15.9.67

Cher Dieudonné,

Tes objections de ta lettre du 11 Septembre sont encore fondées. D'ailleurs, il ne me semble pas évident que le fait de pouvoir trouver p,q fixes tels qu'on ait des suites exactes $A_n^p \to A_n^q \to M_n \to 0$, permette de s'en tirer; tant mieux si tu y arrives. L'existence de ces p et q me semble d'autre part facile, en utlisant le

Lemme Soit A un anneau, M un A-module, $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ des éléments de A engendrant l'idéal unité, ~~mxxxxxxxx~~ supposons que pour tout i, le A_{f_i}-module M_{f_i} soit engendré par m_i générateurs. Alors M est engendré par $m=\sum_i m_i$ générateurs.

Démonstration: soient $g^i_j \in M_{f_i}$ $(1 \leq j \leq m_i)$ les générateurs de M_{f_i}, on aura donc $g^i_j = h^i_j/f_i^{N_{ij}}$, avec $h^i_j \in M$. Alors les h^i_j pour j fixes engendrent $\widetilde{M}$ sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(A_{f_i})$ de $\mathrm{Spec}(A_f)$, donc comme pour i variable ces ouverts recouvrent Spec(A), il s'ensuit que les h^i_j pour i,j variables engendrent $\widetilde{M}$, donc M, ce qui établit le lemme.

Revenant alors à la situation de 10.10.5 , on sait que $M = \varprojlim M_n$ est un A-module de type fini, considérons alors un épimorphisme $u: A^q \to M$. Soient $f_i \in A$ dont les images dans A_0 engendrent l'idéal unité, et tel que sur les ~~Spec~~ ouverts correspondants $X_{(i)}$ de X = Specf(A), F admette une présentation finie, donc soit de la forme $M_{(i)}^{\triangle}$, où $M_{(i)}$ est un $A_{(i)} = A_{\{f_i\}}$-module de présentation finie. Alors u restreint à X_i définit un épimorphisme $A_{(i)}^q \to M_{(i)}$, et comme $M_{(i)}$ est de présentation finie, il existe un homomorphisme v_i rendant exacte la suite $A_{(i)}^p \to A_{(i)}^q \to M_{(i)} \to 0$. Tensorisant par A_n, on en déduit une suite exacte $(A_n)_{f_i}^p \to (A_n)_{f_i}^q \to (M_n)_{f_i} \to 0$, ce qui montre que, si $R_n = \mathrm{Ker}(A_n^q \to M_n)$, ~~alors~~ R_n est sur $\mathrm{Spec}(A_{n\,f_i})$ engendré par p éléments. Donc, en vertu du lemme, R_n est engendré par mp éléments où m est le nombre des f_i , et mp est bien indépendant de n.

La difficulté qui ~~xxxxx~~ semble rester est de trouver les suites exactes que tu demandes de telle façon qu'elles se recollent, pour n variable. Donc, u étant déjà choisi, de trouver un homomorphisme $A^p \to A^q$ ~~xxxxxxxxx~~ dont l'image soit Ker u ... Si tu y arrives, on pourrait présenter encore 10.10.5 sous forme de trois conditions équivalentes, mais en demandant dans b) une "prsentation finie" uniformément en n" . Sinon, il faudrait trouver un contre-exemple à ~~xxxxxxx~~ l'implication a) c) , car il me semble que la question devrait être tirée au clair. En tout état de cause, il faudra donner, en corollaire, l'équivalence des conditions suivantes, valables sans hypothèses noethériennes:

a) F est localement libre de type fini.

b) F est isomorphe à la limite projective d'une suite (F_n) de $\underline{O}_{X_n}$ - Modules loc libres de type fini qui se recollent.

c) F est isomorphe à un M^{Δ} , avec M un A-module projectif de type fini.

Pour la démonstration, on procède comme dans 10.10.5 en utilisant EGA IV 18.3.2.1 . Ce lemme devrait d'ailleurs venir en corollaire ~~x~~ après O_I 7.2.9.

Pour les modification~~s~~ que je préconaisais pour I 10.11.3, elle~~s~~ tombe~~nt~~ à l'eau si on n'arrive pas à arranger 10.10.5 sans hypothèses noethériennes; on peut cependant dire que si F sur X est de présentation finie, alors il est limite projective de faisceaux F_n de présentation finie sur les X_n qui se recollent (mais on n'a pas une réciproque), et que F est localement libre si les F_n le sont. Et ~~xxxxx~~ les autres énoncés du n° 10.11. restent valables sans hypothèse noethérienne, sauf 10.7.11.2 et la partie "injectivité" dans 10.11.9 (sauf erreur).

Bien cordialement

A. Grothendieck