2443 notes du 10.9.68

Tapis de Quillen.

I Relations entre catégories et ensembles semi-simpliciaux.

A toute catégorie C, on associe un ensemble semi-simplicial S(C), trouvant ainsi un foncteur pleinement fidèle ~~dexCat~~

$$S ; (Cat) \longrightarrow (Ssimpl) \quad .$$

~~SixCxestxassociéx~~ Les systêmes locaux d'ensemble sur SC correspondent aux fancteurs sur C qui transforment toute flêche en isomorphisme (i.e. qui se factorisent par le groupoïde associé à C). Les H^i sur SC d'un tel systême local (H^o pour ens, H^1 pour groupes, H^i quelconques pour groupes abéliens) s'interprètent en termes des foncteurs $\varprojlim^{(i)}$ dérigés de $\varprojlim$, ou si on préfère, des $H^i($ du topos $\tilde{C}$. On voit ainsi à quelle condition un foncteur $C \to C'$ induit un~~x~~ homotopisme $SC \to SC'$: en vertu du critère cohomologique de Artin-Mazur, il f et s que pour tout systême de coéfficients F' sur C', l'homomorphisme naturel $\varprojlim_{C'}^{(i)} F' \longrightarrow \varprojlim_{C}^{(i)} F$ soit un isomorphisme (pour les i pour lesquels cela a un sens). ~~Enxtxxmxx~~

A C on peut associer le topos $\tilde{C}$, qui varie de façon covariante avec C. (NB le foncteur $C \mapsto \tilde{C}$ n'a plus rien de pleinement fidèle, semble-t-il ??) Les systêmes de coéfficients ensemblistes sur C (déf = les foncteurs $C^o \to$ Ens transformant isomorphismes en isomorphismes) correspondent aux faisceaux localement constants, i.e. les objets localement constants de $\tilde{C}$, définis intrinsèquement en terme de $\tilde{C}$. Ainsi, le fait pour un foncteur $F : C \to C'$ d'induire un ~~xéquivalence~~ homotopisme $S(C) \to S(C')$ ne dépend que du morphisme de topos $\tilde{F} : \tilde{C} \to \tilde{C}'$ induit, et signifie que pour tout faisceau localement constant F' sur C' i.e. sur $\tilde{C}'$, les applications induites $H^i(\tilde{C}', F') \longrightarrow H^i(\tilde{C}, \tilde{F}^*(F'))$ sont des isomorphismes (pour les i pour lesquels cela a un sens).

On a aussi un foncteur évident

$$T: (\mathrm{Ssimpl}) \longrightarrow (\mathrm{Cat}) ,$$

en associant à tout ensemble semi-simplicial X la catégorie $T(X) = \Delta_{/X}$ des simplexes sur X, dont l'ensemble des objets est la réunion disjointe des X_n .... (c'est une catégorie fibrée sur la catégorie Δ des simplexes types, à fibres les catégories discrètes définies par les X_n). Ceci posé, Quillen prouve que pour tout X, ST(X) est isomorphe canoniquement à X dans la catégorie homotopique construite avec (Ssimpl), et que pour toute C, la catégorie TS(C) est canoniquement "homotopiquement équivalente à C" ~~dans le sens~~ i.e. canoniquement isomorphe à C dans la catégorie quotient de (Cat) obtenue en inversant les foncteurs qui sont des homotopismes. ~~Il en résulte~~ Ces isomorphismes sont fonctoriels en X. Il en résulte formellement qu'un morphisme f:X→Y dans (Ssimpl) est un homotopisme si et seulement si il en est ainsi de T(f):T(X) →T(Y), d'où des foncteurs S': (Cat)' ⟶ (Ssimpl)' et T':(Ssimpl)'→(Cat)' entre les catégories "homotopiques", construites avec (Cat) resp. (Ssimpl), qui sont quasi-inverses l'un de l'autre.

De plus, Quillen construit un isomorphisme canonique et fonctoriel dans (Cat)' entre C et la catégorie opposée C^o , ou ce qui revient au même, un isomorphisme canonique et fonctoriel dans (Ssimpl)' entre S(C) et $S(C^o)$. ~~Cela lui permet alors, pour~~ La définition est telle que le foncteur induit sur les systèmes locaux sur C transforme le foncteur contravariant F sur C, transformant toute flêche en flêche inversible, en le foncteur covariant (i.e. contravariant sur C^o) ayant mêmes valeurs sur les objets, et obtenu sur les flêches en remplaçant F(u) par $F(u)^{-1}$; en d'autres termes, l'effet de l'homotopisme de Quillen sur les groupoïdes fondamentaux est l'isomorphisme évident entre les groupoïdes fondamentaux de C et de C^o , ~~qui est l'iden~~ compte tenu que le deuxième est l'opposé du syst. <u>covariant</u> sur X = "foncteur de Δ/X dans Ens",

(G-2 p. 160), i.e $[n] \longmapsto \begin{matrix} E_n \\ \downarrow \\ X_n \end{matrix}$ et

pour $[m] \xrightarrow{f} [n]$ (donc $X_n \to X_m$) une fl. $E_f : X_n \times_{X_m} E_m \to E_n$

tq. transitivité, et $E_{Id} = Id$, i.e

syst. covariant sur X = "faisceau de Deligne sur X".

