u>Remarque</u> .- Supposons que X soit un <u>schéma local</u> (I,2,2) ; si a est l'unique point fermé de X, tout ouvert affine contenant <u>a</u> est nécessairement X tout entier ; il s'ensuit que tout faisceau inversible sur X est nécessairement <u>isomorphe à</u> O_X (ou, comme on dit encore, est <u>trivial</u>). Cette propriété n'a pas lieu en général pour un schéma affine quelconque Spec(A) ; on verra au chap.IV que si A est un anneau normal, elle équivaut au fait que A est <u>factoriel</u>.

P. II-18, in prop.14 (former prop.15), ~~[illegible]~~ instead of $\underline{J}(x) = 0$, read :

<u>tels que le support de</u> F <u>soit contenu dans le support de</u> $O_X/\underline{J}$.

P.II-18, line -4, instead of "contenu dans Y" read "égal à Y".

P.112 , before n°3 , insert :

Remarque .- Rappelons enfin la définition de la dimension d'un anneau local noethérien A par son polynôme caractéristique , que nous utiliserons au chap.III : si $\underline{q}$ est un idéal de définition de A , la longueur de $A/\underline{q}^n$ est un polynôme en n pour les valeurs assez grandes de n , et le degré de ce polynôme est la dimension de A (th. de Hilbert-Samuel) .

P.23-24 , after prop.1 , add :

Lorsque $y \in \overline{\{x\}}$, on dit que y est spécialisation de x .

Archives
Grothendieck - sept. 59

Compléments au chap. 0

1. Limites projectives de faisceaux.

Soient X un espace topologique, $(\underline{F}_\alpha, u_{\alpha\beta})$ un *système projectif* de faisceaux de groupes abéliens sur X ; pour $\alpha\leq\beta$, u est donc un homomorphisme $\underline{F}_\beta\to\underline{F}_\alpha$, avec la condition de transitivité $u_{\alpha\gamma} = u_{\alpha\beta}\cdot u_{\beta\gamma}$ pour $\alpha\leq\beta\leq\gamma$. Pour tout ouvert $U\subset X$, les $\Gamma(U,\underline{F}_\alpha)$ forment un système projectif pour les $\Gamma(u_{\alpha\beta})$, et si $U\supset V$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Gamma(U,\underline{F}_\beta) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(U,\underline{F}_\alpha) \arrow[d] \\ \Gamma(V,\underline{F}_\beta) \arrow[r] & \Gamma(V,\underline{F}_\alpha) \end{tikzcd} \qquad (\text{pour } \alpha\leq\beta)$$

est commutatif. On en conclut que si on pose $\underline{F}(U)=\varprojlim \Gamma(U,\underline{F}_\alpha)$, les $\underline{F}(U)$ forment un *préfaisceau* de groupes abéliens sur X, l'opération de restriction $\underline{F}(U)\to\underline{F}(V)$ pour $U\supset V$ étant définie comme limite projective des $\Gamma(U,\underline{F}_\alpha)\to\Gamma(V,\underline{F}_\alpha)$. On vérifie immédiatement que ce préfaisceau est en fait un *faisceau* $\underline{F}$, qu'on écrit $\varprojlim \underline{F}_\alpha$ (cf. G, II, 1.10). En outre les homomorphismes canoniques $\Gamma(U,\underline{F})\to\Gamma(U,\underline{F}_\alpha)$ définissent des homomorphismes de faisceaux $u_\alpha : \underline{F}\to\underline{F}_\alpha$ tels que $u_\alpha=u_{\alpha\beta}\circ u_\beta$ pour $\alpha\leq\beta$. On notera que $\underline{F}$ est un sous-faisceau du faisceau produit $\prod_\alpha \underline{F}_\alpha$. Pour tout $x\in X$, on déduit des homomorphismes $u_{\alpha\beta}$ une famille d'homomorphismes $\underline{F}_\beta(x)\to\underline{F}_\alpha(x)$ qui forment un système projectif, et comme pour tout U ouvert contenant x, on a un homomorphisme canonique $\Gamma(U,\underline{F}_\alpha)\to\underline{F}_\alpha(x)$, ces homomorphismes donnent par limite projective un homomorphisme $\Gamma(U,\underline{F})\to\varprojlim \underline{F}_\alpha(x)$, et par suite un homomorphisme $\underline{F}(x)\to\varprojlim \underline{F}_\alpha(x)$, mais en général cet homomorphisme *n'est pas bijectif*.

Soient $(\underline{F}_\alpha,u_{\alpha\beta})$, $(\underline{G}_\alpha,v_{\alpha\beta})$ deux systèmes projectifs de faisceaux de groupes abéliens sur X, et soit $f_\alpha : \underline{F}_\alpha\to\underline{G}_\alpha$ un système projectif d'homomorphismes, les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \underline{F}_\beta \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[d, "u_{\alpha\beta}"'] & \underline{G}_\beta \arrow[d, "v_{\alpha\beta}"] \\ \underline{F}_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"'] & \underline{G}_\alpha \end{tikzcd}$$

étant donc commutatifs pour $\alpha\leq\beta$. Pour tout ouvert $U\subset X$, les

$\Gamma_U(f)$: $\Gamma(U,\underline{F}_\alpha) \to \Gamma(U,\underline{G}_\alpha)$ forment un système projectif d'homomorphismes , les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U,\underline{F}_\alpha) & \to & \Gamma(U,\underline{G}_\alpha) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(V,\underline{F}_\alpha) & \to & \Gamma(V,\underline{G}_\alpha) \end{array}$$

étant en outre commutatifs pour $U \supset V$; on en conclut que si $f_U = \varprojlim \Gamma_U(f_\alpha)$, les homomorphismes f_U définissent un homomorphisme de faisceaux $f : \varprojlim \underline{F}_\alpha \to \varprojlim \underline{G}_\alpha$, que l'on désigne par $\varprojlim f_\alpha$.

On peut donc dire que $\varprojlim$ est un <u>foncteur</u> de la catégorie des systèmes projectifs de faisceaux de groupes abéliens sur X dans la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X . Ce foncteur est <u>exact à gauche</u> : autrement dit , si $(\underline{F}'_\alpha)$, $(\underline{F}_\alpha)$, $(\underline{F}''_\alpha)$ sont trois systèmes projectifs de faisceaux de groupes abéliens sur X , et si pour chaque α , on a une suite exacte avec commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \underline{F}'_\beta & \xrightarrow{f_\beta} & \underline{F}_\beta & \xrightarrow{g_\beta} & \underline{F}''_\beta \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \underline{F}'_\alpha & \longrightarrow & \underline{F}_\alpha & \longrightarrow & \underline{F}''_\alpha \end{array}$$

pour $\alpha \leq \beta$, alors en posant $f = \varprojlim f_\alpha$, $g = \varprojlim g_\alpha$, la suite

$$0 \longrightarrow \varprojlim \underline{F}'_\alpha \xrightarrow{f} \varprojlim \underline{F}_\alpha \xrightarrow{g} \varprojlim \underline{F}''_\alpha$$

est exacte . Cela résulte aussitôt de ce que le foncteur Γ est exact à gauche , et de la propriété correspondante pour le foncteur $\varprojlim$ dans la catégorie des systèmes projectifs de groupes abéliens .

Soit φ une application continue de X dans un espace topologique Y . Si $(\underline{F}_\alpha)$ est un système projectif de faisceaux de groupes abéliens sur X , on a

$$\varphi_*(\varprojlim \underline{F}_\alpha) = \varprojlim \varphi_*(\underline{F}_\alpha) .$$

En effet , pour tout ouvert $V \subset Y$, on a par définition

$$\Gamma(V, \varprojlim \varphi_*(\underline{F}_\alpha)) = \varprojlim \Gamma(V, \varphi_*(\underline{F}_\alpha)) = \varprojlim \Gamma(\varphi^{-1}(V), \underline{F}_\alpha)$$
$$= \Gamma(\varphi^{-1}(V), \varprojlim \underline{F}_\alpha) = \Gamma(V, \varphi_*(\varprojlim \underline{F}_\alpha))$$

En particulier , si X est une partie fermée de Y , et si on identifie un faisceau sur Y de support contenu dans X au faisceau qu'il induit sur X , on voit en prenant pour φ l'injection canonique $X \to Y$ qu'une limite projective de tels faisceaux a encore son support contenu dans X .

Si maintenant $(\underline{G}_\alpha, v_{\alpha\beta})$ est un système projectif de faisceaux de groupes abéliens sur Y , $(\varphi^*(\underline{G}_\alpha))$ est un système projectif de faisceaux de groupes abéliens sur X , pour les homomorphismes $\varphi^*(v_{\alpha\beta})$; à toute section $s \in \Gamma(U, \varphi^*(\underline{G}))$, où $\underline{G} = \varprojlim \underline{G}_\alpha$, on peut associer la famille des sections $s_\alpha = v_\alpha \circ s \in \Gamma(U, \varphi^*(\underline{G}_\alpha))$, et on définit ainsi un homomorphisme canonique $\varphi^*(\varprojlim \underline{G}_\alpha) \to \varprojlim \varphi^*(\underline{G}_\alpha)$, mais cet homomorphisme n'est pas nécessairement bijectif .

Les considérations qui précèdent s'appliquent sans changement aux faisceaux d'anneaux et aux faisceaux de modules .

2 . La condition de Mittag-Leffler .

Soit $(A_\alpha, u_{\alpha\beta})$ un système projectif de groupes abéliens . On appelle *condition de Mittag-Leffler* la condition suivante :

(ML) *Pour tout indice* α , *il existe* $\beta \geq \alpha$ *tel que , pour tout* $\gamma \geq \beta$, *on ait* $u_{\alpha\gamma}(A_\gamma) = u_{\alpha\beta}(A_\beta)$.

On notera que cette condition est satisfaite si les $u_{\alpha\beta}$ sont *surjectives* ; il en est de même lorsque les A_α sont des modules *artiniens* sur un système projectif d'anneaux (les $u_{\alpha\beta}$ étant des di-homomorphismes) , car alors les $u_{\alpha\beta}(A_\beta)$, pour $\beta \geq \alpha$, forment un ensemble filtrant (pour $\supset$) de sous-modules de A_α , et ont par suite un plus petit élément .

Lemme 1 .- Soit $0 \to A'_\alpha \to A_\alpha \to A''_\alpha \to 0$ *une suite exacte de systèmes projectifs de groupes abéliens* .

(i) *Si* (A_α) *vérifie* (ML) , *il en est de même de* (A''_α) .

