C. R. Acad. Sc. Paris, t. 257, p. 2948-2950 (13 novembre 1963). Groupe 1.

ALGÈBRE. — *Étude différentielle des anneaux locaux réguliers : applications.*
Note (*) de M. **Jean-Pierre Jouanolou**, présentée par M. René Garnier.

Le paragraphe 1 donne pour les anneaux locaux usuels (localités, localités analytiques, etc.) une caractérisation différentielle de régularité. Remarquant que, pour ces anneaux, la complétion se fait de façon « séparable », on montre que la réduction et la normalité analytiques en résultent simplement.

1. Les critères différentiels de régularité de Nakai, Suzuki et Mount font apparaître en caractéristique $p > 0$ une ~~condition~~ de réduction analytique (il y a des exemples contraires sinon). L'énoncé suivant permet d'éviter cette condition dans les cas usuels : appel l'a hypothèse

Proposition 1. — *Soient* A *un anneau local régulier équicaractéristique tel que* D (A) *soit plat et* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* A *tel* $A/\mathfrak{a}$ *soit réduit.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(*a*) $A/\mathfrak{a}$ *est régulier;*

(*b*) $\mathrm{Tor}_1^{A/\mathfrak{a}}(A/\mathfrak{m}, D(A)) = 0$; A/a

(*c*) $\mathrm{Tor}_i^{A/\mathfrak{a}}(A/\mathfrak{m}, D(A)) = 0$ *pour tout* i *supérieur ou égal à* 1 ($\mathfrak{m}$ *désignant l'idéal maximal de* A).

De plus, si D (A) *est libre,* (*a*) *équivaut à :*

(*d*) D $(A/\mathfrak{a})$ *est libre.*

Corollaire 1. — *Soient* k *un corps valué complet de caractéristique* $p > 0$ *et tel que* $(k : k^p) < +\infty$, B *une algèbre de séries convergentes sur* k *et* A *un anneau réduit localisé d'un anneau quotient de* B. *Pour que* A *soit régulier, il faut et il suffit que* D (A) *soit libre.*

Corollaire 2 [Kunz ([3])]. — *Pour qu'une localité réduite* A *soit régulière, il faut et il suffit que son module de différentielles absolu* D (A) *soit libre.* contenu dans les critères jacobiens ---

Corollaire 3 [Suzuki ([10]), Mount ([5])]. — *Soit* A *un anneau local nœthérien analytiquement réduit de caractéristique* $p > 0$ *et tel que le séparé* D' (A) *soit de type fini. Alors, pour que* D' (A) *soit libre, il faut et il suffit que* A *soit régulier.* assez rare!

La proposition 1 fournit des critères pour que l'ensemble des points non réguliers du spectre d'un anneau (lieu singulier) soit un fermé, notamment :

Proposition 2. — *Si* A *est un anneau global régulier équicaractéristique tel que* D (A) *soit libre, le lieu singulier de toute* A*-algèbre affine* B *est fermé.* séries formelles??

En particulier :

Proposition 3. — *Soit* G *un schéma en groupes régulier sur un corps parfait. Alors tout schéma de type fini sur* G *a un lieu singulier fermé.* canoniques

2. Dans tout ce qui suit, A étant un anneau local, nous désignerons par L_A son corps résiduel et par K_A son corps de fractions s'il est intègre.

1

Soient A un anneau local nœthérien et $\hat{A}$ son complété. On a :

LEMME. — *Le noyau de l'application canonique :* $\hat{A} \otimes_A D(A) \to D(\hat{A})$ *est contenu dans l'intersection :* $\bigcap_{M \in \sigma} \left(\hat{A} \otimes_A M \right)$, *où* σ *désigne l'ensemble des sous-modules* M *de* D (A) *tels que* $F = D(A)/M$ *soit un* A-*module de type fini.*

De ce lemme on déduit que si D (A) est semi-fini au sens de Suzuki [10], c'est-à-dire somme directe d'un module libre et d'un module de type fini, la suite canonique

$$0 \to \hat{A} \otimes_A D(A) \to (\hat{A}) \to D_A(\hat{A}) \to 0$$

est exacte.

Cela entraîne notamment :

PROPOSITION 4. — *Si* A *est une localité analytiquement intègre,* $K_{\hat{A}}$ *est séparable sur* K_A.