Cohomologie de X à val. ds E = $H^*(\Gamma(X_0, E_0) \rightrightarrows \Gamma(X_1, E_1) \cdots)$

$= H^*(\mathrm{Top}(X), E)$

syst. <u>contravariant</u> = ens. simplicial au dessus de X.

premier. Comme application, Quillen obtient une interprétation faisceautique de la cohomologie d'un ensemble semi-simplicial à coéfficients dans un système local con~~tra~~variant F (défini classiquement par le complexe cosimplicial

Π ! des $C^n(F) = \prod_{x \in X_n} F(x)$): on considère le système local contravariant défini par F, on l'interprète comme un faisceau sur T(X) i.e. objet de $(\mathrm{Ssimpl})_{/X}$, et on prend sa cohomologie. - Cependant, quand F est un système de coéfficients covariant pas nécessairement local, on n'a tjrs pas d'interprétation de ses groupes de cohomologie classiques en termes faisceautiques; ni, lorsque F est contravariant, de son homologie, ou inversement de sa cohomologie faisceautique en termes classiques.

Si !

A propos de la notion de foncteur qui est un homotopisme. Quillen montre que un tel foncteur F: C ⟶ C' induit une équivalence entre la sous-catégorie triangulée $D^b_{lc}(C')$ de la catégorie dérivée bornée de celle ~~des~~ des faisceaux abéliens sur C', dont les faisceaux de cohomologie sont des systèmes locaux, et la catégorie analogue pour C; ~~Il existe~~ et réciproquement. ~~Pour la partie directe~~ On peut dans cet énoncé introduire aussi n'importe quel anneau de base (à condition de le supposer ≠ 0 dans le cas de la réciproque); ~~constant~~ la partie directe vaut aussi avec un anneau de boefficients pas néc. constant, mais constant tordu. Je pense que ce résultat (facile) doit pouvoir se généraliser ainsi: Soit f: X   X' un morphisme de topos qui soit tel que pour tout ~~système~~ faisceau loc. const. sur X', f induise un isomorphisme sur les cohomologies (avec cas non commutatif inclus). Supposons que ~~X (et X')~~ X et X' soit localement homotopiquement trivial, i.e. que ~~tout~~ pour tout entier n ≥ 1, tout objet U ~~de X'~~ ait un ~~xxxxxxxx~~ recouvrement par des $U_i \to U$, tels que a) tout système local sur U devient constant sur U_i, et toute section sur U devient constante sur U_i et b) pour tout ~~système~~ groupe abélien G, les $H^j(U,G) \longrightarrow H^j(U_i,G)$ sont nuls pour $1 \leq j \leq n$. Alors le foncteur $D^b_{lc}(X') \longrightarrow D^b_{lc}(X)$ induit par f est

Attention, cette condition n'est typiquement ~~pas~~ pas satisfaite par les schémas avec leur topologie étale (mais bien par ~~toutes~~ var. normales avec top. Zariski).

~~pleinementxfidèlex(respx~~ une équivalence). Même énoncé si on met dans le coup un ~~Anneauxlocx~~ système local d'anneaux sur X'. Enfin, f induit ~~une~~ ~~foncteurpleinfidxx(respx une équivalence)~~ ~~isomorphisme~~ entre la catégorie des coefficients locaux sur C et celle ~~cettexpropriétéxdoit~~ des coéff. locaux sur C' ~~(??xpeutxêtrexmisxdansxlesxhypothèsesxpréliminairesxsurxfx?)x~~ Principe de démonstration: on commence par prouver ce dernier résultat, en notant que ~~dansxlexcas~~ si un topos est localement hom. trivial, il est loca connexe et loc. simplement connexe, d'où une bonne théorie du π_0 et du π_1 (qui sont ici discrets), et on est ramené ~~pour~~ à un cas particulier du critère d'homotopisme de Artin et Mazur, savoir un critère cohomologique pour qu'un homomorhisme de groupes $G \to H$ (ici des groupes π_1 de X,X') soit un isomorphisme: il doit induire des isomorphismes sur les H^0 et H^1 (y inclus dans le cas non commutatif...). On prouve la pleine fidélité en se ramenant par la suite spectrale aux cas des Ext^i de coéfficients locaux. Par la suite spectrale encore, cela résultera du fait suivant: si X est localement hom. trivial, alors la catégorie des faisceaux abéliens loc. constants est stable par $\underline{Ext}^i$, et le foncteur $M \mapsto M_X$ de ~~faisceauxxconstants~~ (Ab) dans X_{ab} commute aux dits Ext^i. En fait, X et X' étant loc. hom. triviaux, les conditions suivantes sur f seront équivalentes:

a) f est un homotopisme, i.e. induit pour tout système local (pas néc commutatif) sur X'un isomorphisme sur les H^i ~~pourxixxx~~.

