1 [Notes pour un exposé]

[page 1]

([1]).

1) Historique.

a) Notion de forme différentielle (POINCARÉ) et formule de Stokes

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega \qquad \text{(d'où } H^*_{\mathrm{DR}}(X) \longrightarrow H^*(X, \mathbf{C}).\text{)}$$

b) Th. de DE RHAM (conjecturé par E. CARTAN). Mais [-] Maintenant est bien compris : th. des faisceaux [-]

c) Théorie de HODGE des integrales harmoniques (structure supplémentaire bigraduée sur $H^*_{\mathrm{DR}}(X)$ si X kählérienne compacte.)

d) Théorème de CARTAN-SERRE sur variétés de Stein (car Lemme de Poincaré valable dans l'analytique).

e) Cas des variétés algébriques ou schémas sur corps de base [?] (ou schéma de base général) : DWORK, WASHNITZER-MONSKY, plus tard le yoga 'cristallin' développé par BERTHELOT, ILLUSIE, MESSING, MAZUR (avec Hartshorne [?Herrera] qui, Bloch?). Ici on trouve des théories cohomologiques qui ne [?] sont plus à 'anneau de coefficients' de caracteristique [?] nulle, i.e. contenant $\mathbf{Q}$ – i.e. on perd [?] les phénomènes de torsion [?ne sont pas prendre]. Du point de vue Weil, c'était un défaut irréparable.

f) Th. de GROTHENDIECK pour variétés algébriques sur $\mathbf{C}$ (généralisé par DELIGNE, HARTSHORNE pour des coefficients plus généraux). Ceci donne [?] confiance (du moins en car. 0) en la signification topologique de la cohomomologie de De Rham 'algébrique' des schémas algébriques.

g) Complexe de DE RHAM-SULLIVAN pour espaces topologiques généraux : *formes différentielles singulières* C^∞ (resp. $\mathbf{C}$-algébriques, resp. $\mathbf{R}$-algébriques, resp. $\mathbf{Q}$-algébriques). Donne la cohomologie à coefficients dans $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$, resp. $\mathbf{Q}$) (facile [-] Sullivan [- -]

$$\begin{array}{ccccc} C^\bullet_{\mathrm{DRS}\ \mathbf{R}\text{-alg.}} & \subseteq & C^\bullet_{\mathrm{DRS}\ C^\infty} & \subseteq & C^\bullet_{\mathrm{DRS}} \\ & & \cup\!\mid & & \\ & & C^\bullet_{[-]} & & \end{array}$$

[1]

géométrie	différentielle
—	analytique
—	algébrique
—	[?allasse]
topologie algébrique	$\left\{ \begin{array}{l} \text{PL} \\ \text{semi-simplicial} \end{array} \right.$

[page 2]

Le type d'homotopie [?] de X est récupéré si X est simplement connexe – de façon plus précise, il y a (sauf erreur) une équivalence de catégories donné par $C^\bullet_{\mathrm{DRS}}$ entre la catégorie homotopique faible des espaces connexes et simplement connexes (du point de vue singulier [?]), et une certaine catégorie dérivée formée avec les $\mathbf{Q}$-algèbres graduées [?] associatives anticommutatives à degrés ≥ 0 telles que $H^0(\mathcal{A}) \xleftarrow{\simeq} \mathbf{Q}$, $H^1(\mathcal{A}) \simeq 0$. Il y a une théorie des modèles minimaux pour de telles algèbres, une façon très simple de récupérer les $\pi_i \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ en termes d'un tel modèle ... (On renvoit [?] au papier de Sullivan.)

Mais à nouveau, on perd la torsion !

Donc du théorème d'isomorphie de Sullivan

$$H^\bullet(C^\bullet_{\mathrm{DRS}/\mathbf{Q}}(X, \mathbf{Q})) \simeq H^\bullet(X, \mathbf{Q})$$

$\forall\, n \geq 0$,

	$[n]$	simplexe type de dimension n,
	$\mathbf{\Delta}^{[n]}$	sa réalisation géométrique (2),
	$E^{[n]}$	l'espace affine qu'il soustend `[plutôt engendre]` (avec une $\mathbf{Q}$-structure) (3),
	$\mathrm{DRS}^\bullet_{[n]} = C^\bullet_{\mathrm{DR}}(E^{[n]})$	son complexe de De Rham $\mathbf{Q}$-algébrique.