(ii) *Si* (A'_α) *et* (A''_α) *vérifient* (ML) , *il en est de même de* (A_α).

Soit $(u_{\alpha\beta})$ le système d'homomorphismes définissant le système projectif (A_α) ; nous désignerons son noyau par $H_{\alpha\beta}$; le système d'homomorphismes $(u'_{\alpha\beta})$ définissant (A'_α) est formé des restrictions $u_{\alpha\beta}|A'_\beta$, et le système d'homomorphismes $(u''_{\alpha\beta})$ définissant $(A''_\alpha)=(A_\alpha/A'_\alpha)$ est obtenu en passant aux quotients à partir de $(u_{\alpha\beta})$; le noyau de $u''_{\alpha\beta}$ est donc $(H_{\alpha\beta}+A'_\beta)/A'_\beta$.

(i) Si on a $u_{\alpha\beta}(A_\beta)=u_{\alpha\gamma}(A_\gamma)$, il résulte du fait que g_β et g_γ sont surjectives , que $u''_{\alpha\beta}(A''_\beta)=g_\alpha(u_{\alpha\beta}(A_\beta))=g_\alpha(u_{\alpha\gamma}(A_\gamma))=u''_{\alpha\gamma}(A''_\gamma)$.

(ii) Soit $x_\alpha\in A_\alpha$ tel que $x_\alpha=u_{\alpha\beta}(x_\beta)$ pour un $x_\beta\in A_\beta$; on en tire $g_\alpha(x_\alpha)=u''_{\alpha\beta}(g_\beta(x_\beta))$; supposons qu'il existe $x_\gamma\in A_\gamma$ tel que $g_\alpha(x_\alpha)=$ $=u''_{\alpha\gamma}(g_\gamma(x_\gamma))$; cela s'écrit $g_\alpha(x_\alpha-u_{\alpha\gamma}(x_\gamma))=0$, ou encore $u''_{\alpha\beta}(g_\beta(x_\beta-u_{\beta\gamma}(x_\gamma)))=0$. Posons $z_\beta=x_\beta-u_{\beta\gamma}(x_\gamma)$; on a par hypothèse $g_\beta(z_\beta)\in(H_{\alpha\beta}+A'_\beta)/A'_\beta$, donc $z_\beta\in H_{\alpha\beta}+A'_\beta$; il existe par suite $x'_\beta\in A'_\beta$ tel que $x_\alpha-u_{\alpha\gamma}(x_\gamma)=u_{\alpha\beta}(z_\beta)=u_{\alpha\beta}(x'_\beta)$. Supposons qu'il existe $x'_\gamma\in A'_\gamma$ tel que $u_{\alpha\beta}(x'_\beta)=u_{\alpha\gamma}(x'_\gamma)$; on en conclut $x_\alpha=$ $=u_{\alpha\gamma}(x_\gamma+x'_\gamma)$, ce qui achève la démonstration .

<u>Proposition 1 .- Soit</u> I <u>un ensemble ordonné filtrant admettant une partie cofinale dénombrable . Soit</u> $0\to A'_\alpha\to A_\alpha\to A''_\alpha\to 0$ <u>une suite exacte de systèmes projectifs de groupes abéliens , ayant</u> I <u>pour ensemble d'indices . Si</u> (A'_α) <u>satisfait à la condition</u> (ML) , <u>la suite</u>

$$0\to\varprojlim A'_\alpha\to\varprojlim A_\alpha\to\varprojlim A''_\alpha\to 0$$

<u>est exacte</u> .

Vu l'hypothèse , on peut se borner au cas où $I=\mathbb{N}$; par extraction d'une suite d'indices , on peut aussi supposer que , si u_{nm} désigne l'homomorphisme $A_m\to A_n$ pour $n\leq m$, tous les sous-groupes $u_{nm}(A'_m)$ sont égaux pour $n\leq m$; on désignera ce sous-groupe par B_n . Si on pose , pour simplifier , $v_n=u_{n,n+1}$, on a évidemment $v_n(B_{n+1})=B_n=v_n(A'_{n+1})$ et par suite $A'_{n+1}=B_{n+1}+(H_n\cap A'_{n+1})$, en désignant par H_n le noyau de v_n . Tout revient à prouver que l'homomorphisme

$\varprojlim g_n : \varprojlim A_n \to \varprojlim A''_n$ est surjective. Etant donnée une suite (x''_n) telle que $x''_n \in A''_n$ et $x''_n = v''_n(x''_{n+1})$ pour tout n, nous allons construire par récurrence une suite (x_n) telle que $x_n \in A_n$, $x''_n = g_n(x_n)$ et $x_n = v_n(x_{n+1})$ pour tout n. Supposons construite une suite $(x_0, \dots, x_{n-1}, y_n)$ telle que $x_i \in A_i$ pour $i \leq n-1$ et $y_n \in A_n$, $x''_i = g_i(x_i)$ pour $i \leq n-1$ et $x''_n = g_n(y_n)$ et enfin $x_i = v_i(x_{i+1})$ pour $i \leq n-2$, $x_{n-1} = v_{n-1}(y_n)$. Par hypothèse il existe $z_{n+1} \in A_{n+1}$ tel que $g_{n+1}(z_{n+1}) = x''_{n+1}$, donc $g_n(v_n(z_{n+1})) = x''_n = g_n(y_n)$; autrement dit $y_n - v_n(z_{n+1}) \in A'_n = B_n + (H_{n-1} \cap A'_n)$. Il existe par suite $z'_{n+1} \in B_{n+1}$ tel que $y_n - v_n(z_{n+1} + z'_{n+1}) \in H_{n-1}$. Posons $y_{n+1} = z_{n+1} + z'_{n+1}$, et $x_n = v_n(y_{n+1})$; il est clair que $v_{n-1}(x_n) = v_{n-1}(y_n) = x_{n-1}$, et comme $y_n - x_n \in A'_n$, $g_n(x_n) = x''_n$; enfin, comme $z'_{n+1} \in A'_{n+1}$, on a $g_{n+1}(y_{n+1}) = x''_{n+1}$, et la récurrence peut se poursuivre, d'où la proposition.

Corollaire.– Les hypothèses sur I *étant les mêmes, soit* $(K_\alpha)_{\alpha \in I}$ *un système projectif de complexes* $K_\alpha = (K^n_\alpha)_{n \in \mathbb{Z}}$ *dont l'opérateur différentiel est de degré +1. Pour chaque n il existe un homomorphisme canonique*

$$h_n : H^n(\varprojlim K_\alpha) \to \varprojlim H^n(K_\alpha) .$$

Si, pour tout degré n, le système projectif de groupes abéliens $(K^n_\alpha)_{\alpha \in I}$ *vérifie* (ML), *alors tous les homomorphismes* h_n *sont surjectifs. Si en outre, pour un degré n, le système projectif* $(H^{n-1}(K_\alpha))_{\alpha \in I}$ *vérifie* (ML), *l'homomorphisme* h_n *est bijectif*.

Désignons comme d'ordinaire par Z^n et B^n les groupes des cocycles et des cobords, et posons $K^n = \varprojlim K^n_\alpha$; l'existence des homomorphismes h_n provient de la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \to & K^{n-1}_\alpha & \to & K^n_\alpha & \to & K^{n+1}_\alpha & \to & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\cdots & \to & K^{n-1} & \to & K^n & \to & K^{n+1} & \to & \cdots
\end{array}$$

Considérons les suites exactes

$(*_n)$ $$0 \to B^n(K_\alpha) \to Z^n(K_\alpha) \to H^n(K_\alpha) \to 0$$

$$(**_n) \qquad 0 \to Z^{n-1}(K_\alpha) \to K_\alpha^{n-1} \to B^n(K_\alpha) \to 0$$

Comme $B^n(K_\alpha)$ est un quotient de K_α^{n-1}, l'hypothèse et le lemme 1 (i) montrent que $(B^n(K_\alpha))_{\alpha\in I}$ vérifie (ML) ; d'après la prop.1, la suite

$$0 \to \varprojlim B^n(K_\alpha) \to \varprojlim Z^n(K_\alpha) \to \varprojlim H^n(K_\alpha) \to 0$$

est exacte. Comme $\varprojlim B^n(K_\alpha)$ s'identifie à un sous-groupe de K^{n+1} contenant $B^n(K)$ et $\varprojlim Z^n(K_\alpha)$ à un sous-groupe de $Z^n(K)$, h_n est surjective. Si maintenant on suppose en outre que le système projectif $(H^{n-1}(K_\alpha))_{\alpha\in I}$ vérifie (ML), les suites exactes $(*_{n-1})$ et le lemme 1 (ii) montrent qu'il en est de même du système projectif $(Z^{n-1}(K_\alpha))_{\alpha\in I}$; mais alors la prop.1 appliquée aux suites exactes $(**_n)$, prouve que la suite

$$0 \to \varprojlim Z^{n-1}(K_\alpha) \to K^{n-1} \to \varprojlim B^n(K_\alpha) \to 0$$

est exacte ; comme $\varprojlim Z^{n-1}(K_\alpha) \subset Z^{n-1}(K)$ et $\varprojlim B^n(K_\alpha) \supset B^n(K)$, les inclusions précédentes sont nécessairement des égalités, et h_n est bijective.

<u>Proposition 2.- Soient</u> X <u>un espace topologique</u>, $(\underline{F}_k)_{k\in \underline{N}}$ <u>un système projectif de faisceaux de groupes abéliens sur</u> X, $\underline{F} = \varprojlim_k \underline{F}_k$. <u>On suppose vérifiées les conditions suivantes :</u>

(i) <u>Il existe une base</u> $\underline{B}$ <u>de la topologie de</u> X <u>telle que, pour tout</u> $U \in \underline{B}$ <u>et tout</u> $i > 0$, <u>le système projectif</u> $(H^i(U,\underline{F}_k))_{k\in\underline{N}}$ <u>vérifie</u> (ML).

(ii) <u>Pour tout</u> $x \in X$ <u>et tout</u> $i > 0$, <u>on a</u> $\varinjlim_U(\varprojlim_k H^i(U,\underline{F}_k)) = 0$, <u>lorsque</u> U <u>parcourt l'ensemble des voisinages de</u> x.

(iii) <u>Les homomorphismes</u> $u_{hk} : \underline{F}_k \to \underline{F}_h$ <u>définissant le système projectif</u> $(\underline{F}_k)$ <u>sont surjectifs</u>.