b) ~~Mêmexchosexave~~ f induit une équivalence $D^b_{lc}(X') \longrightarrow D^b_{lc}(X)$.

a') f induit une équivalence entre la catégorie des systèmes locaux abéliens sur X' et X, et des isomorphismes sur les H^i correspondants (donc on ne prend ici que des coéfficients commutatifs).

¿ J'ignore si on peut dans a) se borner aux systêmes locaux commutatifs, ~~xxexxdans~~ L'équivalence entre a) et b) fournit une première justification ou motivation pour définir des types d'homotopie via la catégorie $D^b_{lc}(X)$, éventuellement muni de la sous-catégorie pleine de tous les systêmes locau[x] sur X, et du foncteur cohomologique sur $D^b_{lc}(X)$ à valeurs dans ladite catégorie, et bien sûr du produit tensoriel (mais alors on sort de D^b pour entrer dans D^- , redactor demerdetur).

II n-catégories, catégories n-uples, et (Gr)-catégories.

Appelons bi-catégorie une catégorie dans (Cat), i.e. un triple $(C^0_0, C^1_1,$ ~~xxoù~~ $p_1, p_2, \Pi)$, où C^0 est une catégorie, $p_1, p_2 : C^1_1 \rightrightarrows C^0_0$ deux foncteurs, $\Pi : (C^1_1, p_1) \times_{C^0} (C^1_1, p_2) \to C^1_1$ un foncteur, avec les axiomes habituels. Interprétant (Cat) comme la sous-catégorie pleine de (Ssimpl) des objets qui .... , et de même pour les catégories à valeurs dans une catégorie telle (Cat), on trouve que la catégorie (Bicat) des (Cat)-catégories est équivalente à la sous-catégorie pleine de la catégorie des ensembles bi-semisimpliciaux

$$\begin{array}{ccccc} X^{00}_{00} & X^{01}_{01} & \dots & X^{0,n}_{0n} \\ X^{10}_{10} & X^{11}_{11} & \dots & X^{1,n}_{1n} \\ \dots\dots\dots & & & \end{array}$$

formée des objets qui ligne par ligne et colonne par colonne satisfoht la condition d'exctitude familière (transformer sommes amalgamées en produits fibrés). De même la catégorie ~~des~~ (Tricat) des (Bicat)-catégories s'interprète en termes d'objets tri-semisimpliciaux, etc.

Exemple: soit C une catégorie, posons $C^0_0 = C$, $C^1_1 = \underline{Fl}(C)$, avec structures p_1, p_2, évidentes (d'où une (Cat)-catétorie dont les composantes semi-simpliciales supérieures sont les catégories $\underline{Fl}^n(C)$ des n-flêches de C ...). L'ensemble bi-semisimplicial correspondant a pour composantes les ensembles $Hom(\Delta^n \times \Delta^m, C)$. Par exemple, les objets de X^{11}_{11} sont les carrés commutatifs de flêches de C, qu'on peut interpréter (de deux manières différentes) comm[e] morphismes de flêches.

Notons une symmétrie évidente dans la catégorie (Bicat), interprétée en termes d'ensemble bi-semisimpliciaux, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes dans de tels ensembles bi... Un ensemble bisemisimplicial qui ... peut donc de deux façons différentes être considéré comme définissant une bicatégorie. De même le groupe symétrique Sym_n opère sur la catégorie (n-upcat) des catégories n-uples ..

Une 2-catégorie peut être définie comme constituée par un ensemble ~~discret~~ C^0_0 (l'ensemble des objets), qu'on interprètera comme une catégorie discrète, plus la donnée pour tout $x,y \in C^0_0$ d'une catégorie Hom(x,y), plus des foncteurs composition entre celles-ci ... Prenant la catégorie somme C^1_1 des Hom(x,y), On peut exprimer la donnée de ces foncteurs de composition, et des sources et buts x,y dans les catégories Hom(x,y), comme définis par des foncteurs "source" et "but" $C^1_1 \to C^0_0$, et un foncteur de composition $C^1_1 \times_{C^0_0} C^1_1 \longrightarrow C^1_1$, les axiomes des 2-catégories correspondant exactement aux axiomes des(Cat)-catégories. De cette façon, la catégorie des 2-catégories est équivalente à la catégorie des (Cat)-catégories qui ont une "catégorie d'objets" qui est discrète, ou encore à la catégorie des Bicatégories qui, interprétées comme ensembles bi-semisimpliciaux, ont comme première ligne un ensemble semisimplicial discret (i.e. un foncteur constant sur Δ). Il parait qu'on a une interprétation simple dans le même esprit de la notion de n-catégorie en termes d'ensembles n-semi-simpliciaux

Demander à Quillen relations entre la notion de m-Catégorie dans la catégorie (n-Cat), et celle de ensemble (m+n)-semisimplicial.