C'est contravariant en $[n]$, d'où

$$\mathrm{DRS}^\bullet_* = (\mathrm{DRS}^\bullet_{[n]})_{n \geq 0} .$$

Algèbre différentielle graduée semi-simpliciale (et même simpliciale) - à degrés ≥ 0, anticommutative.

Pout tout espace topologique X, $S_*(X)$ son complexe singulier semi-simplicial. On a

$$C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(X, \mathbf{Q}) \simeq \mathrm{Hom}(S_*(X), \mathrm{DRS}^\bullet_*) ,$$

[page 3]

i.e.

a) $C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(X, \mathbf{Q})$ [?] dépend de la `[?si.]` $S_*(X)$ `[plutôt 'ne dépend que']`.

b) Sur $(\mathrm{Ss}) = (\mathrm{Ens})_*$, le foncteur $C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(\ \ , \mathbf{Q})$ est représentable par $\mathrm{DRS}^\bullet_*$.

Or

a) $\mathrm{DRS}^\bullet_*$ est une résolution de $\mathbf{Q}_*$ (dans la catégorie des groupes semi-simpliciaux). (Lemme de Poincaré algébrique sur l'espace $\mathbf{Q}$-affine $E^{[n]}$.

b) Les composantes DRS^i_* $(i \geq 0)$ de $\mathrm{DRS}^\bullet_*$ sont des objets abéliens acycliques du topos (Ss) (ce qui revient à dire que les [?] $\pi_j(\mathrm{DRS}^i_*)$ sont nuls, ce qu'on vérifie facilement).

---

(2) $\sum_0^n X_i = 1$, $X_i \geq 0$.
(3) $\sum_0^n X_i = 1$, `[-]`.

(Il [?] serait `[?Hom]` des formes C^∞ à coefficients dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, ou analytiques réels, ou analytiques complexes, ...)

On aimerait avoir une $\mathbf{Z}$-algèbre différentielle `[graduée]` $C^\bullet_{\mathrm{DR}}(X,\mathbf{Z})$ différentielle [?] `[?dont tout sur]` X `[?(ou` $S_*(X)$`)]` dont `[- - - -]` $\mathbf{Z}$ `[- - ?avait]` qu'il y a `[dans Hns autre]` ! On se `[?provient]` y est `[- ?emmmm]`.

Si on prend $C^\bullet_{\mathbf{Z}\text{-DR}}(E^{[n]})$ (où $E^{[n]}$ a même [?] $\mathbf{Z}$-structure affine), c'est a) qui devient déjà faux : pour intégrer $\int x^n\,dx$, il faut un dénominateur avec $\frac{x^{n+1}}{n+1}$! Mais en géométrie, on est déjà familiarisé avec une façon de sauter à pieds-joints par dessus le conneau, en introduisant des puissances divisées et des polynômes (ou séries formelles) à puissances divisées. Si $E^{[n]}$ avait son [?] origine sur $\mathbf{Z}$ (i.e. provenant canoniquement [?] d'un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini), on aurait un complexe de De Rham à puissances divisées. Mais pas pour un espace affine ! Notons

$$\begin{aligned}\mathrm{DRS}^\bullet_{[n]} &\simeq C^\bullet_{\mathrm{DR}/\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}[(X_i)_{0\le i\le n}])/\textstyle\sum X\,\texttt{[-]}\\ &\simeq \mathbf{Q}[X_i,dX_i]/\textstyle\sum\,\texttt{[-]}\ ,\end{aligned}$$

`[page 4]`

Donc on aurait envie de prendre [?]