<u>Dans ces conditions, pour tout</u> $i \geq 0$, <u>l'homomorphisme canonique</u>

$$h_i : H^i(X,\underline{F}) \to \varprojlim_k H^i(X,\underline{F}_k)$$

<u>est surjectif ; si en outre le système projectif</u> $(H^{i-1}(X,\underline{F}_k))_{k\in\underline{N}}$ <u>vérifie</u> (ML) <u>pour une valeur de</u> i, h_i <u>est bijectif</u>.

a) Nous allons d'abord supposer que les $\underline{F}_k$ sont <u>flasques</u> ainsi que les noyaux des u_{hk} , et si (iii) est vérifiée , on a nécessairement $H^i(X,\underline{F})=0$ pour $i>0$. Il suffira de prouver que pour tout ouvert U de X et tout recouvrement ouvert $\underline{U}$ de U , on a $H^i(\underline{U},\underline{F})=0$ pour $i>0$; il en résultera en effet d'abord que pour la cohomologie de Čech , on a $\check{H}^i(U,\underline{F})=0$ pour tout $i>0$, puis (en vertu de G,II,5.9.2 appliqué à l'ensemble de tous les ouverts de X) que $H^i(X,\underline{F})=0$ pour tout $i>0$. Comme les $\underline{F}_k$ sont flasques , on a $H^i(\underline{U},\underline{F}_k)=0$ pour $i>0$ (G,II,5.2.3) ; considérons pour chaque k le complexe $C^*(\underline{U},\underline{F}_k)$ des cochaînes du nerf du recouvrement $\underline{U}$ (G,II,5.1) , qui forment évidemment un système projectif de complexes . Montrons que toutes les applications $C^*(\underline{U},\underline{F}_k)\to C^*(\underline{U},\underline{F}_h)$ $(h\leqslant k)$ sont surjectives ; il suffit évidemment par définition de montrer que pour tout ouvert V de X , $\Gamma(V,\underline{F}_k)\to\Gamma(V,\underline{F}_h)$ est surjectif ; mais cela résulte de ce que si $\underline{N}_{hk}$ est le noyau de u_{hk} , la suite $0\to\underline{N}_{hk}\to\underline{F}_k\to\underline{F}_h\to 0$ est exacte par hypothèse et donne donc la suite exacte de cohomologie

$$0\to\Gamma(V,\underline{N}_{hk})\to\Gamma(V,\underline{F}_k)\longrightarrow\Gamma(V,\underline{F}_h)\longrightarrow H^1(V,\underline{N}_{hk})\to\cdots$$

où $H^1(V,\underline{N}_{hk})=0$ puisque $\underline{N}_{hk}$ est flasque par hypothèse . Le système projectif $(C^*(\underline{U},\underline{F}_k))_{k\in\underline{N}}$ vérifie donc (ML) , et il en est de même de $(H^i(\underline{U},\underline{F}_k))_{k\in\underline{N}}$ pour tout $i\geqslant 0$, car cela est trivial pour $i>0$,
(G.II, 5.2.2) et comme $H^0(\underline{U},\underline{F}_k)=\Gamma(U,\underline{F}_k)$ d'après ce qui précède , la condition (ML) est remplie aussi pour $i=0$. On peut donc appliquer le cor. de la prop. 1 , donc $H^i(\underline{U},\underline{F})=\varprojlim_k H^i(\underline{U},\underline{F}_k)=0$ pour tout $i>0$.

b) Passons au cas général , et considérons pour chaque k la résolution canonique $\underline{C}^*(X,\underline{F}_k)=(\underline{C}^i(X,\underline{F}_k))_{i\geqslant 0}$ de $\underline{F}_k$ par des faisceaux flasques (G,II,4.3). Pour tout $i\geqslant 0$, considérons le système projectif $(\underline{C}^i(X,\underline{F}_k))_{k\in\underline{N}}$ de faisceaux flasques ; il satisfait aux conditions de a) . En effet , si $\underline{N}_{hk}$ est le noyau de u_{hk} pour h k , la suite $0\to\underline{N}_{hk}\to\underline{F}_k\to\underline{F}_h\to 0$ est exacte d'après (iii) et notre assertion résulte de ce que le foncteur

$\underline{A} \to \underline{C}^i(X,\underline{A})$ est exact (G,II,4.3) . Soit $\underline{G}^i = \varprojlim_k \underline{C}^i(X,\underline{F}_k)$; on a donc $H^j(X,\underline{G}^i)=0$ pour $j>0$ et $i \geq 0$. Nous allons montrer que $\underline{G}^* = (\underline{G}^i)$ est une résolution du faisceau $\underline{F}$; de ce que $H^j(X,\underline{G}^*)=0$ pour $j>0$, il résultera alors que l'on pourra calculer la cohomologie $H^*(X,\underline{F})$ qui sera égale à $H^*(\Gamma(\underline{G}^*))$ (G,II,4.7.1) .

Il est clair que , par passage à la limite projective , on déduit des suites exactes

$$0 \to \underline{F}_k \to \underline{C}^0(X,\underline{F}_k) \to \underline{C}^1(X,\underline{F}_k) \to \cdots$$

un faisceau différentiel $\underline{G}^*$:

$$0 \to \underline{F} \to \underline{G}^0 \to \underline{G}^1 \to \cdots\cdots$$

Pour prouver notre assertion , il faut établir que $\underline{H}^i(\underline{G}^*)=0$ pour $i>0$. Ce faisceau est engendré par le préfaisceau $U \mapsto H^i(\Gamma(U,\underline{G}^*))$ (G,II,4.1); or , le complexe $\Gamma(U,\underline{G}^*)$ est la limite projective du système projectif des complexes $(\Gamma(U,\underline{C}^*(X,\underline{F}_k)))_{k \in \mathbb{N}}$. Pour chaque $i \geq 0$, les applications $\Gamma(U,\underline{C}^i(X,\underline{F}_k)) \to \Gamma(U,\underline{C}^i(X,\underline{F}_h))$ $(h \leq k)$ sont surjectives ; on a vu en effet ci-dessus que l'homomorphisme de faisceaux $\underline{C}^i(X,\underline{F}_k) \to \underline{C}^i(X,\underline{F}_h)$ est surjectif et que son noyau est flasque ; la suite exacte de cohomologie prouve alors notre assertion , comme dans a) . Compte tenu de l'hypothèse (i) (où on notera que $H^i(U,\underline{F}_k)=H^i(\Gamma(U,\underline{C}^*(X,\underline{F}_k)))$, la résolution canonique $C^*(U,\underline{F}_k|U)$ étant induite sur U par $\underline{C}^*(X,\underline{F}_k)$) , on peut appliquer le cor. de la prop.1 au système projectif de complexes $(\Gamma(U,\underline{C}^*(X,\underline{F}_k)))_{k \in \mathbb{N}}$, et on a donc $H^i(\Gamma(U,\underline{G}^*))=\varprojlim_k H^i(U,\underline{F}_k)$ pour tout $i \geq 0$. L'hypothèse (ii) prouve bien alors , par définition , que les faisceaux $\underline{H}^i(\underline{G}^*)$ sont nuls pour $i>0$.

On a donc pour tout $i \geq 0$, $H^i(X,\underline{F})=H^i(\Gamma(X,\underline{G}^*))$,et $\Gamma(X,\underline{G}^*)= \varprojlim_k \Gamma(X,\underline{C}^*(X,\underline{F}_k))$. On vient de voir ci-dessus que les applications $\Gamma(X,\underline{C}^i(X,\underline{F}_k)) \to \Gamma(X,\underline{C}^i(X,\underline{F}_h))$ sont toutes surjectives ; la conclusion résulte donc encore du cor. de la prop.1.

Archives
Grothendieck Sept 59

CHAPITRE II

ETUDE ELEMENTAIRE DE QUELQUES CLASSES DE MORPHISMES

Les morphismes définis et étudiés dans ce chapitre le sont sans utilisation des méthodes cohomologiques ; une étude plus poussée, utilisant ces dernières, en sera faite au chap. III.

§ 1. Compléments sur les faisceaux quasi-cohérents.

1. Opérations sur les faisceaux quasi-cohérents.

Proposition 1. - Soit $f : X \to Y$ un morphisme de préschémas. On suppose qu'il existe un recouvrement (Y_α) de Y par des ouverts affines tel que chacun des $f^{-1}(Y_\alpha)$ admette un recouvrement fini $(X_{\alpha i})$ par des ouverts affines contenus dans $f^{-1}(Y_\alpha)$, tel que chacune des intersections $X_{\alpha i} \cap X_{\alpha j}$ soit elle-même réunion finie d'ouverts affines. Dans ces conditions, pour tout faisceau quasi-cohérent F sur X, $f_*(F)$ est un faisceau quasi-cohérent sur Y.

La question étant locale (sur Y), on peut supposer Y égal à l'un des Y_α, donc supprimer les indices α.

a) Supposons d'abord que les $X_i \cap X_j$ soient eux-mêmes des ouverts affines. Posons $F_i = F|X_i$, $F_{ij} = F|(X_i \cap X_j)$, et soient F'_i et F'_{ij} les images de F_i et F_{ij} respectivement par les restrictions respectives de f à X_i et $X_i \cap X_j$; on sait que les F'_i et F'_{ij} sont quasi-cohérents (I, 1, 6, cor. 2 de la prop. 8). Posons $G = \bigoplus_i F'_i$, $H = \bigoplus_{i,j} F'_{ij}$; G et H sont quasi-cohérents (I, 1, 3, cor. 4 du th. 1). Nous allons définir un homomorphisme $u : G \to H$ tel que $f_*(F)$ soit le noyau de u ; il en résultera que $f_*(F)$ est quasi-cohérent (I, 1, 3, cor. 4 du th. 1). Il suffit de définir u comme homomorphisme de préfaisceaux (G, I, 1.9) ; tenant compte de la définition de G et H, il suffit donc, pour tout ensemble ouvert $W \subset Y$, de définir un homomorphisme

$$u_W : \bigoplus_i \Gamma(f^{-1}(W) \cap X_i, F) \longrightarrow \bigoplus_{i,j} \Gamma(f^{-1}(W) \cap X_i \cap X_j, F)$$

de façon à satisfaire aux conditions de compatibilité usuelles lorsque W varie. Si, pour toute section $s_i \in \Gamma(f^{-1}(W) \cap X_i, F)$, on désigne par $s_{i|j}$ la restriction de s_i à $f^{-1}(W) \cap X_i \cap X_j$, on posera

$$u_W((s_i)) = (s_{i|j} - s_{j|i})$$

et les conditions de compatibilité sont évidemment remplies . Pour prouver que le noyau R de u est $f_*(F)$, définissons un homomorphisme de $f_*(F)$ dans R en faisant correspondre à toute section $s \in \Gamma(f^{-1}(W), F)$ la famille (s_i) , où s_i est la restriction de s à $f^{-1}(W) \cap X_i$; les axiomes (F 1) et (F 2) des faisceaux (G,II,1.1) entraînent que cet homomorphisme est <u>bijectif</u> , ce qui termine la démonstration dans ce cas .

b) Dans le cas général , le même raisonnement s'applique une fois que l'on a établi que les faisceaux F'_{ij} sont quasi-cohérents . Or , par hypothèse $X_i \cap X_j$ est réunion finie d'ouverts affines X_{ijk} ; et comme les X_{ijk} sont des ouverts affines <u>dans un schéma</u> , l'intersection de deux quelconques d'entre eux est encore un ouvert affine (I,3, ,prop. et cor.1 de la prop.). On est donc ramené au premier cas , et la prop.1 est démontrée .