~~(en particulier entre cette dernière notion et celle de~~

L'interprétation standard semisimpliciale permet d'interpréter

! Attention à la catégorie $\underline{Hom}_{gr.ab.}$, qui s'identifie à la catégorie définie par un $RHom_{\mathbb{Z}}(C_1, C_0)$, ce point devrait être élucidé!

de même les (Cat)-groupes(ou groupes à valeurs dans (Cat)) comme étant les groupes semisimpliciaux qui "sont"des catégories i.e. qui ~~sexdéfinix sent~~ satsifont la condition d'exactitude familière, permettant d'en déterminer tous les composants à l'aide de C_o et C_1 . Appliquant le tapis de Dold, dans le cas commutatif, on trouve que les (Cat)-groupes abéliens forment une catégorie équivalente à celle des complexes de chaines de groupes abéliens qui sont de longueur 1:

$$0 \leftarrow C_o \leftarrow C_1 \leftarrow 0 \quad .$$

Quand on explicite la (Cat)-groupe abélien associé à un tel complexe de chaines, on trouve "ma" construction chérie da la "catégorie de Picard" associée au complexe: objets ceux de C_o , flêches de x dans y les z dans C_1 tels que $dz = y-x$. On trouve donc à isomorphisme près tous les groupes abéliens de (Cat) ainsi. Un complément important est que toute catégorie de Picard ~~(resp. et commutative)~~ est équivalente (au sens technique qu'on ne précise pas ici) à ~~xxxcatégorie~~ un vrai (Cat)-groupe ~~(resp. (Cat)-groupe commutatif)~~ . Quand on "écrit" l'équivalence cela correspond à travailler dans la catégorie dérivée des complexes, seuls invariants [illegible] (π_0, π_1).

On notera qu'on a une ~~xxxxxx~~ classification beaucoup plus restreinte que pour les H-espaces (resp. les H-espaces homotopiquement comm.) mod équivalence d'homotopie, de façon précise entre les groupes resp. les groupes abéliens de la catégorie homotopique. La raison en est quon est beaucoup plus restrictif dans le contexte catégorique pour le sens da l'associativité (resp. et de la commutativité), puisqu'on ne demande pas seulement l'existence d'isomorphismes d'associativité (qui suffirait pour avoir un groupe dans la catégorie homotopique (Cat)' $\simeq$ (Ssimpl)', modulo l'existence d'unités et d'inverse mais qu'on suppose $\underline{\text{données}}$ ces isomorphismes, de façon à satisfaire à certaines compatibilités: c'est ce qui permet, me semble-t-il, de prouver qu'à équivalence près, on peut supposer qu'il s'agit de vrais groupes dans (Cat), ~~resp. de vraie commutativité.~~

[illegible] Picard [illegible] (Cat)-gr. [illegible]

On doit trouver une approximation meilleure d'un cran à la classification topologique en prenant des (2-Cat)-groupes resp. des (2-Cat)-groupes abéliens, ou plus généralement des " Gr-2-catégories " resp. "G~~xx~~ab-2-catégories" . (NB Une Grab-catégorie défi~~x~~nit une Grab-2catégorie comme une catégorie définit une 2-catégorie; du point de vue semi-simplicial, cette opération serait analogue à celle de "cosquélette tronqué"; Mais également une Grab-2-catégorie définie en Grab-catégorie, savoir la catégorie des automorphismes de l'objet unité; cette ~~xx~~ opération serait analogue à celle de "tuage des groupes d'homotopie en dim >1"). Pour la notion groissière (Gr~~xx~~ ou Grab) l'idée de ma lettre à Verdier était qu'on doit trouver la même chose que les tronqués au cran 2, dans la catégorie <u>homotopique</u> des H-espaces - i.e. ce qu'on déduit des H-espaces par tuage des groupes d'homotopie en dimensions >2 .

(Demander à Quillen relations exactes entre objets-groupes et objets ~~xxxxxxx~~ connexes ponctuée de la catégorie homotopique: forment-ils des catégories équivalentes par le foncteur espace des lacets ?).

non, on a un foncteur pl. fidèle (?) ess. surjectif....

