Torseur relativement universel.

Soit

$$f: X \longrightarrow S$$

un morphisme de schémas, T un schéma en groupes commutatifs sur S, Q un torseur sous T_X . On considère la catégorie des couples (P,ϕ), où P est un torseur sous un schéma en groupes commutatifs G sur S, et $\phi: T \to G$ un homomorphisme de groupes, un homomorphisme de $(P,\phi;G)$ dans $(P',\phi';G')$ étant un homomorphisme de torseurs $u: P \to P'$ compatible avec un homomorphisme de Groupes $v: G \to G'$ satisfaisant $v\phi = \phi'$. On a un foncteur

$$(P,\phi) \mapsto (G, P_X \otimes \phi(Q))$$

de la catégorie précédente dans la catégorie des couples (G,K) d'un schéma en groupes G sur S et d'un G_X-torseur K (les morphismes y étant évidents). Pour simplifier, on se restreindra par la suite aux G qui sont localement de présentation finie sur S. On s'intéressera aux propriétés de fidélité de ce foncteur; on pourra dire que Q est universel (relativement à $f:X \to S$) si, à condition de se borner aux G plats et localement de présentation finie sur S (et séparés sur S ?) le foncteur précédent est une équivalence de catégories, et le reste après tout changement de base. On pourra dire que Q est 0-universel (resp. 1 universel) si le foncteur envisagé (avec G localement de présentation finie sur S) est 0-fidèle (resp. 1-fidèle) et le reste après tout changement de base.

Nous supposons par la suite que T est de type multiplicatif et de type fini, et que f est propre, de présentation finie, et fidèlement plat (de dernier fait impliquant déjà que Q est 0-fidèle). Nous allons prouver:

Proposition 1 Sous les conditions précédentes, pour que (T,Q) soit 1-fidèle, il faut et il suffit qu'il satisfasse les ~~deux~~ trois conditions suivantes:

a) Pour tout $s \in S$, on a $k(s) \xrightarrow{\sim} H^0(X_s, \underline{O}_{X_s})$.

b) Pour tout $s \in S$, $\underline{\mathrm{Pic}}_{X_{\bar{s}}/k(\bar{s})}$ n'a pas de sous-schéma abélien non nul.

c) Pour tout $s \in S$, l'homomorphisme

$$M(\bar{s}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X_{\bar{s}})$$

défini par $Q_{\bar{s}}$ est <u>injectif</u>, où M est le groupe constant tordu sur S dual de T.

On montre d'abord que a) et b) implique la conclusion, lorsqu'on se borne aux (P,ϕ) avec $\phi = 0$, auquel cas elle se réduit à

$$G \xrightarrow{\sim} f_*(G_X) ,$$

i.e. à vérifier que tout S-morphisme $X \to G$ est "constant", et on sait grâce à a) qu'il suffit de vérifier cette conclusion fibre par fibre, ou elle résulte de b) et du dévissage des groupes algébriques. Il reste à prouver, moyennant c), la même conclusion sans restriction sur ϕ , ou encore prouver que si $P_X \phi(Q)$ est trivial, alors $\phi = 0$. Mais on sait encore qu'il suffit de vérifier cette condition sur chaque fibre géom. On peut donc supposer $S=\mathrm{Spec}(k)$, k alg. clos. Si $G'=\phi(T)$, la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(X,G) & \to & H^0(X,G/G') & \to & H^1(X,G') & \to & H^1(X,G) \\ \wr & & \wr & & & & \\ G(k) & & (G/G')(k) & & & & \end{array}$$

montre que $H^1(X,G') \to H^1(X,G)$ est injectif, de sorte qu'on est ramené au cas $G=G'$ donc G' de type multiplicatif, donc G' un produit de groupes $\underline{G}_m$ et μ_n . On peut donc supposer que G est d'un des deux types précédents, et prouver qu'alors

$$\mathrm{Hom}(T,G) \longrightarrow H^1(X,G)$$

est injectif. Or pour $G=\underline{G}_m$ cette application est celle envisagée dans c), et pour $G=\mu_n$, c'est l'application induite sur les points tués par n

Par ailleurs, la nécessité des conditions a), b) et c) (même en se bornant à des G lisses sur S, et même à $G=\underline{G}_m$) est bien claire.