<u>Corollaire .- La conclusion de la prop.1 est valable dans chacun des cas suivants</u> :

(i) <u>f est séparé , et</u> Y <u>réunion d'une famille</u> (Y_α) <u>d'ouverts affines tels que chacun des</u> $f^{-1}(Y_\alpha)$ <u>soit réunion finie d'ouverts affines</u> .

(ii) <u>f est séparé et de type fini</u> .

(iii) Y <u>est réunion d'une famille</u> (U_λ) <u>d'ouverts tels que</u> $f^{-1}(U_\lambda)$ <u>soit un espace noethérien (ce qui a lieu par exemple si l'espace de base</u> X <u>est noethérien</u>).

Dans le cas (i) les $X_{\alpha i} \cap X_{\alpha j}$ sont affines (I,3, ,prop.) . Le cas (ii) est un cas particulier de (i) . Enfin , dans le cas (iii) , on peut se ramener au cas où X est noethérien et Y affine ; alors X admet un recouvrement ouvert affine fini (X_i) , et les $X_i \cap X_j$, étant quasi-compacts , sont réunions finies d'ouverts affines .

<u>Proposition 2 .- Soit</u> $f : X \to Y$ <u>un morphisme de préschémas . Pour</u>

tout faisceau quasi-cohérent G sur Y, $f^*(G)$ est un faisceau quasi-cohérent sur X. Si de plus X et Y sont localement noethériens, pour tout faisceau cohérent G sur Y, $f^*(G)$ est un faisceau cohérent sur X

La question est locale (sur X) ; soit $x \in X$, et soit V un ouvert affine de Y contenant $f(x)$; il y a un ouvert affine U contenant x et contenu dans $f^{-1}(V)$. Comme la restriction de $f^*(G)$ à U est l'image réciproque de $G|V$ par la restriction de f à U, on est ramené au cas où X et Y sont affines, et la proposition a été démontrée dans ce cas (I,1,6,cor.2 de la prop.8). Si en outre X et Y sont localement noethériens, on peut supposer les anneaux A et B de U et V noethériens ; tenant compte de (I,1,6,prop.8) et de la caractérisation des faisceaux cohérents sur un schéma affine noethérien (I,1,5,th.3), la seconde assertion de la proposition revient à voir que si N est un B-module de type fini, $N \otimes_B A_{[\varphi]}$ est un A-module de type fini, ce qui est évident.

Proposition 3 .- Soit X un préschéma (resp. un préschéma localement noethérien). Soient F et G deux faisceaux quasi-cohérents (resp. cohérents) sur X ; alors $F \otimes_{O_X} G$ est quasi-cohérent (resp. cohérent). Si F est cohérent et G quasi-cohérent (resp. cohérent), alors $\mathrm{Hom}_{O_X}(F,G)$ est quasi-cohérent (resp. cohérent).

La question étant locale, on peut supposer X affine (resp. affine noethérien) ; en outre, si F est cohérent, on peut supposer qu'il est le conoyau d'un homomorphisme $O_X^m \to O_X^n$. L'assertion relative aux faisceaux quasi-cohérents résulte alors de (I,1,3,cor.6 du th.1) ; l'assertion relative aux faisceaux cohérents résulte de (I,1,5,th.3) et du fait que si M et N sont des A-modules de type fini, il en est de même de $M \otimes_A N$ et de $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ lorsque A est noethérien.

Définition 1 .- Soient X, Y deux S-préschémas , p, q les projections de $X \times_S Y$, F (resp. G) un faisceau quasi-cohérent sur X (resp. Y). On appelle produit tensoriel de F et G sur O_S (ou sur S) et on note $F \otimes_{O_S} G$ (ou $F \otimes_S G$) le produit tensoriel $p^*(F) \otimes_{O_{X \times_S Y}} q^*(G)$.

Ce produit tensoriel est donc un faisceau quasi-cohérent sur $X \times_S Y$; il est cohérent si F et G le sont , et si X,Y et $X \times_S Y$ sont localement noethériens . On notera que si on prend $X=Y=S$, on retrouve la notion usuelle de produit tensoriel de faisceaux de O_S-modules sur S . Si on prend $Y=S$, $F=O_X$ et si on désigne par f le morphisme structural $X \to Y$, on obtient le faisceau $f^*(G)$: le produit tensoriel ordinaire et l'image réciproque apparaissent donc comme des cas particuliers du produit tensoriel général .

La déf.1 entraîne immédiatement que , pour X et Y fixés , $F \otimes_S G$ est un bifoncteur covariant additif et exact à droite en F et G .

Le préschéma S étant fixé , on peut considérer les couples (X,F) , où X est un S-préschéma et F un faisceau quasi-cohérent sur X , comme formant une catégorie : on définira un morphisme $(X,F) \to (Y,G)$ comme un couple (u,v) , où $u=(\psi,\theta)$ est un S-morphisme $X \to Y$, et v un homomorphisme $G \to u_*(F)$ (cf. chap.0, § 1, n°5); on sait (loc. cit.) qu'il revient au même de se donner un homomorphisme $u^*(G) \to F$.

Proposition 4 .- Soient $f : T \to X$, $g : T \to Y$ deux S-morphismes , F (resp. G) un faisceau quasi-cohérent sur X (resp. Y) . On a alors $(f,g)_S^*(F \otimes_S G) = f^*(F) \otimes_{O_T} g^*(G)$.

Si p,q sont les projections de $X \times_S Y$, la formule résulte en effet des relations $(f,g)_S^* \circ p^* = f^*$ et $(f,g)_S^* \circ q^* = g^*$ et du fait qu'une image réciproque d'un produit tensoriel de faisceaux algébriques est le produit tensoriel des images réciproques de ces faisceaux (chap.0, § 2 n°5) .

Corollaire 1 .- Soient $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ deux S-morphismes , F' (resp. G') un faisceau quasi-cohérent sur X' (resp. Y') . On a alors

$(f\times_S g)^*(F'\otimes_S G')=f^*(F')\otimes_S g^*(G')$.

Cela résulte de la prop.4 et du fait que $f\times_S g=(f\circ p,g\circ q)_S$, p et q étant les projections de $X\times_S Y$.

<u>Corollaire 2 .- Soient</u> X,Y,Z <u>trois</u> S-<u>préschémas</u> , F (resp. G,H) <u>un faisceau quasi-cohérent sur</u> X (resp. Y,Z) ; <u>le faisceau</u> $F\otimes_S G\otimes_S H$ <u>est l'image réciproque de</u> $(F\otimes_S G)\otimes_S H$ <u>par l'isomorphisme canonique de</u> $X\times_S Y\times_S Z$ <u>sur</u> $(X\times_S Y)\times_S Z$.

En effet , cet isomorphisme s'écrit $(p_1,p_2)_S\times_S p_3$, en désignant par p_1,p_2,p_3 les projections de $X\times_S Y\times_S Z$.

<u>Corollaire 3 .- Si</u> X <u>est un</u> S-<u>préschéma , tout faisceau quasi-cohérent</u> F <u>sur</u> X <u>est l'image réciproque de</u> $F\otimes_S O_S$ <u>par l'isomorphisme canonique de</u> X <u>sur</u> $X\times_S S$ (I,2,5,prop.8)

En effet , cet isomorphisme est $(1_X,\varphi)_S$, où φ est le morphisme structural $X\to S$, et le corollaire résulte de la prop.4 et du fait que $\varphi^*(O_S)=O_X$.

Soient X un S-préschéma , F un faisceau quasi-cohérent sur X , φ : $S'\to S$ un morphisme ; on désigne par F^φ , ou $F^{S'}$, le faisceau quasi-cohérent $F\otimes_S O_{S'}$ sur $X\times_S S'=X^\varphi=X^{S'}$; donc $F^{S'}=p^*(F)$ (p projection de $X^{S'}$ dans X)

<u>Proposition 5 .-</u> <u>Soit</u> φ' : $S''\to S'$ <u>un morphisme . Pour tout faisceau quasi-cohérent</u> F <u>sur un</u> S-<u>préschéma</u> X , $(F^\varphi)^{\varphi'}$ <u>est l'image réciproque de</u> $F^{\varphi\circ\varphi'}$ <u>par l'isomorphisme canonique de</u> $(X^\varphi)^{\varphi'}$ <u>sur</u> $X^{\varphi\circ\varphi'}$.

Cela résulte aussitôt des définitions et de (I,2,5,prop.9).

Cela s'écrit encore $(F\otimes_S O_{S'})\otimes_{S'} O_{S''}=F\otimes_S O_{S''}$.

<u>Proposition 6 .- Soient</u> Y <u>un</u> S-<u>préschéma</u> , f : $X\to Y$ <u>un</u> S-<u>morphisme</u> . <u>Pour tout faisceau quasi-cohérent</u> G <u>sur</u> Y <u>et tout morphisme</u> $S'\to S$, <u>on a</u> $(f^{S'})^*(G^{S'})=(f^*(G))^{S'}$.

Cela résulte aussitôt de la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X^{S'} & \xrightarrow{f^{S'}} & Y^{S'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

Corollaire .- Soient X,Y deux S-préschémas , F (resp. G) un faisceau quasi-cohérent sur X (resp. Y) . L'image réciproque du faisceau $F^{S'}\otimes_{S'}G^{S'}$ par l'isomorphisme canonique $(X\times_S Y)^{S'}\to X^{S'}\times_{S'}Y^{S'}$ (I,2,5,cor.2 de la prop.9) est égale à $(F\otimes_S G)^{S'}$.

Si p,q sont les projections de $X\times_S Y$, l'isomorphisme en question n'est autre que $(p^{S'},q^{S'})_{S'}$; le corollaire résulte des prop.4 et 6.