$$\mathbf{Z}\{X_i\}[dX_i]_{0\le i\le n}/(\textstyle\sum X_i-1,\sum dX_i)\ ,$$

où $\{\ \ \}$ désigne les pôlynomes à puissances divisées, mais on n'est plus isomorphe à $\mathbf{Z}\{X_0,\dots,X_{n-1}\}[dX_0,\dots,dX_{n-1}]$ (`[?pléti]` bien une résolution de $\mathbf{Z}$), car si on `[?avant tirer]` de la relation [?] $\sum_0^n X_i-1=0$, $X_n=1-\sum_0^{n-1}X_i$ (et $dX_n=-\sum_0^{n-1}dX_i$ de $\sum_0^n dX_i=0$), on a le 'bec' [?] que $1-\sum_0^{n-1}X_i$ n'appartient pas à l'idéal à puissances divisées donné dans $\mathbf{Z}\{X_0,\dots,X_{n-1}\}$ [?] (donc on ne voit pas comment envoyer $\mathbf{Z}\{X_0,\dots,X_{n-1}\}$ dans $\mathbf{Z}\{X_0,\dots,X_{n-1}\}$ avec l'élément [?] $\sum_0^n X_i-1$ dans le noyau ...).

On s'en tire en prenant un anneau de coefficients différent de $\mathbf{Z}$, soit S, avec un 'paramètre' $t\in S$ fixé dont on sache *prendre des puissances divisées* (i.e. $t\in J$, J idéal à puissances divisées `[-]`), et en remplaçant [?] les équations $\sum X_i=1$ de $E^{[n]}$ par l'équation

$$\sum X_i = t \qquad \text{dans } S^{n+1}$$

et définissant

$$C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,[n]}(S,J,t)\ \simeq\ (S\{X_i\}_{0\le i\le n}[dX_i]_{0\le i\le n})/\left(\textstyle\sum X_i-t,\ \sum dX_i\right)\ .$$

On divise par l'idéal *à puissances divisées* engendré `[- -?]`

`[page 5]`

car dans $S\{X_i\}[dX_i]$ [?] l'idéal formé des formes [?] à puissances divisées d'augmentation dans J est à puissances divisées,

$$[C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,[n]}(S,J,t)\ \simeq]\qquad \left(S\{X_i\}_{0\le i\le n}/(\textstyle\sum X_i-t)_{\mathrm{pd}}\right)\otimes_S\Lambda^*(S^{[n]}/\mathrm{diag}\,S^{[n]})\ .$$

C'est une S-algèbre différentielle graduée anticommutative à degrés [?] `[-]` augmentée vers S/J et à puissances divisées sur l'idéal noyau de l'augmentation

$$C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,[n]}(S,J,t)\longrightarrow S/J \qquad (^4)\ ;$$

et comme telle isomorphe à $S\{X_0, \ldots, X_{n-1}\}[dX$ [-], qui *est une résolution de* S. Pour $[n]$ variable, on trouve

$$C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,*}(S,J,t) \;=\; \left(C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,[n]}(S,J,t)\right)_{n\geq 0} ,$$

qui est une résolution semi-simpliciale (et même simpliciale) de S, avec augmentation vers $S/J = k$, et puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, [?copn]. Elle dépend fonctoriellement de (S,J,t), et elle peut de [?fa un] pour $\mathcal{X}_* \in$ Ss

$$C^\bullet_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*; S, J, t) \;=\; \mathrm{Hom}(\mathcal{X}_*, C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,*}(S,J,t)) ,$$

foncteur contravariant en $\mathcal{X}_*$ ([5]) (et si X espace topologique [?]

$$\begin{aligned} C^\bullet_{\mathrm{DRpd}}(X;\ ) &= C^\bullet_{\mathrm{DRpd}}(S_*(X);\ ) \\ &= \mathrm{Hom}(S_*(X), C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,*}(\ )\qquad). \end{aligned}$$

[À ne pas confondre : S (anneau de base) et S_* (ensemble simplicial singulier).]

Mais on ne peut dire en général quelle est sa cohomologie (on a seulement $H^\bullet_{\mathrm{DRpd}}(X;S,J,t) \longrightarrow H^\bullet(X,S)$), et en tous cas [- - -]

[page 6]

Alors soit k anneau commutative (associatif unitaire), et T une indéterminée, on prendra dorénavant

$$S \;=\; k\{T\}\ , \qquad J \;=\; k\{T\}^+ \;=\; \mathrm{Ker}\,(k\{T\} \longrightarrow k)\ , \qquad t \;=\; T\ .$$