<u>Remarque</u> La condition "T de type multiplicatif" n'est pas très naturelle, il serait plus beau de se borner à supposer que T est une extension d'un schéma (constant et tordus [illegible] donnés par un sch[illegible]) en groupes fini localement libre par un schéma de type (tore) multiplicatif, ce qui permet de définir le dual $M=D(T)=\underline{Hom}_{gr}(T,\underline{G}_m)$ comme extension d'un groupe constant tordu par un groupe fini localement libre sur S, et de définir

$$(*) \qquad M \longrightarrow \underline{Pic}_{X/S}$$

de façon évidente. La condition naturelle qui devrait remplacer c) est alors que le morphisme précédent est un monomorphisme. Cela donne en tous cas la conclusion cherchée lorsqu'on se borne aux G qui sont finis localement libres sur S [car on sait que pour un tel G on a $R^1f_*(G_X) \simeq \underline{Hom}_{gr}(D(G),\underline{Pic}_{X/S})$, et l'application ~~cherchée~~ à étudier $\underline{Hom}_{gr}(D(M)=T,G) \rightarrow R^1f_*(G_X)=\underline{Hom}_{gr}(D(G),\underline{Pic}_{X/S})$ n'est autre que la transposition suivie de la composition avec $(*)$]. Le même argument montre que pour qu'on ait 2-fidélité du foncteur envisagé, après tout changement de base, en se bornant encore aux mêmes G, ~~ou plus générale~~ ou plus généralement à ceux pour lesquels la formule de dualité précédente est vraie (~~essentiellement, les duals de Cartier de~~ par exemple ceux qui sont réflexifs pour Cartier et dont le dual est représentable ... par exemple les extensions successives de groupes constants tordus, de groupes de t.m. et de groupes finis localement libres ...) il suffit (et il faut aussi, évidemment) que $(*)$ soit un isomorphisme. Il est plausible qu'il en est encore de même pour ~~tout~~ des G localement de présentation finie et plats sans plus. Tout au moins, revenant au cas T de type multiplicatif, on trouve:

Supposer que f lim.

<u>Proposition</u> 2 Pour que, pour des G lisses (et séparés ?) sur S, le torseur Q sous T soit universel, il faut et il suffit que la condition a) ci-dessus soit satisfaite, ainsi que la condition

d) L'homomorphisme (*) $M \to \underline{Pic}_{X/S}$ est un <u>isomorphisme</u>,

ou de façon équivalente, que la condition d) soit vraie sur les fibres géométriques. Il est encore équivalent de dire que pour tout $s \in S$, on a

$$H^0(X_s,\underline{O}_{X_s}) \simeq k(s),\quad H^1(X_s,\underline{O}_{X_s}) = 0 ,$$

et que pour tout s l'application envisagée dans c) soit <u>bijective</u>.

L'équivalence des deux critères énoncés entre eux est en effet claire. Comme il est connu que la condition sur les H^1 implique b), il reste à vérifier que les conditions envisagées impliquent la surjectivité essentielle du foncteur auquel on en a (sachant déjà qu'il est pleinement fidèle), (la nécessité dans la proposition est bien facile et résulte par exemple (si on veut être savant) des considérations dans la remarque.)

Quant à la surjectivité essentielle moyennant les conditions énoncées, elle est donnée par les arguments de Deligne, sur lesquels il est inutile de revenir. Il est probable qu'on peut arriver à les faire marcher sans hypothèse de lissité sur G, G étant plat localement de présentation finie, à condition d'arriver à généraliser et à préciser comme il convient le résultat de Mazur-Roberts sur le complexe cotangent relatif d'un schéma en groupes plat de présentation finie ..... La restriction à G lisse semble d'ailleurs particulièrement idiote quand on n'a pas envie de supposer T lisse (hypothèse en effet peu naturelle).

<u>Construction d'un Q</u>, quand on donne $M \to \underline{Pic}_{X/S}$. Possible si on a a), et si X/S admet une section [en rigidifiant le long d'icelle].