Proposition 7 .- Soient S,X,Y trois schémas affines d'anneaux respectifs A,B,C, B et C étant des A-algèbres. Soit M (resp. N) un B-module (resp. C-module) , $F=\tilde{M}$ (resp. $G=\tilde{N}$) le faisceau quasi-cohérent associé ; alors $F\otimes_S G$ est canoniquement isomorphe au faisceau associé au $(B\otimes_A C)$-module $M\otimes_A N$.

En effet , en vertu de (I,1,6,prop.8) , $F\otimes_S G$ est isomorphe au faisceau associé au $(B\otimes_A C)$-module

$$(M\otimes_B(B\otimes_A C))\otimes_{B\otimes_A C}((B\otimes_A C)\otimes_C N)$$

et en raison des isomorphismes canoniques entre produits tensoriels , ce dernier est isomorphe à $M\otimes_B(B\otimes_A C)\otimes_C N=(M\otimes_B B)\otimes_A(C\otimes_C N)=M\otimes_A N$.

2 . Prolongement des faisceaux quasi-cohérents . Application aux sous-préschémas .

Lemme 1 .- Soient X un espace topologique , F un faisceau d'ensembles sur X , U une partie ouverte de X , G un sous-faisceau de $F|U$. Soit $\overline{G}$ le sous-faisceau de F tel que , pour tout ouvert V de X , $\Gamma(V,\overline{G})$ soit formé des sections $s\in\Gamma(V,F)$ telles que la restriction de s à $U\cap V$ soit une section de G au-dessus de $U\cap V$. Alors on a $\overline{G}|U=G$, et $\overline{G}$ est le plus grand sous-faisceau de F induisant sur U un sous-faisceau de G .

Le fait que $\overline{G}$ soit un sous-faisceau de F et les propriétés énoncées dans le lemme résultent aussitôt des définitions .

On notera que dans l'énoncé du lemme 1 , on peut remplacer "ensembles" par "groupes","modules","anneaux",etc. (en général par des objets d'une catégorie admettant des limites inductives).

Lemme 2 .- Soient X=Spec(A) un schéma affine , $F=\tilde{M}$ le faisceau quasi-cohérent sur X associé à un A-module M , f un élément de A , G le sous-faisceau de $F|D(f)$ associé à un sous-module N' de M_f . Alors G est associé au sous-module de M image réciproque de N' par l'application canonique $i_f : A \to A_f$.

Il suffit de vérifier que pour tout $g \in A$, les sections sur D(g) du faisceau associé à $N=i_f^{-1}(N')$ sont les sections de F induisant sur $D(f)\cap D(g)=D(fg)$ une section de G ; d'après (I,1,3, th.1 et prop.6) cela revient à montrer que tout élément $z/g^m \in M_g$ $(z\in M)$ dont l'image canonique dans M_{fg} appartient à $N_{fg}=(N')_{g'}$ (g' image de g dans A_f) est un élément de N_g . On a par hypothèse $z/g^m = z_1/(fg)^p$ avec $z_1 \in N$, et on peut évidemment supposer m=p ; cela signifie qu'il existe un entier n tel que $(fg)^n(f^m g^m z - g^m z_1)=0$, ou encore que dans M_f , on a $g^{n+m}z/1=g^{n+m}z_1/f^m \in N_f=N'$; on en conclut que $g^{n+m}z \in N$, et par suite $z/g^m=g^{n+m}z/g^{n+2m} \in N_g$.

Théorème 1 .- Soit X un préschéma localement noethérien .

(i) Tout faisceau quasi-cohérent (resp. cohérent) sur un ouvert U de X est la restriction à U d'un faisceau quasi-cohérent (resp. cohérent) sur X .

(ii) Soient F un faisceau quasi-cohérent (resp. cohérent) sur X , U un ouvert de X , G un sous-faisceau quasi-cohérent de $F|U$. Alors le plus grand sous-faisceau de F induisant sur U un sous-faisceau de $F|U$ contenu dans G (lemme 1) est quasi-cohérent (resp. cohérent) .

(iii) Soient F un faisceau quasi-cohérent sur X , U un ouvert de X , G un sous-faisceau cohérent de $F|U$. Alors il existe un sous-faisceau cohérent de F induisant G sur U .

(i) Si X est affine , il est noethérien (I,4, ,prop.) et tout ouvert de X est quasi-compact , donc on est ramené au cas traité dans (I,1, 4,cor. du th.2) et (I,1,5,cor. du th.3) . Dans le cas général , considérons l'ensemble M des couples (V,N) où V est un ouvert de X contenant U , et H un faisceau quasi-cohérent (resp. cohérent) sur V induisant le faisceau donné F sur U . L'ensemble $\mathcal{M}$ est <u>inductif</u> quand on l'ordonne par la relation de restriction : en effet, si L est une partie totalement ordonnée de $\mathcal{M}$, V_1 la réunion des ensembles V tels que $(V,H)\in L$, il est clair qu'il y a sur V_1 un unique faisceau H_1 dont la restriction à tout V tel que $(V,H)\in L$ est le faisceau H ; tout revient à voir que H_1 est quasi-cohérent (resp. cohérent) . La question étant locale , on remarque que pour tout $x\in V_1$, il y a un voisinage ouvert affine $W\subset V_1$ de x qui soit un espace noethérien ; comme il y a donc un ouvert maximal parmi les $W\cap V$ tels que $(V,H)\in L$, on en conclut qu'il y a un $(V,H)\in L$ pour lequel $W\subset V$, et cela entraîne notre assertion . Cela étant , soit (V_0,H_0) un élément maximal de $\mathcal{M}$; montrons que $V_0=X$. Supposons le contraire et soit $x\in X$ non dans V_0 ; soit T un voisinage ouvert affine de x . Comme on l'a vu plus haut , il y a un faisceau quasi-cohérent (resp. cohérent) G sur T tel que $G|(V_0\cap T)=H_0|(V_0\cap T)$; si H' désigne le faisceau sur $V'=V_0\cup T$ qui coïncide avec H_0 sur V_0 et avec G sur $V_0\cap T$, on aurait $(V',H')\in\mathcal{M}$ contrairement à la définition de (V_0,H_0) , ce qui achève de démontrer (i) .

(ii) D'après la définition de $\overline{G}$ (lemme 1) , il est clair que pour/ tout ouvert V de X , on a $\overline{G}|V=\overline{G'}$, en désignant par G' le faisceau $G|(U\cap V)$, et par $\overline{G'}$ le faisceau correspondant sur V . Cette remarque montre que l'on peut se limiter au cas où X est affine et noethérien . Alors U est réunion finie d'ouverts affines $D(f_i)$; la définition de $\overline{G}$ montre que ce faisceau est l'intersection des sous-faisceaux $\overline{G_i}$ de F , où $G_i=G|D(f_i)$. Or , on sait (lemme 2) que les $\overline{G_i}$ sont quasi-cohérents ; tout revient donc à voir que l'intersection de deux sous-faisceaux $\tilde{M},\tilde{N}$ d'un faisceau $\tilde{P}$ (M,N,P étant des $A(X)$-modules) est quasi-cohérent , ce qui résulte aussitôt de ~~la suite exacte~~ ce que $M\cap N$ est le noyau de l'homomorphisme $M\to P/N$ (I,1,3, cor.4 du th.1). Cela établit l'assertion relative au cas où F est quasi-cohérent ; l'assertion relative au cas où F est cohérent est conséquence du lemme suivant :

Lemme 3 .- Si X est localement noethérien, tout sous-faisceau ~~M~~ (resp. tout faisceau quotient) quasi-cohérent d'un ~~XMM~~ faisceau cohérent F est un faisceau cohérent.

La question étant locale, on peut supposer X affine, et l'anneau $A(X)=A$ noethérien ; F est alors isomorphe à un faisceau $\widetilde{M}$ associé à un A-module M de type fini (I,1,5,th.3). Tout sous-faisceau (resp. faisceau quotient) quasi-cohérent de ~~M~~ $\widetilde{M}$ est alors isomorphe à un faisceau associé à un sous-module (resp. module quotient) de M (I,1,3, 2 et cor. 4 du th.1) ; un tel sous-module (resp. module quotient) étant de type fini, le lemme en résulte (I,1,5,th.3).

(iii) Supposons d'abord X affine et l'anneau $A=A(X)$ noethérien ; alor le faisceau $\overline{G}$ est quasi-cohérent d'après (ii), donc on peut le supposer de la forme $\widetilde{M}$, où M est un A-module. Or, M est limite inductive d'un ~~XXX~~ système inductif (M_λ) de sous-A-modules de type fini. D'autre part, U étant quasi-compact est réunion d'un nombre fini d'ouverts affines $D(f_i)$ ~~XXX~~ avec $f_i \in A$ $(1 \leq i \leq n)$; le faisceau $\widetilde{M}|D(f_i)$ est associé au A_{f_i}-module M_{f_i}, et ce dernier est limite inductive des $(M_\lambda)_{f_i}$ (chap.0,§ 1,n°3). Or, A_{f_i} est noethérien, et $\widetilde{M}|D(f_i)=G|D(f_i)$ est cohérent par hypothèse, donc (I,1,5,th.3) M_{f_i} est de type fini ; les $(M_\lambda)_{f_i}$ étant aussi de type fini, il existe un indice λ_i tel que $(M_\lambda)_{f_i}=M_{f_i}$ pour $\lambda \geq \lambda_i$. Soit alors μ un indice $\geq \lambda_i$ pour $1 \leq i \leq n$; on a donc $(M_\mu)_{f_i}=M_{f_i}$ pour $1 \leq i \leq n$, et on en conclut que le sous-faisceau cohérent $\widetilde{M}_\mu$ induit $G|D(f_i)$ sur chacun des $D(f_i)$, et par suite induit G sur U.

Pour passer au cas général, on considère de nouveau l'ensemble M des couples (V,H), où V est un ouvert de X contenant U, et H un ~~XXXXXXX~~ sous-faisceau cohérent de ~~XXXXXXXXXXXX~~ $F|V$ induisant

G sur U . On montre alors par le même raisonnement que dans (i) que M est inductif et que si (V_o,H_o) en est un élément maximal , on a nécessairement $V_o=X$ (en utilisant le résultat démontré pour X affine d'anneau noethérien) .C.Q.F.D.

Corollaire .- Sur un préschéma localement noethérien X , tout faisceau quasi-cohérent F est limite inductive de ses sous-faisceaux cohérents .

