C. R. Acad. Sc., t. 256, p. 842-844. Séance du 21 janvier 1963. Groupe 1

ALGÈBRE. — *Sur les modules de différentielles.*

Note (*) de M. **Jean-Pierre Jouanolou**, présentée par M. René Garnier.

Application des modules de différentielles aux algèbres quasi-séparables et aux anneaux locaux réguliers.

A et B désignent dans toute cette Note deux anneaux commutatifs et unitaires, $u : A \to B$ un monomorphisme unitaire et $D_A(B)$ le B-module des différentielles de l'algèbre ainsi définie. Le passage de cette situation « globale » à la situation « locale » se fait en imposant à A, B, u d'être locaux; l'idéal maximal de A (resp. B) sera en ce cas noté $\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{n}$) et son corps résiduel L_a (resp. L_b); par ailleurs, le rang de $\mathfrak{m}$ est $\operatorname{rg}\mathfrak{m} = \dim_{L_a}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$, et de même pour $\mathfrak{n}$. Rappelons qu'étant donnée une extension de corps : $K \to L$, la dimension du L-espace vectoriel $D_K(L)$ représente en caractéristique 0 (resp. $p > 0$) le degré de transcendance de L par rapport à K (resp. le nombre d'éléments d'une p-base de L par rapport à K) : on la notera $\{L:K\}$ dans tous les cas.

Nous nous proposons d'étudier d'abord les cas où $D_A(B)$ est nul, puis ceux où il est libre (en liaison avec la régularité des anneaux locaux), le tout grâce aux deux suites exactes établies dans le cadre local par Berger et Kunz [1] :

$$0 \to \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{m}B} \to L_b \otimes_B D_A(B) \to D_{L_a}(L_b) \to 0,$$

$$0 \to \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}^2 + (\mathfrak{n} \cap A[B^p])\,B} \to L_b \otimes_B D_A(B) \to D_{L_a}(L_b) \to 0.$$

La première est vraie si L_b est séparable sur L_a, la deuxième, sinon : alors $p > 0$ désigne la caractéristique des corps résiduels.

1. Structure des algèbres quasi-séparables. — Une A-algèbre B est dite quasi-séparable lorsque $D_A(B) = 0$. Il s'agit là d'une propriété locale, en ce sens que B est quasi-séparable si pour tout idéal maximal $\mathfrak{n}$ de B, $B_{\mathfrak{n}}$ est quasi-séparable sur $A_{\mathfrak{m}}$ ($\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap A$), et seulement en ce cas.

non ramifié

Localement :

(i) Si L_b est séparable sur L_a (en particulier en caractéristique 0) : lorsque B est quasi-séparable,

$$(\mathrm{R}) \quad \mathfrak{n} = \mathfrak{n}^2 + \mathfrak{m}B,$$

et L_b est algébrique (resp. relativement parfait [2]) sur L_a en caractéristique 0 (resp. $p > 0$) la réciproque étant vraie si l'on suppose, en outre, que $D_A(B)$ est de type fini. Notons que si B est nœthérien, ou plus généralement si $\mathfrak{n}$ est de type fini, la relation (R) s'écrit

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{m}B,$$

!? ce qui exprime que B n'est pas ramifié sur A.

5

(ii) En caractéristique $p > 0$ (pour les corps résiduels) : si B est quasi-séparable, L_b est relativement parfait [2] sur L_a et

$$(S) \quad \mathfrak{n} = (\mathfrak{n} \cap A[B^p])B + \mathfrak{n}^2,$$

la réciproque étant vraie si l'on suppose en outre $D_A(B)$ de type fini. Si B est nœthérien, (S) se simplifie encore.

Globalement :

(i) Soit A un anneau nœthérien quasi-séparable sur un corps K :

— en caractéristique 0, A est composé direct d'une famille finie d'extensions algébriques de K;

— en caractéristique $p > 0$, si pour tout idéal maximal de A le corps résiduel est une extension séparable (resp. de type fini) de K, A est composé direct d'une famille finie d'extensions séparables et quasi-séparables (resp. algébriques séparables) de K.