Pour les <u>vrais</u> groupes abéliens de (2-Cat), l'approche de Quillen consiste à les identifier d'abord à des groupes abéliens de la catégorie (Bicat), donc à des groupes abéliens bi-semisimpliciaux particuliers (conditions sur chaque ligne et chaque colonne). Appliquant la version bi-semisimpliciale du tapis de Dold, on trouve que ~~xxxxxxx~~ la catégorie de ces objets est équivalente à la catégorie des ~~objets~~ bicomplexes de chaines de groupes abéliens qui sont nuls en dehors du carré $0 \leq i,j \leq 1$. ~~Quillen dit que~~ La colonne que la première ligne corresponde à un ~~xxxxxxx~~ groupe semisimplicial trivial signifie alors qu'elle n'a que le terme de degré zéro, i.e. que le bicomplexe est réduit à

$$\begin{array}{ccccc} C_{00} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \\ C_{10} & \longleftarrow & C_{11} & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

2ie2

Ces bicomplexes s'identifient aux complexes de chaines de longueur 2. Donc la catégorie de (2-Cat)-groupes abéliens est équivelente à celle des complexes de chaines de longueur 2. L'explicitation de la 2-catégorie associée à un tel complexe de chaines est mon interprétation chérie. Il faudrait encore expliciter ~~les morphismes~~ 2-Grab-catégorie des homomorphismes (en un sens à préciser) entre deux telles 2-Grab-catégories strictes, en termes d'un complexe RHom.

L'idée qui se dégage de cette approche, et que Quillen on espère va expliciter, c'est que la ~~notion de catégorie de~~ notion de groupe abélien dans (n-Cat) correspond à celle de complexe de chaines de longueur n, en raisonnant soit mod. isomorphisme de part et d'autre, soit mod. une notion naturelle de n-équivalence d'un côté, et dans la catégorie dérivée de l'autre. Ceci doit pouvoir se préciser en utilisant des $\mathrm{Hom}^{\bullet}$ resp. des $\mathrm{RHom}^{\bullet}$.

Si maintenant C est une catégorie avec un "produit tensoriel" associatif (et éventuellement unitaire), i.e. un bifoncteur avec des isomorphismes d'associativité (mais sans inverse ...), on peut lui associer sans doute une Gr-catégorie universelle (tout comme à un monoïde on associe un groupe symmétrisé), d'où des invariants, qu'on pourra désigner par $K_o(C)$ et $K_1(C)$. On suppose qu'on pourra de même trouver, pour tout n, une Gr-n-catégorie universelle où envoyer C de façon compatible avec $\otimes$ (tout cela dans un sens à préciser), dont les invariants π_n seraient par définition les $K_n(C)$. Un cas intéressant est celui où C est une catégorie avec produits finis (par exemple une catégorie additive) et $\otimes$ est le produit, ~~mais~~ (Mais on notera que dans le cas d'une catégorie non seulement additive mais abélienne, il y a une notion plus adéquate du K_o , qui devrait correspondre à une notion plus adéquate de la suite des K_i , inspirée du tapis de Roos; sans doute c'est en termes de ("vraie") catégories triangulées qu'il conviendra de poser les définitions adéquates). - Peut-être Quillen a-t-il une définition semi-simpliciale plus directe, sans passer par des n-catégories, des K_i et plus précisément du H-espace qui devrait correspondre à C. ~~Dans le cas~~ Ce n'est certainement pas en général l'ensemble semi-simplicial SC ~~engendré~~ associé à C, puisque dans le cas d'une catégorie additive, C est homotopiquement trivial (en effet le foncteur identique est "homotope au foncteur nul, puisqu'il suffit d'avoir un homomorphisme d'un foncteur dans l'autre; d'où une équivalence d'homotopie entre C et la catégorie nulle). Pourtant, il semble bien que dans le cas où C est une Gr-catégorie i.e. admet des inverses, alors ce soit bien la construction "naïve" SC qui est la bonne, puisqu'on trouve bien un π_0 et un π_1 qui sont aussi les π_0 et π_1 au sens catégorie sans Gr-structure.

À expliquer : pour les Gr-n-catégories, les π_i au sens semi-simplicial sont aussi les π_i au sens Gr-n-catégories, savoir les objets à isom. près dans divers Hom(1,1)...... ~~Il y a aussi une interprétation de l'opération Σ en termes d'opération de shift géométrique évidente sur les n-catégories.....~~

III Point de vue "motivique" en théorie du cobordisme.