Pour tout ouvert affine U d'anneau noethérien, F|U est associé à un A(U)-module M_U , lequel est limite inductive de sous-modules $M_{U,\lambda}$ de type fini ; F|U est par suite (I,1,3,cor.4 du th.1) limite inductive des sous-faisceaux cohérents $\widetilde{M}_{U,\lambda}$ (I,1,5,th.3) . D'après le th.1 (ii) $\widetilde{M}_{U,\lambda}$ est induit sur U par un sous-faisceau cohérent $G_{U,\lambda}$ de F . Les sommes finies de sous-faisceaux $G_{U,\lambda}$ sont des sous-faisceaux cohérents de F (FAC,I,2,13,cor. du th.2),et il est clair que F est limite inductive de ces sous-faisceaux .

Proposition 8 .- Soient X un préschéma localement noethérien , Y un sous-préschéma de X . Il existe un plus petit sous-préschéma $\overline{Y}$ de X majorant (I,3,1) Y , dont l'espace de base est l'adhérence de l'espace de base de Y , et dont le faisceau structural induit O_Y sur Y .

Soit U un ouvert de X tel que Y soit un sous-préschéma fermé du préschéma induit sur U ; O_Y est donc la restriction à Y d'un faisceau $(O_X|U)/J$, où J est un faisceau quasi-cohérent d'idéaux ; mais comme X est localement noethérien et que tout idéal d'un anneau noethérien est de type fini , J est en fait un faisceau cohérent (I,1,3, th.1 et I,1,5,th.3) . Les sous-préschémas fermés de X majorant Y correspondent biunivoquement aux sous-faisceaux cohérents J' d'idéaux sur X , induisant sur U un faisceau contenu dans J ; comme parmi ces faisceaux il y en a un plus grand $\overline{J}$ (th.1,(ii) appliqué à O_X et à J) , le sous-préschéma fermé défini par $\overline{J}$ est le sous-préschéma cherché ; il est clair par définition de $\mathcal{J}$ (lemme 1) que le support de $O_X/\mathcal{J}$ est contenu dans l'adhérence de Y , et comme ce support est fermé , il est égal à cette adhérence . Comme Y est localement fermé , il est ouvert dans $\overline{Y}$, et il résulte du lemme 1 que Y est le sous-préschéma induit par $\overline{Y}$.

Corollaire 1 .- Toute section de $O_{\overline{Y}}$ *sur un ouvert* V *de* $\overline{Y}$ *qui est nul-le dans* V Y *est nulle* .

En effet , soit s une telle section ; pour tout $x\in\overline{Y}$ il existe un voisinage ouvert W de x dans X et une section s' de O_X sur W tels que l'image de s' dans $O_X/\mathcal{J}$ coïncide avec s dans $W\cap\overline{Y}$ (G,II,2.9) ; l'hypothèse signifie que $s'(y)\in J(y)$ pour tout $y\in W\cap\overline{Y}$, et par définition de $\mathcal{J}$ (lemme 1) on a donc aussi $s'(z)\in\mathcal{J}(z)$ pour tout $z\in W$,don en particulier $s(x)=0$.

Corollaire 2 .- Pour tout ouvert V *de* X , *le sous-préschéma* $\overline{V\cap Y}$ *est égal au préschéma induit par* $\overline{Y}$ *sur l'ensemble ouvert* $\overline{Y}\cap V$.

En effet , si J' est le faisceau $J|(U\cap V)$, il résulte du lemme 1 que $\mathcal{J}'$ et $\mathcal{J}$ induisent le même faisceau sur V .

Corollaire 3 .- Soient X *un* S-*préschéma* , Z *un préschéma séparé au-dessus de* S . *Soient* Y *un sous-préschéma de* X ; *si deux* S-*morphismes* f,g *de* $\overline{Y}$ *dans* Z *ont même restriction à* Y , *ils sont identiques* .

Soit $h=(f,g)_S : \overline{Y}\to Z\times_S Z$; comme la diagonale $T=\Delta_Z(Z)$ est un sous-préschéma fermé de $Z\times_S Z$, $Z'=h^{-1}(T)$ est un sous-préschéma fermé de $\overline{Y}$ (I,3,2,cor.3 de la prop.5) . Si $u : Y\to Z$ est la restriction commune de f et g à Y , la restriction de h à Y est $h'=(u,u)_S$, qui se factorise en $\Delta_Z\circ u$; comme $\Delta_Z^{-1}(T)=Z$, on a $h'^{-1}(T)=Y$, et par suite Z' est un sous-préschéma fermé de X induisant Y ; en d'autres termes Z' majore Y , donc aussi $\overline{Y}$ par définition . Autrement dit , $h^{-1}(T)=\overline{Y}$, et par suite h se factorise en $\Delta_Z\circ v$, où v est un morphisme $\overline{Y}\to Z$, ce qui entraîne $f=g=v$.

3 . Faisceaux divisoriels .

Dans ce n°, X désigne un espace annelé, non nécessairement un préschéma.

Définition 1.- On dit qu'un faisceau algébrique F sur X est localement libre (resp. localement libre de rang n) si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $F|U$ soit isomorphe à un faisceau de la forme $O_X^{(I)}|U$ (resp. à $O_X^n|U$). Un faisceau localement libre de rang 1 est encore appelé faisceau divisoriel. Il est clair qu'un faisceau localement libre est quasi-cohérent, un faisceau localement libre de rang fini cohérent.

A) Opérations tensorielles.

Proposition 9.- Si L, L' sont deux faisceaux divisoriels, il en est de même de $L \otimes_{O_X} L'$ et de $Hom_{O_X}(L, O_X)$, noté aussi L^{-1}.

La proposition est évidente, puisque $O_X \otimes_{O_X} O_X$ et $Hom_{O_X}(O_X, O_X)$ s'identifient canoniquement à O_X.

On écrit $L^{\otimes n}$ pour le produit tensoriel de n faisceaux identiques à un faisceau divisoriel L (n 1) ; on pose par convention $L^{\otimes 0} = O_X$ et $L^{\otimes(-n)} = (L^{-1})^{\otimes n}$ pour n 1. Alors :

Proposition 10.- Soit L un faisceau divisoriel. Quels que soient les entiers rationnels m, n, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel $L^{\otimes m} \otimes L^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} L^{\otimes(m+n)}$.

Il suffit évidemment de définir un isomorphisme $L \otimes_{O_X} L^{-1} \xrightarrow{\sim} O_X$: si $s \in \Gamma(U, L)$ et $u \in \Gamma(U, L^{-1})$, on fait correspondre à $s \otimes u$ la section $u(s) \in \Gamma(U, O_X)$, ce qui définit l'isomorphisme cherché.

Proposition 11.- Soient L, L' deux faisceaux divisoriels ; il existe un isomorphisme canonique fonctoriel $L^{-1} \otimes L' \xrightarrow{\sim} Hom_{O_X}(L, L')$.

Pour tout couple (u, t), où $u \in \Gamma(U, L^{-1})$ et $t \in \Gamma(U, L')$, on fait correspondre à $u \otimes t$ l'élément $s \to u(s)t$ de $\Gamma(U, Hom_{O_X}(L, L'))$. Pour voir qu'on a un isomorphisme, on peut supposer que $L|U$ et $L'|U$ sont isomorphes à $O_X|U$; autrement dit on peut supposer que $L = L' = O_X$, et alors c'est immédiat.

B) Groupe de Picard.

Se donner un faisceau divisoriel revient à se donner un recouvrement $U=(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ de X par des ouverts, pour tout couple (λ,μ) d'indices un automorphisme $\theta_{\lambda\mu}$ de $O_X|(U_\lambda\cap U_\mu)$, $\theta_{\mu\lambda}=\theta_{\lambda\mu}^{-1}$ et que de sorte que si on désigne par $\theta'_{\lambda\mu}, \theta'_{\mu\nu}, \theta'_{\nu\lambda}$ les restrictions de $\theta_{\lambda\mu}$, $\theta_{\mu\nu}, \theta_{\nu\lambda}$ à $U_\lambda\cap U_\mu\cap U_\nu$, on ait $\theta'_{\lambda\mu}\cdot\theta'_{\mu\nu}\cdot\theta'_{\nu\lambda}=1$; cela permet en effet de "recoller" les faisceaux $O_X|U_\lambda$ au moyen des $\theta_{\lambda\mu}$ (F:C%,I,1,4,prop.4 ce qui donne évidemment un faisceau divisoriel. Si on observe qu'un automorphisme $\theta_{\lambda\mu}$ de $O_X|(U_\lambda\cap U_\mu)$ équivaut à la donnée d'une section du faisceau de groupes abéliens O_X^* dont les fibres sont les groupes d'éléments inversibles O_X^* des anneaux O_X, au-dessus de $U_\lambda\cap U_\mu$ on voit que tout 1-cocycle de U à valeurs dans O_X^* définit un faisceau divisoriel (noter que les cochaînes sont ici notées multiplicativement) ; par passage à un recouvrement plus fin V, le cocycle correspondant donne le même faisceau divisoriel ; en outre, deux cocycles cohomologues donnent deux faisceaux divisoriels isomorphes. On obtient ainsi une application surjective du groupe de cohomologie $H^1(X,O_X^*)$ (égal, comme on sait, au groupe de cohomologie de Cech $\check{H}^1(X,O_X^*)$ (G,II,5.9,cor. du th.5.9.1)) dont les valeurs sont les classes de faisceaux divisoriels isomorphes sur X. On voit donc tout d'abord que ces classes forment un ensemble, que nous noterons Pic(X) De plus, l'application $H^1(X,O_X^*)\to \mathrm{Pic}(X)$ est en fait bijective, car par définition tout isomorphisme d'un faisceau divisoriel L sur un autre L' se représente, pour un recouvrement U assez fin, par un 1-cobord de U à valeurs dans O_X^*.

Notons maintenant que si, pour deux éléments ℓ, ℓ' de Pic(X), on désigne par $\ell\ell'$ la classe du faisceau divisoriel $L\otimes_{O_X}L'$, où $L\in\ell$, $L'\in\ell'$, on définit sur Pic(X) une structure de groupe abélien, appelé groupe de Picard de X. Pour cette structure de groupe, la bijection $H^1(X,O_X^*)\to\mathrm{Pic}(X)$ est un isomorphisme. En effet, soient L,L' deux faisceaux divisoriels, $U=(U_\alpha)$ un recouvrement ouvert de X tel que les sections de L,L' au-dessus de U_α soient de la forme

$s_\alpha . a_\alpha$ et $s_\alpha . b_\alpha$ respectivement , où s_α parcourt $\Gamma(U_\alpha , O_X)$; les cocycles correspondants $(\varepsilon_{\alpha\beta})$, $(\varepsilon'_{\alpha\beta})$ sont tels que $s_\beta . a_\beta = s_\alpha . a_\alpha$ (resp. $s_\beta . b_\beta = s_\alpha . b_\alpha$) au-dessus de $U_\alpha \cap U_\beta$ équivale à $s_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} s_\beta$ (resp. $s_\alpha = \varepsilon'_{\alpha\beta} . s_\beta$) au-dessus de $U_\alpha \cap U_\beta$. Comme les sections de $L \otimes_{O_X} L'$ au-dessus de U_α sont sommes finies des $s_\alpha s'_\alpha . (a_\alpha \otimes b_\alpha)$, il est clair que le cocycle $(\varepsilon_{\alpha\beta} \varepsilon'_{\alpha\beta})$ correspond à $L \otimes_{O_X} L'$, ce qui démontre notre assertion .

