

21 janvier 1965

Cher Samuel,

J'ai réfléchi un petit peu à tes Galaxies. Il ne me semble pas exclu qu'on puisse s'en tirer pour toutes les Maths habituelles avec les seules Galaxies, mais cela obligera à revoir de fond en comble la façon dont on est maintenant habitué à travailler avec les "grosses" catégories. Il ne sera plus question, pour une telle catégorie (disons la catégorie des ensembles éléments de la Galaxie) que les sommes ou produits d'objets de la catégorie C , indexés par un ensemble I élément de la Galaxie, puissent exister : on ne se permettra de prendre de telles limites que pour des $X_i \in C$ qui restent, vaguement parlant en général, de cardinal borné par un cardinal élément de la Galaxie, -condition automatiquement vérifiée lorsque la Galaxie est un Univers. Cela obligera à munir les "grosses" catégories chacune d'un antifiltre de sous-catégories (dont les éléments seront justement, vaguement parlant, formés des sous-catégories dont les objets ont un cardinal borné par un cardinal élément de la Galaxie). Bien entendu, il faudra trouver de bons axiomes généraux à mettre sur ces filtrations (qui, pour une "petite catégorie" i.e. une catégorie élément de la Galaxie, sera la filtration triviale, i.e. C lui-même appartient à l'antifiltre). On se permettra de considérer que des foncteurs qui sont compatibles avec les antifiltres donnés, ce sera en particulier le cas dans le tapis des foncteurs représentables. Cela changera un certain nombre d'habitudes de pensée, les Univers permettant en un sens un langage plus proche de l'intuition naïve que les Galaxies, qui elles ont l'avantage de ne pas introduire d'axiome supplémentaire un peu artificiel dans la théorie des ensembles.

De toutes façons, pour se rendre compte si les Galaxies sont vraiment viables, il faut faire le test en travaillant avec. Comme textes de test je peux te proposer les suivants : Hohoku, SGAD I et IV, SGAA I, II, III (les trois exposés de Verdier sur

les sites, déjà tirés). Bien entendu, des définitions comme celle des topos doivent être reformulées également en termes de catégories antifiltrées (il faudrait trouver un terme plus lapidaire et plus adéquat pour le genre de catégories antifiltrées auquel on en a, d'ailleurs). Je crois que quelques journées de travail doivent suffire pour se rendre compte si les Galaxies ne vont pas déconner ; quant à savoir si les contorsions techniques ne vont pas être sensiblement plus grandes que dans le système des Univers, seul des rédactions plus ou moins en forme permettront de s'en rendre compte.

Je pense qu'il y a intérêt à tirer la question au clair assez rapidement, et en tous cas avant que Chevalley et Gabriel n'aient mis leur travail sur les catégories et foncteurs sous forme définitive. Il serait en effet ennuyeux, une fois publié un bon livre de fondements, attendu avec impatience par les usagers, et quand les gens seront bien habitués au cadre des Univers, de revenir sur ces questions encore une fois et d'essayer de tout changer. Aussi, "si j'étais Bourbaki", je te déchargerais illico de toutes autres tâches de rédaction, pour faire la prospection des Galaxies à temps complet !

Bien à toi.

A. GROTHENDIECK