Soit C la catégorie des variétés différentiables (pas nécessairement orientables), les morphismes étant les classes d'homotopie d'applications continues. Si B est une catégorie, on s'intéresse aux couples $(F_{.}, F^{\bullet})$ d'un foncteur covariant et d'un foncteur contravariant de C dans B, satisfaisant les conditions que pour tout $X \in \mathrm{Ob}\, C$, on a $F_{.}(X) = F^{\bullet}(X)$, et que si on a un produit fibré ordinaire

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "g'"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y' \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

avec f et g transversaux, alors on a $g^{\bullet}f_{.} = f'_{.}\, g'^{\bullet}$ (on pose $f_{.} = F_{.}(f)$, $f^{\bullet} = F^{\bullet}(f)$). La question est de trouver une B et un couple $(F_{.}, F^{\bullet})$ qui soient "universels" dans un sens évident. Quillen prouve que la construction suivante donne une telle solution.

Pour toute variété $X \in \mathrm{ob}\, C$, on définit un anneau commutatif B(X) (l'anneau de bordisme de X) en prenant comme éléments les classes ~~de~~ d'éléments de C au dessus de X, pour la relation de cobordisme: $f' : X' \to X$ et $f'' : X'' \to X$ sont équivalents, s'il existe une variété à bord Z, et un $f : Z \to X$, tel que bord $Z = X' \amalg X''$ et f' et f" sont induits par f. La somme de B(X) est la somme disjointe (c'est une loi de groupe ~~inverse étant~~ où tout élément est d'ordre 2), le produit est donné par le produit fibré, en utilisant le théorème de transversalité de Thom pour bouger un peu f", de sorte à le rendre transversal à f'.
NB L'anneau est de plus gradué par la dimension relative ....
Si on a $f : X \to Y$, on définit $f_{.} : B(X) \to B(Y)$ de façon évidente (toute variété sur X est sur Y), et $f^{\bullet} : B(Y) \to B(X)$ par produit fibré (utilisant encore le th. de transversalité). De cette façon, B(X) devient un foncteur-anneau (gradué) contravariant en X, et un foncteur groupe covariant en

X. De plus, on a la formule (du type $g'f_\cdot = f_\cdot' g''$ ci-dessus, impliquant la formule) de projection habituelle. Ceci posé, les constructions bien connues en théorie des correspondances permettent de définir une catégorie $\underline{B}$ dont les objets sont ceux de C, et les Hom étant donnés par

$$\mathrm{Hom}_{\underline{B}}(X,Y) = B(X\times Y) \quad .$$

On a un isomorphisme canonique $\underline{B} \simeq \underline{B}^{o}$, qui est l'identité sur les objets et la symmétrie $B(X\times Y) \simeq B(Y\times X)$ sur les flêches, et un foncteur évident ~~ExxxEx~~ $F_\cdot : C \to \underline{B}$, qui est l'identité sur les objets et donné par les graphes sur les flêches. Composé avec la symmétrie précédente, on trouve un foncteur $F^\cdot$: ~~B~~ $C \to \underline{B}$. On vérifie enfin que le couple $(F_\cdot, F^\cdot)$ satisfait aux conditions envisagées dans l'alinéa 1 (ceci aussi devrait être formalisé au cas des correspondances générales ...). On vérifie enfin qu'il a la propriété universelle qu'il faut. Lorsqu'on se donne un couple $(F'_\cdot, F'^\cdot)$ à valeurs dans une catégorie B', il faut trouver une factorisation par B. Elle est toute trouvée sur les objets, il faut la définir sur les flêches, donc définir, pour X,Y dans C, une application

$$(*) \qquad B(X\times Y) \to \mathrm{Hom}(X',Y') \quad .$$

Mais si Z est au-dessus de XxY, d'où $p:Z \to X$ et $q:Z \to Y$, on lui associe un élément du deuxième membre de (*) comme le composé

$$X' \xrightarrow{F'^\cdot(p)} Z' \xrightarrow{F'_\cdot(q)} Y' \quad .$$

Il faut prouver que l'élément obtenu en remplaçant Z (Z_0) par un Z_1 cobordant au dessus de X est le même. Or si $g: T \to X\times Y$ réalise le cobordisme, on voit (regardant seulement T et la décomposition $\mathrm{bord}(T) = Z_0 \amalg Z_1$) qu'il existe une variété $\overline{T}$ sur S^1 (obtenue en "doublant" T) ~~xxxxxx applicationxTxxxxx~~ transversale au dessus d'un couple de points s_o, s_1 de S^1, tels que Z_i soit l'image inverse dans $\overline{T}$ de s_i $(i=0,1)$; d'autre part, g manifestement se prolonge en $\overline{g} : \overline{T} \to X \times Y$. Cela nous ramène à prouver le composé que $\overline{T}' \xrightarrow{\alpha_i} Z_i^! \xrightarrow{\alpha_{i*}} \overline{T}'$ ne dépend pas de i=0,1. Ecrivons X au lieu de $\overline{T}'$, et considérons le diagramme cartésien d'inclusions

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r, "\alpha_s"] \arrow[d, "\alpha_s"'] & X \arrow[d, "\Gamma_{\Sigma}(p, id_X)"] \\ X \arrow[r, "i_s"] & S^1 \times X \end{tikzcd} ,$$

on a alors $\alpha_s^* \alpha_{s*} = \Gamma^* i_{s*}$, qui ne dépend pas de s puisque i_s n'en dépend pas à homotopie près. - Le reste est sans doute l'AQT.