Donc

$$\begin{cases} C^\bullet_{\mathrm{DRpd},[n]}(S,J,t) \;\simeq\; \underbrace{k\{T, X_0, \ldots, X_n\}/(\sum X_i - T)_{\mathrm{pd}}}_{\simeq k\{X_0,\ldots,X_n\}} \otimes_k \Lambda^\bullet k^{[n]}/k \\ S/J \;\simeq\; k\ . \end{cases}$$

Soit

$$\Phi_{k*} \;=\; ([n] \longmapsto k^{[n]}) \;\underbrace{\hookleftarrow}_{\substack{\text{immersion}\\ \text{diagonale}}}\; k_* = ([n] \longmapsto k\ [?])$$

$$\Psi_{k*} \;=\; \Phi_{k*}/k_* \;=\; ([n] \longmapsto k^{[n]}/\underbrace{k}_{\text{diag.}})\ .$$

On a alors

$$C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}\,*}(k) \;\overset{\text{déf}}{=}\; C^\bullet_{\mathrm{DRpd}\,*}(k\{T\}, k\{T\}^+, k) \;\simeq\; \Gamma^\bullet_k\Phi_{k*} \otimes_k \Lambda^\bullet\Psi_{k*}\ [?]\ ,$$

$$\boxed{C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}\,*}(k) \;\simeq\; \Gamma^\bullet_k\Phi_{k*} \otimes_k \Lambda^\bullet\Psi_{k*}}\ .$$

[4] [?diff est stable - - -], i.e. $d(X^{[n]}) = X^{[n-1]}dx$ [?].

[5] à valeurs dans les S-algèbres graduées différentielles S/J-augmentatées à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, compatible avec la différentielle.

Structure. $k\{T\}$-Algèbre différentielle *bigraduée* (degré complexe [?] *et* degré extérieur, d'où degré total) ([6]) unitaire associative alternée (anticommutative et carrés des éléments de degré impair nuls), augmentation vers `[-]` à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, avec `[- - - -]`.

`[page 7]`

Ces structures sont héritées [?] par les

$$\boxed{\begin{array}{rcl} C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k) & \overset{\text{déf}}{=} & C^{\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k\{T\}, k\{T\}^+, T) \\ & = & \mathrm{Hom}(\mathcal{X}_*, C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}\,*}(k)) \end{array}}$$

et dépendent de façon contravariant de $\mathcal{X}_*$ (covariant de k).

Φ_{k*} est un k-Module semi-simpliciale homotope à 0, donc $\Gamma^p_k(\Phi_{k*}) \otimes \Lambda^q \Psi_{k*}$ est homotope à $\Gamma^p_k(0) \otimes \Lambda^q \Psi_{k*}$, donc homotope à 0 si $p \neq 0$. Donc $C^{p,q}_{\mathrm{DRpd}\,*}(k)$ est homotope à 0 (donc acyclique) si $p = 0$ `[plutôt si` $p \neq 0$`]`. En degré total donné n, on a

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^{n,0}_{\mathrm{DRpd}\,*} \arrow[r] & C^{n-1,1}_{\mathrm{DRpd}\,*} \arrow[r] & C^{n-2,2}_{\mathrm{DRpd}\,*} \arrow[r] & \cdots & C^{1,n-1}_{\mathrm{DRpd}\,*} \arrow[r] & C^{0,n}_{\mathrm{DRpd}\,*} \\ & k_* \arrow[u] & & & & & \end{tikzcd},$$

i.e. on trouve une résolution de longueur n de k_* par des k-modules semi-simpliciaux qui sont acycliques sauf le dernier – donc on peut la considérer comme un tronqué de degré n d'une résolution flasque de k_* – la cohomologie de ses sections sur un $\mathcal{X}_*$ est donc la cohomologie de $\mathcal{X}_*$ tronquée en degré n :

$$H^{p,q}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k) = \begin{cases} H^q(\mathcal{X}_*, k) & \text{si } q \leq p+q, \text{ i.e. } p \geq 0 \\ \texttt{[- - - - -]}\,. \end{cases}$$

