FR-ILZ FALTINGS 83

27.6.1983

Lieber Herr Falting,

Vielen Dank für Ihre rasche Antwort und Übersendung der Separate! Ihr Kommentar zur sog. "Theorie der Motive" ist von der üblichen Art, die wohl grossenteils der in der Mathematik stark eingewurzelten Tradition entspringt, nur denjenigen mathematischen Situationen und Zusammenhängen einer (eventuell langatmigen) Untersuchung und Aufmerksamkeit zuzuwenden, insofern sie die Hoffnung gewähren, nicht nur zu einem vorläufigen und möglicherweise z.T. mutmasslichen Verständnis eines bisher geheimnisvollen Gebiets zu kommen, wie es in den Naturwissenschaften ja gang und gäbe ist - sondern auch zugleich Aussicht auf die Möglichkeit einer laufenden Absicherung der gewonnenen Einsichten durch stichhaltige Beweise. Diese Einstellung scheint mir nun psychologisch ein ausserordentlich starkes Hindernis zur Entfaltung mathematischer Schauenskraft, und damit auch zum Fortschreiten mathematischer Einsicht auch im üblichen Sinn, nämlich der Einsicht, die durchdringend oder erschöpfend genug ist, um sich schliesslich "beweisen" zu können. Was meine Erfahrung in mathematischer Arbeit mich immer wieder lehrte, ist dass stets in erster Linie der Beweis aus der Einsicht entspringt, nicht im Gegenteil - und dass die Einsicht in erster Linie aus einem feinfühligem und hartnäckigem Aufspüren der relevanten Wesenheiten und Begriffen entsteht, und deren Wechselbeziehung. Der leitende Faden ist innere Kohärenz des allmählich sich aus dem Dunst lösenden Bildes, und Einklang auch mit anderweilig Bekanntem oder Erahntem - und er leitet um so sicherer, als die "exigeance" der Kohärenz eine strengere und feinfühlendere ist.

Um auf Motive zurückzukommen, so existiert meines Wissens keinerlei "Theorie" der Motive, aus dem einfachen Grund, dass niemand sich die Mühe machte, eine solche Theorie auszuarbeiten. Das vorhandende Material an bekannten Tatsachen und an geahnten Zusammenhängen ist von beeindruckender Reichhaltigkeit - unverhältnismässig viel mehr, will mir scheinen, als je zur Ausarbeitung einer physikalischen Theorie vorlag! Es existiert z.Z. eine Art "yoga des motifs", das einer handvoll Eingeweihter geläufig ist, und in manchen Situationen einen sicheren Anhalt gewährt zur Erratung gewisser Zusammenhänge, die sich dann auch beiweilen tatsächlich so oder so beweisen lassen (wie etwa in Ihrer letzten Arbeit der Satz über Galoisaktion auf Tatsche Moduln abelscher Mannigfaltigkeiten). Es hat den Status scheint mir einer Art Geheimwissenschaft - Deligne scheint mir der, dem sie am geläufigsten ist. Seine erste veröffentlichte Arbeit, über die Entartung der Leray'schen Spektralfolge für eine glatte eigentliche Abbildung algebraischer Mannigfaltigkeiten über $\underline{C}$, entsprang einer einfachen Überlegung über

"Gewichte" von Kohomologiegruppen, die zu jener Zeit reine Heuristik waren, heute aber (seit dem Beweis der Weil'schen Vermutungen) sich wohl über beliebigem Grundschema durchführen liessen. Es ist mir auch klar, dass die Deligne'sche Erweiterung der Hodge Theorie weitgehend aus dem ungeschriebenen "Yoga" der Motive schöpfte - nämlich dem Bestreben entsprang, gewisse "Tatsachen" aus jenem Yoga, und ganz besonders die Existenz der Filtration der Kohomologie durch "Gewichte", und zudem die Halbeinfachkeit gewisser Aktionen von Fundamentalgruppen, im Rahmen der transzendenten Hodge-strukturen sicherzustellen.