Sur la strcture des B.(X). Ce sont tous des algèbres graduées sur B.(pt) = Λ, qui est une algèbre graduée à degrés positifs, réduite à $\underline{F}_2$ en degré 0. C'est d'ailleurs une algèbre de polynômes connue (à une infinité de générateurs ...) ... d'annaaux gradués

On a un homomorphisme évident $B.(X) \to H^{\bullet}(X)$, nul en degrés > 0, qui à tout Z sur X associe l'image de $1 \in H^0(Z)$ par l'homomorphisme de Gysin associé à $Z \to X$. Cet homomorphisme par Thom est surjectif (toute classe de cohomologie provient d'une image de variété compacte ...); ~~mxtex~~ On ppouve même qu'il existe un relèvement fonctoriel en X $H^{\bullet}(X) \to B.(X)$, (il est douteux qu'il soit compatible avec multiplication) ~~xxx~~ tel que l'on ait:

— fait $H(X) \simeq B.(X)/\Lambda^+ B.(X)$

a) L'homomorphisme correspondant $H^{\bullet}(X) \otimes_{\underline{F}_2} \Lambda \simeq B.(X)$ est un isomorphisme (ce sera vrai pour tout relèvement individuellement ...), ~~et~~

?

b) [Quillen ignore si ~~Lex~~ relèvement est compatible aussi avec les hom. de Gysin.]

Ainsi, la catégorie $\underline{B}$ admet un foncteur pleinement fidèle dans la catégorie des modules gradués libres de type fini sur Λ, les modules de type fini qu'on obtient ainsi ayant des générateurs à degrés ≤ 0 et satisfaisant (pour X connexe i.e. quand il y a un seul générateur de degré zéro) la dualité de Poincaré. Quand on prend la catégorie quasi-abélienne associée à $\underline{B}$, on trouve donc tous les modules gradués libres de type fini à générateurs ~~négatifs~~ en degrés ≤ 0 seulement. C'est une catégorie additive (et même quasi-abélienne) avec $\otimes$ qui a toutes les vertus, sauf d'être abélienne, et sauf d'admettre des <u>Hom</u> internes. Pour trouver ces derniers, on peut si on veut paraphraser la construction de la catégorie des motifs, en ~~introduisant~~ considérant l'objet $\Lambda(-1)$ de $\tilde{\underline{B}}$ conoyau de $p^*: e \to S$, où $p:S^1 \to e$ est l'application du cercle sur un point. C'est un objet de poids 1 (le poids est défini par le degré des générateurs, changés de signe). On constate aussitôt que le foncteur $M \mapsto M(-1) = M \otimes \Lambda(-1)$ de $\tilde{\underline{B}}$ dans lui-même est pleinement fidèle, ce qui permet alors, par une construction formelle standard, de compléter $\tilde{\underline{B}}$ en une catégorie où $\Lambda(-1)$ devient inversible. Il se trouve alors que dans cette dernière les <u>Hom</u>(X,Y) internes existent et ~~satisfont~~ sont isomorphes à $\check{X} \otimes Y$ ... en fait, on trouve maintenant la catégorie des <u>tous</u> les modules gradués libres de type fini sur . Bien sûr, cette catégorie n'est pas encore abélienne pour autant, puisque n'est pas un corps; si on veut ~~pour~~ définir la catégorie abélienne engendrée, on s'attend à trouver la catégorie des modules de ~~type~~ présentation finie sur Λ. (qui est abélienne bien que Λ ne soit pas noethérien, car Λ est limite d'anneaux noeth. à homomorphismes de transition plats ~~est-il noethérien, i.e. le nombre de générateurs est-il fini ?~~).

Cette construction ressemblerait à celle d'une théorie des motifs où on n'aurait pas passé à l'équivalence homologique pour les cycles, mais où on aurait gardé l'équivalence rationelle, - qui est bien trop fine à beaucoup d'égards. Pour trouver un équivalent plus étroit, il convient de reprendre la théorie précédente, on pourrait formuler le même Pb universel que plus haut, mais en prenant l'équivalence homologique (via le graphe) des morphismes de variétés, au lieu de l'équivalence homotopique. ~~Mais alors il semble que l'on trouve comme catégorie solution celle dont les objets sont les varié-~~