`[page 8]`

`[- - - - -]` structure [?] de $k\{T\}$-module de $H^{\bullet,q}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)$? On voit que pour le *degré total* (égal au degré extérieur p *plus* q `[plutôt degré extérieur` q *plus* p`?]`), on trouve $H^0(\mathcal{X}_*, k) \otimes_k k\{T\}$ tronqué en dégré $\geq q$, donc

$$H^{\bullet,q}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k) \simeq \tau_q(H^0(\mathcal{X}_*, k) \otimes_k k\{T\})\underbrace{[q]}_{\substack{\text{translation [?]} \\ \text{des degrés} \\ \text{par } -q}}\,.$$

Si on réindexe le bidegré par le couple (degré total, degré extérieure)

$$H'^{p,q}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k) = H^{\overbrace{n-q}^{p},q}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)$$

[6] Bigraduation venant de la *graduation* de S, en tant que `[-]` est hom. (ici de degré 2) [?].

(donc la condition de degré $p, q \geq 0$ devient $n \geq q \geq 0$, l'opérateur différentielle est de bidegré $(0,1)$, donc c'est un homomorphisme (*homogène*) de S-modules gradués), on trouve

$$H'^{\bullet,q}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k) \simeq \tau_q(H^q(\mathcal{X}_*, k) \otimes_k k\{T\}) .$$

Ces isomorphismes sont compatibles avec les structures multiplicatives (et bien entendu fonctoriels an $\mathcal{X}_*$, k, ...). Donc *a priori* on en récupère (via $H'^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)$) les k-modules $H^q(\mathcal{X}_*, k)$ et leurs cup-accouplements `[- -]` les k-modules gradués $\tau_q(H^q(\mathcal{X}_*, k) \otimes_k k\{T\})$.

`[page 9]`

Ce qui donne un espoir que le complexe `[?de De Rham à]` p.d. de $\mathcal{X}_*$ à coefficients dans $k = S/J$ disons [?] (comme dans le cas $k = \mathbf{Q}$ qu'il contient) donne une information homotopique précise sur $\mathcal{X}_*$, c'est l'observation qu'en fait, pour un k-module M quelconque, on récupère M à isomorphisme canonique près par la connaissance d'un quelconque des tronqués $\tau_q(M \otimes_k S)$ (quelque grand que soit p ...), qu'on appelle le $q$ième ombre de M, et de même tout accouplement $M \otimes N \longrightarrow P$ est connu quand on connaît, pour q assez grand, l'accouplement correspondant $\tau_q(M_S) \otimes \tau_q(N_S) \longrightarrow \tau_q(P_S)$. Donc une k-algèbre gradué $H^\bullet$ à degrés ≥ 0 est connu à isomorphisme canonique près quand on connaît la k-algèbre bigraduée dont les composantes de degré 'extérieure' q sont les $\tau_q(H^q \otimes_k S)$ ... Cette 'théorie des ombres' étant supposée acquise, on veut que la connaissance de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)$ (en tant que S-algèbre différentielle bigraduée) implique celle de l'algèbre graduée $H^0(\mathcal{X}_*, k)$ – et en raffinant un peu, on veut qu'on trouve même $\mathrm{R}\Gamma(\mathcal{X}_*, k)$ comme étant `[- - -]` $D(k)$ `[- -]`

`[page 10]`

`[- - -]`

$$\mathrm{R}\Gamma(\mathcal{X}_*, k) \otimes^{\mathrm{L}} \mathrm{R}\Gamma(\mathcal{X}_*, k) \longrightarrow \mathrm{R}\Gamma(\mathcal{X}_*, k) .$$

Remarques et Problèmes

a) Si k est une $\mathbf{Q}$-algèbre, de sorte que $C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(\mathcal{X}_*, k)$ est défini, on le reconstruit à partir de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)$ par la formule

$$C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(\mathcal{X}_*, k) \simeq C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)/(T-1) .$$

Plus généralement, *quelque soit* k, on a

$$C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(\mathcal{X}_*, \underbrace{k \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}}_{k_{\mathbf{Q}}}) \simeq C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)/(T-1) .$$

(et plus généralement encore, si (S, J, t) comme au début,

$$C^\bullet_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*; S, J, t)/(t-1) \simeq C^\bullet_{\mathrm{DRS}}(\mathcal{X}_*, S_{\mathbf{Q}})/(t-1) \qquad)$$

`[plutôt` $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, S, J, t)/(t-1)$`]`.