Nun einige Worte zum "Yoga" der anabelschen Geometrie. Es geht dabei um "absolute" alg. Geometrie, nämlich über Grundkörpern (etwa) K, die endlich erzeugt über dem Primkörper sind. Die allgemeine Grundidee ist, dass für gewisse, sog. "anabelsche", Schemata X (von endlichem Typ) über K, die Geometrie von X vollständig durch die (profinite) Fundamentalgruppe $\Pi_1(X,\xi)$ bestimmt ist (wo ξ ein "geometrischer Punkt" von X ist, etwa mit Wert in einem vorgeschriebenen alg. abg. Hülle $\bar{K}$ von K), zusammen mit der extra-Struktur, die durch den Homomorphismus

(1) $$\Pi_1(X,\xi) \longrightarrow \Pi_1(K,\xi) = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$$

gegeben ist, deren Kern die "geometrische Fundamentalgruppe"

(2) $$\Pi_1(\bar{X},\xi) \qquad (\bar{X} = X \otimes_K \bar{K})$$

ist - also auch die profinite Kompaktifikation der transzendenten Fundamentalgruppe, wenn $\bar{K}$ als Teilkörper des Körpers $\underline{C}$ der komplexen Zahlen gegeben ist. Das Bild von (1) ist eine offene Teilgruppe der profiniten Galoisgruppe, vom Index 1 genau dann, wenn $\bar{X}$ zusammenhängend ist.

Die erste Frage ist, welche Schemata X als "anabelsch" angesehen werden sollen. Dabei will ich mich jedenfalls auf glattes X beschränken. Völlige Klarheit habe ich nur im Fall dim X = 1 . Allenfalls soll die anabelsche Eigenschaft eine rein geometrische sein, nämlich sie hängt nur von $\bar{X}$ über dem alg. abg. Körper $\bar{K}$ (oder dem entsprechenden Schema über beliebiger alg. abg. Erweiterung von $\bar{K}$, etwa $\underline{C}$). Zudem soll $\bar{X}$ anabelsch sein wenn und nur wenn die zusammenhängenden Komponente es sind. Schliesslich (im Fall der Dimension 1) ist eine (glatte zusammenhängende) Kurve über $\bar{K}$ anabelsch, wenn ihre EP -charakteristik < 0 ist, oder auch, wenn ihre Fundamentalgruppe nicht abelsch ist; diese letztere Formulierung trifft jedenfalls in Charakteristik null zu, oder im Fall einer eigentlichen ("kompakten") Kurve - sonst muss die "prim-zu-p" Fundamentalgruppe genommen werden. Andere äquivalente Formulierungen: das Gruppenschema der Automorphismen soll der Dimension null sein, oder

auch die Automorphismengruppe soll endlich sein. Ist die Kurve vom Typ (g,ν), wo g das Geschlecht, und ν die Anzahl der "Löcher" oder "Punkte im Unendlichen" ist, so sind die anabelschen Kurven genau die, für die der Typ verschhieden ist von $(0,0),(0,1),(0,2)$ und $(1,0)$ nämlich

$$2g+\nu > 2 \quad (\text{i.e. } -\chi = 2g-2+\nu > 0).$$

~~Andrerseits~~ Wenn der Grundkörper $\underline{C}$ ist, so sind die anabelschen Kurven genau die, deren (transzendente) universelle Überlagerung "hyperbolisch" ist nämlich isomorph zum Poincaré'schen Halbebene - also genau die, die "hyperbolisch" sind im Sinne von Thurston.

Andernteils sehe ich eine Mannigfaltigkeit jedenfalls dann als "anabelsch" (ich könnte sagen "elementar anabelsch") an, wenn sie sich durch ~~mehr~~ successive (glatte) Faserungen aus anabelschen Kurven aufbauen lässt. Demnach (einer Bemerkung von M. Artin zufolge) hat jeder Punkt einer glatten Mannigfaltigkeit X/K ein Fundamentalsystem von (affinen) anabelschen Umgebungen.