~~tés, les morphismes <u>toutes</u> les correspondances cohomologiques (en vert du thorème de Thom rappelé plus haut). On trouve donc un foncteur pleinement fidèle de cette catégorie dans celle des vectoriels gradués ~~dxxd~~ positivement de dim. finie sur $\underline{F}_2$, qui est déjà abélienne, et si on veut rendre comme plus haut $\underline{F}_2(-1)$ inversible, on trouve tous les vectoriels gradués de dim. finie sur $\underline{F}_2$. C'est un peu trop trivial comme structure, et on peut faire mieux,~~ ~~xxprenantxxcomme~~ Pour trouver une catégorie universelle, ~~correspondancexxxxPourxceci~~ on associe à toute X ~~lexxensxxxxxxxxxxxx~~ ~~xx~~ l'ensemble des sous-variétés ~~S(X)~~ S(X) de X, modulo équivalence homologique. Donc $S(X) \subset H^\bullet(X)$, et on prouve qu'on trouve en fait un sous-anneau de $H^\bullet(X)$ (grâce à un théorème de Thom qui caractérise S(X) en termes d'opérations de Steenrod, cf plus bas). On prouve de même (par le même théorème) que les S(XxY) sont stables par composition de correspondances cohomologiques(cela ne semble pas trivial, puisque les S(X) ne sont pas stables par Gysin...). D'où une catégorie additive dont les objets sont ceux de C, les flèches sont les S(XxY). Il semble qu'elle doive jouer le rôle universel que j'ai envisagé plus haut. En tous cas, sa définition géométrique est fort simple !

Nous allons en donner une interpétation algébrique. Pour ceci, considérons l'anneau des opérations cohomologiques "stables" ~~additives sur i.e. des endomorphismes du~~ ~~le foncteur $X \to H^\bullet(X)$ qui sont additifs, et qui en degré zéro se réduisent à un multiple de l'identité.~~ C'est un anneau gradué, avec application diagonale anticommutative, i.e. commutative (car. 2 !) associative et unitaire. Son dual gradué est une algèbre graduée anticommutative donc ~~commutative~~, commutative, avec application diagonale associative et unitaire; il est réduit à $\underline{F}_2$ en degré zéro. Donc il corespond à un schéma en groupes affine G sur $\underline{F}_2$, qui est d'ailleur le foncteur des $\otimes$-automorphismes additifs du foncteur $H^\bullet$ sur C qui opèrent trivialement sur ~~[illegible]~~ $H^1(S^1)$.

Le théorème de Thom est alors qu'un $x \in H^{\bullet}(X)$ est dans $S(X)$ sss il est ~~xxxxix~~ fixe par G, i.e. satisfait $A^{+} . x = 0$. (Pourquoi cette condition est-elle déjà nécessaire ?) Une autre façon de le voir est de dire que le foncteur $H^{\bullet}$ considéré comme allant de la catégorie $\underline{S}$ précédente dans la catégorie des ~~xxxxxxxx~~ représentations de G dans des vectoriels sur $\underline{F}_2$, est pleinement fidèle. ~~Commexcxmt~~ Quand on prend l'enveloppe pseudo-abélienne, on trouve une sous-catégorie pleine de la catégorie des représentations de G, mais il est douteux qu'on trouve une catégorie abélienne, voire la catégorie de toutes les représentations de G de dimension finie sur $\underline{F}_2$. (Quelle est la structure de G, qui est prolisse; d'après Quillen, il serait pro-unipotent ....). Ici G bien sûr joue le rôle d'un groupe de Galois motivique, mais contrairement à la situation familière, il semble qu'il soit fortement non réductif (et d'ailleurs le corps de définition dans tout ceci est $\underline{F}_2$, et non $\underline{Q}$!).

[illegible]

Quillent donne une généralisation de la construction d'une catégorie universelle $\underline{B}$ au cas où on travaille avec des variétés pas nécessairement propres (mais f_{*} n'étant supposé défini que pour f propre), et quand on introduit une condition d'orientation stable sur les <u>morphismes</u> envisagés , via un morphisme $H \to BO(\infty)$, où H est un H-espace (commutatif, associatif et unitaire ?): une orientation de $f:X \to Y$ sera un relèvement homotopique de $X \to BO$ défini par ~~fx(Tx~~ $T_X - f^{\bullet}(T_Y)$ en $X \to H$. les éléments de $H(X,Y)$ seront définis par des diagrammes de morphismes orientés $Z \to X$, $Z \to Y$, le deuxième étant propre, modulo bords de tels. En tant qu'ensemble, il se définit aussi en termes de la variété XxY munie simplement de la famille des supports formée des ensembles fermés propres sur Y ..... Les $B^H_m(X)$ (X compact [illegible]) peuvent se décrire homotopiquement à la Thom, comme les groupes d'homotopie stables d'espaces $\underline{Hom}(X, MH(N-m))$ -----.