b) Je suis convaincu que la structure à puissances divisées sur l'idéal d'augmentation de

$$C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}_*, k) = \mathrm{Hom}(\mathcal{X}_*, k_*)$$

est importante ([7]). Il n'est peut-être pas ici [?] de se poser la question pour $\mathcal{X}_*$ simplement connexe, si la connaissance de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)$ [?] *avec toutes ses structures* (y compris celle des puissances divisées) n'implique pas la connaissance du type d'homotopie de $\mathcal{X}_*$ [-]

[page 11]

plus précisément appelé *complexe de De Rham à puissances divisées virtuel sur k*, une k-bialgèbre différentielle k-augmentée, associative, unitaire, alternée à différentielles de bidegré $(-1,+1)$ à bidegrés ≥ 0, avec puissances divisées sur l'idéal d'augmentation, compatible avec la differentielle ($d(x^{[n]}) = x^{[n-1]}dx$), et telle que les $H^{\bullet,q}(C^{\bullet\bullet})[-q]$ sont des q-ombres (auquel cas on récupère à partir de $C^{\bullet\bullet}$ un élément de $D(k)$ avec structure multiplicative associative unitaire commutative ...), passe à une 'catégorie dérivée' de ces complexes en inversant les flèches qui sont des quasi-isomorphismes, d'où par $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k)$ un foncteur

$$\underbrace{(\mathrm{Hot})}_{\substack{\text{types}\\ \text{d'homotopie}}} \longrightarrow \underbrace{(\mathrm{DRpd})}_{\substack{\text{catégorie derivée}\\ \text{des complexes}\\ \text{DRpd}}} ,$$

et on peut se demander si sa restriction aux espaces connexes et simplement connexes avec des $H^i(X, \mathbf{Z})$ de type fini (cas $k = \mathbf{Z}$) induit une équivalence avec les complexes de De Rham à puissances divisées sur $\mathbf{Z}$ tels que $H^0(C^{\bullet\bullet}) \xleftarrow{\simeq} k$, $H^1(C^{\bullet\bullet})$ [-] les $H^i(C^{\bullet\bullet})$ [- -]

[page 12]

c) Je n'ai pas réfléchi si on peut reconstruire les opérations cohomologiques (type Steenrod ou Whitney) dans la catégorie des $\mathcal{X}_*$ par la connaissance de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, -)$, et n'ai que des résultats partiels negatifs qui montrent qu'en dehors [?] des automorphismes multiplicatifs de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}*}(k)$, on ne trouve rien d'intéressant.

d) Il faudrait sans doute chercher [?] des modèles minimaux à la Sullivan, pour essayer entre autres d'exprimer les groupes d'homotopie de $\mathcal{X}_*$ en termes de $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}*}(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z})$ (cas où $\mathcal{X}_*$ simplement connexe avec condition de finitude ...). Je n'ai rien fait dans cette direction. Je n'ai même pas développé une formule de Künneth pour $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}$ d'un produit $\mathcal{X}_* \times \mathcal{Y}_*$ – il y a des difficultés techniques dues au fait qu'on ne peut sans doute supposer $C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*$ ou $\mathcal{Y}_*, k)$ [- - - - -]

[page 13]

e) Le complexe de chaînes $C_\bullet(\mathcal{X}_*, k)$ permet de reconstruire tous les complexes de cochaînes $C^\bullet(\mathcal{X}_*, k')$ pour k' [une] k-algèbre variable, par

$$C^\bullet(\mathcal{X}_*, k) \simeq \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbf{Z}}(C_\bullet(\mathcal{X}_*, k), k)$$

[plutôt $C^\bullet(\mathcal{X}_*, k') \simeq \mathrm{Hom}^\bullet_k(C_\bullet(\mathcal{X}_*, k), k')$]. (L'objet le plus fin est donc $C_\bullet(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z})$, on a alors $C_\bullet(\mathcal{X}_*, k) \simeq C_\bullet(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} k$ [?]).