Schliesslich wurde letztlich meine Aufmerksamkeit immer stärker durch die Modulmannigfaltigkeiten (oder vielmehr die Modul<u>multiplizitäten</u>) $M_{g,\nu}$ für algebraische Kurven beansprucht, und ich bin so ziemlich überzeugt, dass auch diese als "anabelsch" angesprochen werden dürfen, nämlich dass ihre Beziehung zur Fundamentalgruppe eine ebenso enge ist, wie im Fall von anabelschen Kurven. Ich würde annehmen, dass dasselbe auch für die Modulmultiplizitäten polarisierter abelscher Mannigfaltigkeiten gelten dürfte.

Ein grosser Teil meiner Überlegungen ~~in den letzten~~ zwei Jahren beschränkte sich auf den Fall der Char. Null, den ich nun vorsichtshalber vorraussetzen will. Da ich mich seit über einem Jahr nicht mehr mit diesem Fragenkomplex beschäftigt habe, verlasse ich mich auf mein Gedächtnis, das jedenfalls rascher zugängig ist als Stapel von Aufzeichnungen - ich hoffe, ich webe nicht zuviel Irrtümer mit hinein ! Ein Ausgangspunkt unter Anderem war die bekannte Tatsache für Mannigfaltigkeiten X,Y über einem alg. abg. Körper K, wenn Y sich in eine quasi-abelsche Mannigfaltigkeit A einbetten lässt, dass eine Abbildung $X \longrightarrow Y$ bis auf Translation in A bekannt ist, wenn die entsprechende Abbildung für H_l (etwa l-adisch) bekannt ist. Daraus folgt in manchen Situationen (etwa, wenn Y "elemantar anabelsch" ist) dass bei dominierendem f (nämlich f(X) dicht in Y) f genau bekannt ist, wenn $H_l(f)$ bekannt ist. Doch der Fall

von konstanten Abbildungen lässt sich offensichtlich nicht einordnen. ~~Auch~~ Aber gerade der Fall wo X sich auf einen Punkt reduziert ist, von besonderem Interesse, falls man es auf eine "Bestimmung" der Punkte von Y absieht!

Geht man nun zum Fall eines Körpers K vom endlichen Typ über, und ersetzt man H_1 (nämlich die "abelianisierte" Fundamentalgruppe) durch die volle Fundemantalgruppe, so ergibt sich, falls Y "elementar anabelsch" ist, dass f bekannt ist, wenn $\pi_1(f)$ bekannt ist "bis auf inneren Automorphismus". Wenn ich recht ersinne, genügt es hier, statt der vollen Fundamentalgruppen, mit deren Qötienten zu arbeiten, die sich ergeben, wenn man (2) durch die entsprechenden abelianisierten Gruppen $H_1(\bar{X},\underline{Z}^\wedge)$ ersetzt. Der Beweis ergibt sich ziemlich einfach aus dem Mordell-Weilschen Satz, dass die Gruppe A(K) ein endlich erzeugter $\underline{Z}$-Modul ist, wo A die "jacobienne généralisée" von Y ist, die der "universellen" Einbettung von Y in einen Torsor unter einer quasi-abelschen Mannigfaltigkeit entspricht. Der springende Punkt ist hier, dass ein Punkt von A über K nämlich ein "Schnitt" von A über K, völlig bestimmt ist durch die ensprechende Spaltung der exakten Sequenz

$$(3) \qquad 1 \to H_1(\bar{A}) \to \pi_1(A) \to \pi_1(K) \to 1$$

(bis auf inneren Automorphismus), nämlich durch die entsprechende Kohomologieklasse in

$$H^1(K, \pi_1(\bar{A})) \quad ,$$

wobei $\pi_1(\bar{A})$ auch durch die ℓ-adische Komponente, nämlich das Tate'sche Modul $T_\ell(\bar{A})$, ersetzt werden kann.