Proposition 12 .- *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme d'espaces annelés . Pour tout faisceau divisoriel* L *sur* Y , *l'image réciproque* $f^*(L)$ *est un faisceau divisoriel sur* X . *En outre , si* L, L' *sont deux faisceaux divisoriels sur* Y , *on a* $f^*(L \otimes_{O_Y} L') = f^*(L) \otimes_{O_X} f^*(L')$ *et* $f^*(L^{-1}) = (f^*(L))^{-1}$.

La première assertion résulte de ce que les images réciproques par f de deux faisceaux localement isomorphes sont localement isomorphes et de ce que $f^*(O_Y) = O_X$ (chap.0, § 2, n°) ; les autres assertions ont été démontrées au chap.0, § 2, n° .

Corollaire .- *Par passage aux classes de faisceaux divisoriels isomorphes , l'application* $L \to f^*(L)$ *définit un homomorphisme* $f^* : \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X)$.

On peut d'ailleurs voir aisément que si on identifie Pic(X) et Pic(Y) à $H^1(X, O_X^*)$ et $H^1(Y, O_Y^*)$ au moyen de l'isomorphisme canonique défini ci-dessus , l'homomorphisme f^* s'identifie à l'homomorphisme $H^1(Y, O_Y^*) \to H^1(X, O_X^*)$ déduit de l'homomorphisme $\theta^\flat : \psi^*(O_Y^*) \to O_X^*$ dans la cohomologie de Čech (on a posé $f = (\psi, \theta)$) : il suffit de remarquer que si U_α , U_β sont deux ouverts de Y , s_α , s_β des sections de O_Y au-dessus de U_α et U_β respectivement telles que $s_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta} s_\beta$ au-dessus de $U_\alpha \cap U_\beta$, avec $\varepsilon_{\alpha\beta} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta , O_Y^*)$, les sections correspondantes $(s_\alpha \circ \psi) \otimes 1$ et $(s_\beta \circ \psi) \otimes 1$ de O_X au-dessus de $\psi^{-1}(U_\alpha)$ et $\psi^{-1}(U_\beta)$ sont telles que , au-dessus de $\psi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, on ait $(s_\alpha \circ \psi) \otimes 1 = ((\varepsilon_{\alpha\beta} \circ \psi)(s_\alpha \circ \psi)) \otimes 1 = (\theta^\flat \circ (\varepsilon_{\alpha\beta} \circ \psi)) . ((s_\alpha \circ \psi) \otimes 1)$.

C) Anneaux et modules gradués construits à l'aide d'un faisceau divisoriel .

Soit L un faisceau divisoriel sur X . On désigne par $\Gamma_*(L)$ le groupe abélien somme directe $\bigoplus_{n\in Z} \Gamma(X,L^{\otimes n})$; on le munit d'une structure d'anneau gradué , en faisant correspondre au couple (s_n,s_m) , avec $s_n\in \Gamma(X,L^{\otimes n})$, $s_m\in \Gamma(X,L^{\otimes m})$ la section de $L^{\otimes(m+n)}$ sur X qui correspond canoniquement (prop.10) à $x\to s_n(x)\otimes s_m(x)$. Il est clair que, pour X fixé , $\Gamma_*(L)$ est un foncteur covariant par rapport à L . En outre , si f $(=(\psi,\theta))$: $X\to Y$ est un morphisme d'espaces annelés , pour tout faisceau divisoriel L sur Y , l'application $s_n\to(s_n\circ\psi)\otimes 1$ est un homomorphisme $\psi_n : \Gamma(Y,L^{\otimes n})\to\Gamma(X,f^*(L^{\otimes n}))$, et la prop.12 montre que ces homomorphismes définissent un homomorphisme d'anneaux gradués $f^\# : \Gamma_*(L)\to\Gamma_*(f^*(L))$.

Si maintenant F est un faisceau algébrique quelconque sur X , L un faisceau divisoriel sur X , on pose

$$\Gamma_*(L,F)=\bigoplus_{n\in Z}\Gamma(X,F\otimes L^{\otimes n}) \quad .$$

On munit ce groupe abélien d'une structure de module gradué sur l'anneau gradué $\Gamma_*(L)$ de la façon suivante : au couple (s_n,u) , où $s_n\in\Gamma(X,L^{\otimes n})$ et $u\in\Gamma(X,F\otimes L^{\otimes m})$, on fait correspondre la section de $F\otimes L^{\otimes(m+n)}$ qui correspond canoniquement (prop.10) à $x\to s_n(x)\otimes u(x)$. Il est clair que , pour X et L fixé , $\Gamma_*(L,F)$ est un foncteur covariant dans la catégorie des $\Gamma_*(L)$-modules gradués ; pour X et F fixés , c'est un foncteur covariant en L à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens . Enfin , si f : $Y\to X$ est un morphisme d'espaces annelés , on définit comme ci-dessus un di-homomorphisme (de degré 0) de modules gradués $f^* : \Gamma_*(L,F)\to\Gamma_*(f^*(L),f^*(F))$.

D) Ouverts définis par une section d'un faisceau divisoriel .

Supposons désormais que tous les ~~XXXXXX~~ anneaux $O_X(x)$ soient des anneaux locaux ; soit L un faisceau divisoriel sur un ouvert $V\subset X$, et soit f une section de L au-dessus de V . Nous désignerons par

Archives Grothendieck sept. 89

V_f l'ensemble des $x \in V$ ayant la propriété suivante : il existe un voisinage ouvert $W \subset V$ de x et un isomorphisme θ : $L|W \to O_X|W$ tel que la section $\theta_\circ(f|W)=s$ de O_X au-dessus de W soit telle que $s(x)$ n'appartienne pas à l'idéal maximal de $O_X(x)$. On notera que cette propriété est alors valable pour tout voisinage ouvert $W' \subset V$ de x et tout isomorphisme θ' : $L/W' \to O_X|W'$, car au-dessus de $W \cap W'$, la section $s' = \theta'_\circ(f|W')$ est de la forme $y \to \varepsilon(y)s(y)$, où $\varepsilon(y)$ est inversible dans $O_X(y)$.

Proposition 13 .- Si X est un préschéma , L un faisceau divisoriel sur X , l'ensemble V_f est ouvert dans X pour toute partie ouverte V de X et toute section f de L au-dessus de V .

Comme pour tout ouvert $W \subset V$, on a évidemment $W \cap V_f = V_{f|W}$, il suffit de considérer le cas où $X=V$ est affine , et où $L=O_X$; considéré comme Module sur lui-même; mais alors , X_f n'est autre que l'ensemble $D(f)$ défini dans I,1,1 .

Proposition 14 .- Soient L,L' deux faisceaux divisoriels sur un espace annelé X ; si $f \in \Gamma(X,L)$, $g \in \Gamma(X,L')$, on a

$$X_f \cap X_g = X_{f\otimes g} \qquad (1)$$

Par définition , on peut en effet se ramener au cas où $L=L'=O_X$, et alors $f\otimes g$ s'identifie au produit fg , et la proposition est évidente .

Par abus de langage , on dit parfois (lorsqu'aucune confusion n'en résulte) que X_f est l'ensemble des $x \in X$ où f ne s'annule pas (ce qui revient à remplacer en chaque point $f(x)$ par sa classe dans le corps résiduel de $O_X(x)$).

4 . Prolongement de sections de faisceaux quasi-cohérents .

Théorème 2 .- Soit X un préschéma dont l'espace de base est noethérien , ou un schéma dont l'espace de base est quasi-compact . Soient L un faisceau divisoriel sur X , f une section de L au-dessus de X,

<u>F un faisceau quasi-cohérent sur X.</u>

(i) <u>Si</u> $s \in \Gamma(X,F)$ <u>est telle que</u> $s|X_f=0$, <u>alors il existe un entier</u> $n>0$ <u>tel que</u> $s\otimes f^{\otimes n}=0$.

(ii) <u>Pour toute section</u> $s \in \Gamma(X_f,F)$, <u>il existe un entier</u> $n>0$ <u>tel que</u> $s\otimes f^{\otimes n}$ <u>se prolonge en une section de</u> $F\otimes L^{\otimes n}$ <u>au-dessus de</u> X .

(i) Comme l'espace de base de X est quasi-compact, donc réunion finie d'ouverts affines dans chacun desquels L est isomorphe à la restriction de O_X, on est aussitôt ramené au cas, où X est affine et $L=O_X$. Dans ce cas f s'identifie à un élément de $A(X)$ et on a $X_f=D(f)$; s s'identifie à un élément d'un $A(X)$-module M et $s|X_f$ à l'élément correspondant de M_f , et le résultat est trivial.

(ii) De nouveau X est réunion finie d'ouverts affines U_i ($1\leq i\leq m$) tels que $L|U_i=O_X|U_i$, et $s\otimes f^{\otimes n}$ s'identifie à sf^n sur chaque U_i. On sait alors (I,1,4, th.2) qu'il existe n tel que pour chaque i , $sf^n|(U_i\cap X_f)$ se prolonge en une section s_i de $F\otimes L^{\otimes n}$ au-dessus de U_i . Si $s_{i|j}$ est la restriction de s_i à $U_i\cap U_j$ on a $s_{i|j}-s_{j|i}=0$ dans $X_f\cap U_i\cap U_j$. Or, si X est un espace noethérien, $U_i\cap U_j$ est quasi-compact ; si X est un schéma, $U_i\cap U_j$ est affine, donc encore quasi-compact. En vertu de (i), il existe donc un entier m (qu'on peut supposer indépendant de i et j) tel que $(s_{i|j}-s_{j|i})\otimes f^{\otimes m}=0$. On en conclut aussitôt qu'il existe une section s' de $F\otimes L^{\otimes(n+m)}$ au-dessus de X , induisant $s\otimes f^{\otimes(n+m)}$ sur X_f .