Il est possible de même de définir une cobigèbre différentielle $C^{\mathrm{DRpd}}_{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, k)$ k-coaugmenté à copuissances divisées telle que l'on ait, pour tout k-algèbre k'

$$C^{\bullet\bullet}_{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k') \simeq \mathrm{Hom}_k(C^{\mathrm{DRpd}}_{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, k), k')$$

[7]Avec [?] condition de finitude sur $\mathcal{X}_*$, savoir les $H_i(\mathcal{X}_*)$ [?] de type fini.

(compatible avec toutes les structures).

On aura d'ailleurs

$$C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k') \simeq C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, k) \otimes_k k' .$$

L'objet le plus fin est $C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z})$. C'est lui qu'il conviendrait de considérer (au lieu de son 'dual' $C_{\mathrm{DRpd}}^{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z})$) si on veut aborder b) c) d) sans condition de finitude.

Notons que (tout comme $C_{\mathrm{DRpd}}^{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z})$, pour $\mathcal{X}_*$ variable, transforme $\varinjlim$ quelconques en $\varprojlim$) $C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DRpd}}(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z})$ coaugmenté `[- -]` $\varinjlim$ quelconques (`[-] [?filt] [- -]`

`[page 14]`

f) ([8]). **Faisceautisation.** Il y a une définition évidente de complexes de De Rham à puissances divisées sur k si k est un Anneau commutatif dans un topos. On aimerait, p.ex. en comparant un tel complexe à un autre quasi-isomorphe dont les composantes soient flasques (mais y en a-t-il toujours ?), définir des opérations [?] $\mathrm{R}f_*$ dans des catégories dérivées convenables pour de tels complexes, quand $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ est un morphisme de topos (supposé au besoin de dimension cohomologique finie ...). Si k est une $\mathbf{Q}$-Algèbre, le même problème se rencontre d'ailleurs déjà pour les complexes de type De Rham-Sullivan (et le problème est ouvert – et posé par DELIGNE – quand $\mathcal{X} = (\mathrm{Ens})^* =$ topos des ensembles cosimpliciaux, $\mathcal{Y} =$ topos ponctuel). Mais sauf erreur (si `[mes]` souvenirs sont exacts) il y a un topos qui marche pour les espaces topologiques paracompacts ...

`[page 15]`

f) On peut associer à un espace topologique X ou un ensemble semi-simplicial $\mathcal{X}_*$ des invariants algébriques 'linéaires' *plus fins* a priori que le $C_{\mathrm{DRpd}}^{\bullet\bullet}$ (et même que $C_{\bullet\bullet}^{\mathrm{DRpd}}$, en dualisant ...).

P.ex. on peut observer que $C_{\mathrm{DRpd}\,*}^{\bullet\bullet}(k) \xrightarrow{\sim} \Gamma^\bullet\Phi_{*k} \otimes_k \Lambda^\bullet\Psi_{*k}$ se déduit de $\mathcal{D}_*^{\bullet\bullet}(k) = \Gamma^\bullet\Phi_{*k} \otimes_k \Lambda^\bullet\Phi_{*k}$ (qui est une algèbre k-augmentée à puissances divisées qui est une *résolution de* k) et de $T \in \Gamma(\mathcal{D}_{*k}^{1,0})$ comme conoyau de la multiplication par dT (i.e. on divise par l'idéal engendré par dT), ou encore en bidegré donné (p,q),

$$C_{*k}^{p,q} \simeq \operatorname{Ker}(\mathcal{D}_*^{p,q+1} \underbrace{\longrightarrow}_{\substack{\text{produit}\\ \text{par } dT}} \mathcal{D}_*^{p,q+2}) ,$$

d'où

$$C_{\mathrm{DRpd}}^{p,q}(\mathcal{X}_*, k) \simeq \operatorname{Ker}(\mathcal{D}^{p,q+1}(\mathcal{X}_*, k) \longrightarrow \mathcal{D}^{p,q+2}(\mathcal{X}_*, k)) ,$$

et on peut considérer les structures disons sur $C_{\mathrm{DRpd}}^{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, k)$ comme déduites de certaines structures (à expliciter ...) sur $\mathcal{D}^{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, k)$. On peut aussi définir '*La* structure multiplicative à puissances divisées cohomologique du type d'homotopie $\mathcal{X}_*$' en sens convenable, qui permet de reconstituer aussi bien $C_{\mathrm{DRpd}}^{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, k)$ que $\mathcal{D}_k^{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, k)$ (ou les complexes de De Rham-Sullivan ... `[- - -]`)

`[page 16]`

complexe de De Rham à puissances divisées (ou sinon $\mathcal{D}^{\bullet\bullet}(\mathcal{X}_*, \mathbf{Z})$) suffit déjà pour récupérer toute la structure multiplicative à puissances divisées cohomologique de

[8] Voir f) ci-dessous.