Aus diesem Ergebnis folgt nun leicht das Folgende, das mich for zwei ein halb Jahren einigermassen verblüffte: es seien K,L zwei Körper vom endlichen Typus (kurz "absolute Körper" genannt), dann ist ein Homomorphismus

$$K \to L$$

völlig bestimmt, wenn man die entsprechende Abbildung

$$(4) \qquad \pi_1(K) \to \pi_1(L)$$

der entsprechenden "äusseren Fundamentalgruppen" kennt (nämlich, wenn jene bis auf inneren Automorphismus bekannt ist). Dies klingt stark an, an die topologische Intuition des ~~starken~~ Zusammenhanges zwischen $K(\pi,1)$ Räumen, und deren Fundamentalgruppen - nämlich, Homotopieklassen von Abbildungen der Räume entsprechen eineindeutig den entsprechenden Abbildungen zwischen den äusseren Gruppen. Im Rahmen jedoch der absoluten Geometrie (nämlich über "absoluten" Körpern) bestimmen die Homotopieklassen

FP_1L2 FALTINGS83

einer Abbildung schon die Abbildung. Der Grund dafür scheint mir in der ausserordentlichen Rigidität der vollen Fundamentalgruppe, die wiederum daraus entspringt, dass die Aktion des "arithmetischen Teils" jener Gruppe nämlich $_1(K) = Gal(\bar{K}/L)$, auf dem "geometrischen Teil" $_1(X_{\bar{K}})$, so ausserordentlich stark ist (was sich insbesondere ja auch in den Weil-Deligneschen Aussagen ausdrückt).

Letztere Aussage ("Der Grund dafür ...") kam mir etwas rasch in die Schreibmaschine - ich erinnere jetzt, dass für die vorangehende Aussage über Homomorphismen von Körpern keineswegs notwendig ist, dass diese "absolut" seien - es genügt, dass beide vom endlichen Typ über einem gemeinsamen Grundkörper seien, sofern wir uns auf k-Homomorphismen beschränken. Dabei genügt es offensichtlich, sich auf den Fall k alg. abg. zu beschränken. Die erwähnte "Rigidität" hingegen spielt entscheidend ein, wenn wir es darauf absehen, diejenigen Abbildungen (4) zu kennzeichnen, die einem Homomorphismus $K \to L$ entsprechen. In dieser Hinsicht ist folgende Vermutung naheliegend: wenn der Grundkörper k "absolut" ist, dann sind genau die äusseren Homomorphismen (4) "geometrisch", die mit den "Augmentationshomomorphismen" zu $\Pi_1(k)$ verträglich sind.* Bei dieser Aussage kann man sich offensichtlich auf den Fall beschränken wenn k der Primkörper ist, also $\mathbb{Q}$ (da Char. null). Das "Grundobjekt" der anabelschen alg. Geometrie der Char. Null, das für den Primkörper $\mathbb{Q}$ steht, ist demnach die Gruppe

(5) $$\Gamma = \Pi_1(\mathbb{Q}) = Gal(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}),$$

wo $\bar{\mathbb{Q}}$ die alg. abg. Hülle von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$ sein soll.

*Oder kann man sich auf den Fall beschränken, wenn k der Primkörper ist? PS: die Bindegrenzung

Die obige Vermutung kann als die Hauptvermutung der "birationellen" anabelschen alg. Geometrie angesehen werden - sie sagt aus, dass die Kategorie der "absoluten birationellen alg. Mannigfaltigkeiten" in Char. Null sich voll einbetten lässt in die Kategorie der nach Γ augmentierten proendlichen Gruppen. Weiterhin besteht dann noch die Aufgabe, zu einem ("rein algebraischen") Beschreibung der Gruppe Γ zu gelangen und zudem, zu einem Verständnis, welche Γ-augmentierten proendlichen Gruppen zu einem $\Pi_1(K)$ isomorph sind. Ich will vorerst nicht auf diese Fragen eingehen, möchte hingegen ein verwandte und beträchtlich schärfere Vermutung für anabelsche Kurven formulieren, aus der die vorherige folgt.