Les corollaires qui suivent donnent une interprétation du th.2 en langage plus algébrique :

<u>Corollaire 1.- Les hypothèses étant celles du th.2 , considérons l'anneau gradué</u> $A_*=\Gamma_*(L)$ <u>et le</u> A_*<u>-module gradué</u> $M_*=\Gamma_*(L,F)$. <u>Si</u> $f\in A_n$, <u>où</u> $n\in Z$, <u>alors on a</u> $\Gamma(X_f,F)\simeq((M_*)_f)_0$ (sous-groupe du module de fractions $(M_*)_f$ formé des éléments de degré 0).

Corollaire 2 .- On suppose vérifiées les hypothèses du th.2 et en outre on suppose que $L=O_X$. Alors si on pose $A=\Gamma(X,O_X)$, $M=\Gamma(X,F)$, le A_f-module $\Gamma(X_f,F)$ est isomorphe à M_f .

Proposition 15 .- Soient X un préschéma noethérien , F un faisceau cohérent sur X , J un faisceau quasi-cohérent d'idéaux de O_X , tels que $J(x)=(0)$ pour tout x appartenant au support de F . Alors il existe un entier n tel que $J^nF=0$.

Comme X est réunion finie d'ouverts affines dont les anneaux sont noethériens , on peut supposer X affine d'anneau A noethérien ; alors $F=\tilde{M}$, où $M \; (=\Gamma(X,F))$ est un A-module de type fini , et $J=\tilde{I}$, où $I \; (=\Gamma(X,J))$ est un idéal de A (I,1,3,th.1 et 4,th.2). Comme A est noethérien , I admet un système fini de générateurs f_i $(1\leq i\leq m)$; par hypothèse , toute section de F au-dessus de X est nulle dans chacun des $D(f_i)$; si s_j $(1\leq j\leq q)$ sont des sections de F engendrant M , il existe donc un entier $h>0$ (indépendant de i et j) tel que $f_i^hs_j=0$ (I,1,4,th.2) , et par suite $f_i^hs=0$ pour tout $s\in M$. On en conclut que si $n=mh$, on a $I^nM=0$, et par suite le faisceau quasi-cohérent correspondant $J^nF=(I^nM)^{\sim}$ est nul .

5 . Le lemme de dévissage .

Définition 2 .- Soit C une catégorie abélienne. On dit qu'une sous-classe C' de C est exacte si , pour toute suite exacte $0\to A'\to A\to A''\to 0$ dans C dont deux termes sont dans C' , le troisième est dans C' .

Théorème 3 .- Soit X un préschéma noethérien ; on désigne par K la catégorie abélienne des faisceaux cohérents sur X . Soient K' une sous-classe exacte de K , X' une partie fermée de l'espace de base de X . On suppose que pour toute partie fermée irréductible Y de X' , de point générique y , il existe un faisceau $G\in K'$ de support contenu dans Y et tel que G_y soit un module simple sur l'anneau local $O_y=O_{X/Y}$. Alors tout faisceau cohérent de support contenu dans X' appartient à K' (et en particulier , si $X'=X$, $K'=K$).

Soit E l'ensemble des parties fermées Y de X' ayant la propriété suivante : tout faisceau cohérent sur X de support contenu dans Y appartient à K' ; nous allons montrer que E est l'ensemble de toutes les parties fermées de X' , ou encore que l'ensemble E' des parties fermées de X' n'appartenant pas à E est vide . Comme X' est un espace noethérien , E' admet un élément minimal , et on est donc ramené à prouver la proposition suivante :(*) si Y est une partie fermée de X' telle que toute partie fermée de Y ~~xxx~~ , distincte de Y , appartient à E , alors Y appartient à E .

Soit donc $F \in \underline{K}$ à support contenu dans Y , et prouvons que $F \in \underline{K}'$. Soit J le plus grand faisceau~~x~~ d'idéaux quasi-cohérent de O_X tel que Y soit le support de O_X/J ~~xxxx~~ (I,3,4,prop.9) ; la restriction de O_X/J à Y définit le plus petit sous-préschéma de X ayant pour support Y , et on sait que ce sous-préschéma est réduit ; nous le désignerons par Y_{red} . D'après la prop.15 du n°4 , il existe un entier n tel que $J^nF=0$; on a donc pour $1 \leq k \leq n$, une suite exacte

$$0 \to J^{k-1}F/J^kF \to F/J^kF \to F/J^{k-1}F \to 0$$

de faisceaux cohérents sur X ; comme la catégorie $\underline{K}'$ est exacte , on voit , par récurrence sur k , qu'il suffit de prouver que chacun des faisceaux $F_k=J^{k-1}F/J^kF$ est dans $\underline{K}'$. On est donc ramené à prouver que $F \in \underline{K}'$ sous l'hypothèse supplémentaire que $JF=0$; il revient au même de dire que $F|Y$ est un faisceau cohérent sur le préschéma Y_{red} (FAC,I,2,17) . Distinguons deux cas :

a) Y est réductible . Soit $Y=Y' \cup Y''$, Y' et Y'' étant des parties fermées de Y distinctes de Y ; désignons par J' (resp. J'') le plus grand faisceau d'idéaux quasi-cohérent de O_X tel que Y' (resp. Y'') soit le support de O_X/J' (resp. O_X/J'') , et posons $F'=F\otimes(O_X/J')$, $F''=F\otimes(O_X/J'')$. On définit un homomorphisme $F \to F'$ (resp. $F \to F''$) en faisant correspondre à toute section $s \in F(U)$ la section $s\otimes 1'_U$ (resp. $s\otimes 1''_U$) , $1'_U$ (resp. $1''_U$) étant la section de O_X/J' (resp. O_X/J'') de égale à l'élément unité de la fibre correspondante en tout point $x \in U$; d'où un homomorphisme $F \to F' \oplus F''$. La suite

(2) $$0 \to F \to F' \oplus F''$$

est <u>exacte</u> . En effet , par définition de J , on a $J' \cap J'' = J$, donc O_X/J s'identifie à un sous-faisceau du composé direct $(O_X/J') \oplus (O_X/J'')$; si en un point $z \in Y$ un germe de section $\tilde{s}(z)$ de $F(z)$ est tel que $\tilde{s}(z) \otimes 1'_z = \tilde{s}(z) \otimes 1''_z = 0$, on en déduit donc $\tilde{s}(z)=0$, d'où notre assertion . En outre , si $z \notin Y''$, on a $J'(z)=J(z)$, donc $\tilde{s}(z) \otimes 1'_z = \tilde{s}(z)$; autrement dit $F'(z)=F(z)$, et comme $F''(z)=0$, $F(z) \to F'(z) \oplus F''(z)$ est surjectif . Il en est de même si $z \notin Y'$; en d'autres termes , le conoyau de l'homomorphisme $F \to F' \oplus F''$ a son support dans $Y' \cap Y''$. Or par hypothèse F' et F'' sont dans $\underline{K}'$, donc il en est de même de $F' \oplus F''$ puisque $\underline{K}'$ est exacte ; l'hypothèse entraînant aussi que le conoyau de $F \to F' \oplus F''$ est dans $\underline{K}'$, on en conclut que $F \in \underline{K}'$, $\underline{K}'$ étant exacte .

b) Y est irréductible ; soit y son point générique , et soit V un ouvert affine de X contenant y ; $Y_{red} \cap V$ est un schéma affine irréductible et réduit , dont l'anneau est $A(V)/\mathfrak{j}(Y \cap V)$, et on a $\mathfrak{j}(Y \cap V) = \mathfrak{j}_y$ dans $A(V)$, donc $J(y)$ est l'idéal maximal $\mathfrak{j}_y O_X(y)$ de $O_X(y)$, et $O_{Y_{red}}(y) = O_X(y)/J(y)$ est le corps résiduel $k(y)$. Comme $F|Y$ est un faisceau cohérent sur Y_{red} , F_y est un espace vectoriel de dimension finie m sur $k(y)$. Cela étant , il y a par hypothèse un faisceau $G \in \underline{K}'$ dont le support est contenu dans Y et tel que G_y soit un $O_X(y)$-module simple , ou , ce qui revient au même , un $k(y)$-espace vectoriel de dimension 1 . Il y a par suite un $k(y)$-isomorphisme $(G_y)^m \to F_y$, et comme G^m et F sont des faisceaux cohérents , il existe un voisinage ouvert W de y dans X et un isomorphisme $G^m|W \to F|W$ (FAC, I, 2, 14, prop. 5) . Soit H le graphe de cet isomorphisme , identifié à un sous-faisceau de $(G^m \times F)|W$, et qui est un faisceau cohérent sur W , isomorphe à $G^m|W$ et à $F|W$; il existe par suite un sous-faisceau cohérent H_0 de $G^m \times F$, induisant H sur W et 0 sur $\complement W$ (n°2 th

1) . Les restrictions $u : H_o \to G^m$ et $v : H_o \to F$ à H_o des projections de $G^m \times F$ sont alors des homomorphismes de faisceaux cohérents , qui , dans W et dans $\complement Y$, se réduisent à des isomorphismes ; autremen dit , les noyaux et conoyaux de u et v ont leur support dans l'ensemble fermé $Y - Y \cap W$, distinct de Y , et appartiennent par suite à $\underline{K}'$; d'autre part $G \in \underline{K}'$ et par suite aussi $G^m \in \underline{K}'$ puisque $\underline{K}'$ est exacte . On en conclut tout d'abord que $H_o \in \underline{K}'$, puis que $F \in \underline{K}'$, puisque $\underline{K}'$ est exacte . C.Q.F.D.

<u>Corollaire .- Supposons que la sous-classe exacte $\underline{K}'$ de $\underline{K}$ ait en outre la propriété que tout facteur direct d'un faisceau cohérent</u> $M \in \underline{K}'$ <u>appartient encore à</u> $\underline{K}'$. <u>Dans ces conditions , la conclusion du th.3 subsiste encore lorsque la condition</u> "G_y <u>est un module simple sur</u> O_y" <u>est remplacée par</u> "$G_y \neq 0$" .

En effet , le raisonnement ne doit être modifié que dans le cas b) : G_y est alors un espace vectoriel sur $\kappa(y)$, de dimension $q > 0$, et on a donc cette fois un isomorphisme $(G_y)^m \to (F_y)^q$; la fin du raisonnement du th.3 prouve alors que $F^q \in \underline{K}'$, et l'hypothèse additionnelle sur $\underline{K}'$ entraîne alors $F \in \underline{K}'$.