$\mathcal{X}_*$ (sous réserve de conditions de finitude bien sûr). Dans le cas contraire, ce serait cette dernière qui serait le candidat algébrique 'linéaire' naturel pour exprimer le type d'homotopie $\mathcal{X}_*$ (du moins si $\mathcal{X}_*$ `[est]` connexe et simplement connexe, et en passant à une catégorie dérivée convenable bien sûr).

2 [Début d'un manuscrit]

[page 1]

$\mathbf{\Delta}$ = catégorie des simplexes Δ^n $(n \geq 0)$, $\Delta^n = [0, n] \subseteq \mathbf{N}$ avec relation d'ordre total.

$\mathbf{\Delta}^\wedge = \mathrm{Ss} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{o}}, (\mathrm{Ens})) = \mathrm{Ens}_*$.

Plus généralement, si $\mathcal{A}$ est une catégorie, on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_* &= \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}^{\mathrm{o}}, \mathcal{A}) \\ \mathcal{A}^* &= \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{\Delta}, \mathcal{A}) \, , \end{aligned}$$

donc

$$(\mathcal{A}^{\mathrm{o}})^* \simeq (\mathcal{A}_*)^{\mathrm{o}} \, , \qquad \mathcal{A}^* \simeq ((\mathcal{A}^{\mathrm{o}})_*)^{\mathrm{o}} \, ,$$

où l'exposant o désigne le passage à la catégorie opposée.

Les objets de $\mathcal{A}_*$ (resp. $\mathcal{A}^*$) sont considérés comme des structures algébriques de type simple (sur une infinité d'objets de base) dans $\mathcal{A}$, les 'objets semi-simpliciaux' resp. 'semi-cosimpliciaux'. On écrira Ens_* quand on a en vue cet aspect, et $\mathbf{\Delta}^\wedge$ ou Ss quand on a plutôt le point de vue 'objet d'un topos' ou 'faisceau sur un topos' ([9]). Tous les développements qui suivent ont pour objet d'étudier ces objets (l'équivalent combinatoire des espaces topologiques) et leurs 'types d'homotopie', via des invariants qu'on peut leur associer, qui en dépendent de façon covariante ou contravariante. Nous avons ici en vue une étude systématique, dans l'esprit de l'algèbre universelle, de ces invariants (qui sont donc des foncteurs sur $\mathbf{\Delta}^\wedge = \mathrm{Ens}_*$), de leurs structures et des opérations qui peuvent être définies sur elles, permettant d'en déduire certaines complexes à partir d'autres plus simples.

[page 2]

Un objet de $\mathcal{A}_*$ sera généralement noté par un symbole de la forme K_*, où K_* désigne la famille des

$$K_*(\Delta^n) = K_{[n]} \, , \qquad K_* \overset{\text{par abus de notation}}{=} (K_{[n]})_{n \geq 0} \, ,$$

avec les opérations semi-simpliciales entre elles. On fera attention qu'on écrit $K_{[n]}$ et non K_n, pour des raisons qui vont apparaître (impérieuses lorsque $\mathcal{A}$ est additive ...).

De même, un objet de $\mathcal{A}^*$ sera noté

$$K^* = ([n] \longmapsto K^{[n]}) \overset{\text{abus de notation}}{=} (K^{[n]})_n \, .$$

Nous aurons à travailler avec la situation où on a deux catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, et une équivalence (notée $M \longmapsto M^\vee$)

$$\vee \, : \, \mathcal{A}^{\mathrm{o}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{B} \, , \qquad \text{d'où} \qquad \mathcal{B}^{\mathrm{o}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$$

[9] On veut garder [?] à l'aspect [?] la nature algébrique très particulier de ce topos, la notation Ss quand on veut l'oublier, on profite de sa signification topologique.