Con[illegible]

De même (*cf.* cor. 1 de la prop. 1), si A est un anneau de séries convergentes sur un corps valué complet de caractéristique $p > 0$ et tel que $(k : k^p) < +\infty$, $K_{\hat{A}}$ est séparable sur K_A. Ceci permet de combler ce qui nous paraît être une lacune dans la démonstration donnée par Lang [4] du résultat suivant :

PROPOSITION 5. — *Si* $A = k\{T\}$ *est l'anneau des séries convergentes sur un corps* k *valué complet et algébriquement clos,* K_A *est quasialgébriquement clos* (C^1).

Un cas particulier de la proposition 4, classique, est que $K((X_1, X_2, \ldots, X_n))$ est séparable sur $K(X_1, \ldots, X_n)$ pour tout corps K. Il implique, en tenant compte du théorème de structure de Cohen :

PROPOSITION 6. — *Soit* A *un anneau local régulier contenant un corps* k *tel que* L_A *soit séparable sur* k. *Alors* K_A *est aussi séparable sur* k.

3. CRITÈRE DE RÉDUCTION ANALYTIQUE. — La comparaison de la proposition 1 et des énoncés de Suzuki et Mount suggère l'existence d'un critère de réduction analytique sous-jacent; nous nous proposons de voir dans ce paragraphe comment les conclusions du paragraphe 2 permettent d'en obtenir un. Notons tout d'abord le lemme suivant qui peut être considéré comme classique :

LEMME. — *Soit* A *un anneau local nœthérien analytiquement intègre et tel que* $K_{\hat{A}}$ *soit séparable sur* K_A. *Si* B *est un anneau local intègre de la forme* $B = C_{\mathfrak{p}}$, *où* C *est une* A-*algèbre finie et* $\mathfrak{p}$ *un idéal premier de* C *tel que* $\mathfrak{p} \cap A = \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ *idéal maximal de* A), B *est analytiquement réduit.*

faux d'où un [illegible] si $A \to \hat{A}$ injectif ??

On en déduit :

THÉORÈME. — *Soit* A *un anneau local régulier vérifiant l'une ou l'autre des conditions suivantes :*

(h_1) K_A *est de caractéristique* 0;

(h_2) D (A) *est libre.*

2

C ⊃ A !!!

Alors toute A-*algèbre intègre qui est localisée d'une* A-*algèbre finie* (*i. e.* A-*module de type fini*) C *est analytiquement réduite.*

(Pour appliquer le lemme, on remarque que h_1 et h_2 sont stables par localisation.) faux

De l'existence de lemmes de normalisation [pour les séries convergentes, *voir* (5) par exemple], on déduit :

Corollaire 1 (Chevalley). — *Toute localité intègre est analytiquement réduite.*

Corollaire 2. — *Soient k un corps d'exposant caractéristique p tel que* $(k : k^p) < +\infty$, B *une algèbre de séries convergentes sur k et* A *un anneau intègre localisé d'un anneau quotient de* B. *Alors* A *est analytiquement réduit.*

Dans le même ordre d'idées, notons la :

Proposition 7. — *Soit* A *un anneau local nœthérien analytiquement intègre et tel que* $K_{\hat{A}}$ *soit séparable sur* K_A. *Alors la fermeture intégrale de* A *dans toute extension finie* L *de* K_A *est un* A-*module de type fini.* connu (Nagata)

La proposition 7 s'applique aux localités, aux localités analytiques et aux algèbres de Hopf régulières sur un corps parfait. ?

D'après le lemme 2 (p. 314, chap. 8, § 13) de (11), on voit alors par exemple qu'une localité analytique vérifiant les conditions du corollaire 2 et normale est analytiquement normale. connu

(*) Séance du 4 novembre 1963.

(1) Berger et Kunz, *Math., Z.*, 77, 1961, p. 314-338.
(2) Godement, *Séminaire Cartan-Chevalley*, 1955-1956, exp. 17, 18, 19.
(3) Kunz, *Math. Z.*, 76, 1961, p. 56-74.
(4) Lang, *Ann. Math.*, 55, 1952, p. 373-390.
(5) Mount, *Proc. Amer. Math. Soc.* juin 1963.
(6) Nagata, *Locals rings*, Inters., Tracts no 13, 1962.
(7) Nagata, *On the closedness of singular loci*, Publ. I. H. E. S., no 2, 1959.
(8) Nakai, *J. Math. Soc. Japan*, 13, 1961, p. 63-84.
(9) Nakai et Suzuki, *J. Sc. Hiroshima Univ.*, série A, 23, 1960, p. 459-476.
(10) Suzuki, *J. Math. Kyoto Univ.*, 2, 1963, p. 157-182.
(11) Zariski et Samuel, *Commutative Algebra*, Van Nostrand.

(7, *rue Chernoviz, Paris*, 16e).

3