(ii) Soit A une algèbre quasi-séparable sur un corps K :

— en caractéristique 0, tout idéal premier de A est maximal et tous les corps résiduels des localisés de A sont des extensions algébriques de K;

— en caractéristique $p > 0$, si pour tout idéal premier $\mathfrak{g}$ de A le corps $A_\mathfrak{g}/\mathfrak{g}A_\mathfrak{g}$ est de type fini sur K, alors tout idéal premier de A est maximal et tous les corps résiduels sont des extensions algébriques séparables de K;

— Sous l'une ou l'autre de ces hypothèses, le quotient de A par sa nilracine est un anneau absolument plat [3].

2. Différentielles et anneaux locaux réguliers. — On se place dans le cadre local, en supposant même A et B intègres, de corps des fractions K_a et K_b, et les cardinaux $\{L_b:L_a\}$, $\{K_b:K_a\}$, $\operatorname{rg}\mathfrak{n}$ finis.

Théorème. — *Si* $D_A(B)$ *est de type fini (en particulier si* B *est de type fini sur* A*) il y a équivalence entre :*

(i) $D_A(B)$ *est libre;*

(ii) *a. Dans le cas où* L_b *est séparable sur* L_a *:*

$$\dim_{L_b} \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}^2 + \mathfrak{m}B} = \{K_b:K_a\} - \{L_b:L_a\};$$

b. Sinon, $p > 0$ *désignant la caractéristique de* L_b *et* L_a *:*

$$\dim_{L_b} \frac{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}^2 + (\mathfrak{n} \cap A[B^p])B} = \{K_b:K_a\} - \{L_b:L_a\}.$$

Notons que l'hypothèse « $D_A(B)$ de type fini » entraîne que les cardinaux $\{K_b:K_a\}$ et $\{L_b:L_a\}$ sont finis. De plus, l'égalité (ii) *a* s'écrit :

— Si A est un corps : $\operatorname{rang}\mathfrak{n} = \{K_b:A\} - \{L_b:A\}$,

— Si B est non ramifié sur A : $\{K_b|K_a\} = \{L_b|L_a\}$.

6

COROLLAIRE. — *Si* A *est une localité sur le corps* K, *telle que* K_a *et* L_a *soient séparables sur* K, *il y a équivalence entre :*

(i) $D_K(A)$ *est libre*;

(ii) A est régulier.

PROPOSITION 1. — *Si* A *domine un corps* K, *tel que* $D_K(A)$ *soit libre et de rang fini, si* K_b *(resp.* L_a*) est séparable sur* K_a *(resp.* L_b*) et si*

$$\mathrm{rg}\,\mathfrak{n} - \mathrm{rg}\,\mathfrak{m} = \{K_b : K_a\} - \{L_b : L_a\},$$

$D_A(B)$ *est un* B*-module de dimension homologique finie* $\leqq 1$.

COROLLAIRE. — *Si* A *est un anneau local régulier contenant un corps* K, *tel que le couple* (K, A) *jouisse des propriétés énoncées dans le corollaire ci-dessus,* $D_A(B)$ *est de dimension homologique* $\leqq 1$ *sous les hypothèses de la proposition* 1.

PROPOSITION 2. — *Soit* A *un anneau local nœthérien contenant un corps* K *tel que* $\{L_a : K\}$ *soit fini et que* L_a *soit séparable sur* K. *Si* $D_K(A)$ *est libre, de rang* $\dim A + \{L_a : K\}$, A *est local régulier.*

Notons, pour conclure, que dans de nombreuses questions (*cf.* géométrie formelle) il vaut mieux séparer $D_A(B)$ en considérant

$$D'_A(B) = \frac{D_A(B)}{\bigcap\limits_{n \geqq 0} \mathfrak{n}^n D_A(B)};$$

la proposition 2 est encore vraie, lorsqu'on y substitue $D'_K(A)$ à $D_K(A)$.

(*) Séance du 14 janvier 1963.

(1) BERGER et KUNZ, *Math. Z.*, 77, 1961, p. 314-338.

(2) BOURBAKI, *Algèbre*, chap. V, § 8, ex. 1.

(3) BOURBAKI, *Algèbre comm.*, chap. I, § 2, ex. 17.

(4) GODEMENT, *Séminaire Cartan-Chevalley*, 1955-1956, exposés 17 et 18.

(5) NAKAI, *J. Math. Soc. Japan*, 1961.

(6) NAKAI et SUZUKI, *J. Sc. Hiroshima Univ.*, série A, 24, nº 3, décembre 1960.

(*École Normale Supérieure*, 45, *rue d'Ulm*, *Paris*, 5e.)