Ich sehe da zwei verschieden erscheinende, aber äquivalente Formulierungen

1) Es seien X,Y zwei (zusammenhängende, das sei stets vorausgesetzt) anabelsche Kurven über dem absoluten Körper der Char. Null, man betrachtet die Abbildung

FP-IL2 FALTINGS83

~~betrachtet die Abbildung~~

(6) $\mathrm{Hom}_K(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom\ ext}_{\Pi_1(K)}(\Pi_1(X),\Pi_1(Y))$,

wo Hom ext die Menge der äusseren Homomorphismen proendlicher Gruppen bezeichnet, und der Index $\Pi_1(K)$ Kompatibilität mit den Augmentationen nach $\Pi_1(K)$ bedeutet. Nach dem Vorangehenden ist bekannt, dass diese Abbildung injektif ist. Ich vermute, dass sie bijektif ist.*

*Siehe Berichtigung im P.S.

2) Diese zweite Form kann als Reformulierung von 1) angesehen werden, im Fall von konstanten Abbildungen von X zu Y. Es sei $\Gamma(X/K)$ die Menge aller K-wertigen Punkte (also "Schnitte") von X über K , man betrachtet die Abbildung

(7) $\Gamma(X/K) \longrightarrow \mathrm{Hom\ ext}_{\Pi_1(K)}(\Pi_1(K),\Pi_1(X))$,

wo die zweite Menge also die Menge aller "Spaltungen" der Gruppenerweiterung (3) ist (wo A durch X ersetzt werde - $\Pi_1(X)\to\Pi_1(K)$ ist in der Tat surjektif, sofern nur X überhaupt einen K-wertigen Punkt besitzt und deshalb X auch "geometrisch zusammenhängend" ist), oder vielmehr die Menge der üblichen Konjugationsklassen solcher Spaltungen via Aktion der Gruppe $\Pi_1(X)$. Es ist bekannt, dass (7) injektif ist, und die Hauptvermutung sagt aus, dass sie bijektif ist.*

*Siehe unten für Berichtigung

Fassung 1) folgt aus 2), indem man K durch den Funktionenkörper von X ersetzt. Dabei ist es übrigens gleichgültig, ob X anabelsch ist, und wenn ich nicht irre, folgt die Aussage 1) sogar für beliebiges glattes X (ohne dim X = 1 Voraussetzung). Was Y anbelangt, so folgt aus der Vermutung, dass Aussage 1) gültig bleibt, sofern nur Y "elementar anabelsch" ist, und entsprechend natürlich für Aussage 2). Dies gibt nun im Prinzip, unter Verwendung der Artin'schen Bemerkung, die Möglichkeit einer vollständigen Beschreibung der Kategorie der Schemata vom endlichen Typus über K, "en termes de" $\Gamma(K)$ und Systemen von proendlichen Gruppen. Hier wiederum habe ich etwas rasch in die Schreibmaschine gehauen, da die Hauptvermutung erst noch ausgearbeitet und vervollständigt werden muss, zu einer Aussage darüber, welches nun (bis auf Isomorphismus) die $\Gamma(K)$-augmentierten proendlichen vollständigen Gruppen sind, die von anabelschen Kurven über K stammen. Wenn es nur auf eine Aussage der "pleine fidélité" wie in obigen Formulierungen 1) und 2) ankommt, so dürfte sich folgendes ohne besondere Schwierigkeit aus diesen ableiten lassen, und sogar schon (wenn ich nicht irre) aus der vorangehenden beträchtlich schwächeren birationellen Variante. Es seien nämlich X und Y zwei Schemata, die "wesentlich vom endlichen Typ über $\underline{Q}$ " sind, z.B. jedes eine ~~vom endlichen~~ Typ über einem (unbestimmt bleibendem) ~~Körper~~ absoluten Körper der Char. Null. X und Y

*Siehe Berichtigung im P.S.

FP-1L2 FALTINGS 83

brauchen weder glatt noch zusammenhängend sein, ebensowenig "normal" oder dergleichen - hingegen sollen sie reduziert vorausgesetzt werden. Ich betrachte die entsprechenden etalen Topoi X_{et} und Y_{et} ; und die Abbildung

(8) $\quad \mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Iskl}\ \mathrm{Hom}_{top}(X_{et},Y_{et})$,

wo Homtop die (Menge der) Homomorphismen der Topoi X_{et} in Y_{et} bezeichnet, und Is kl Übergang zu (der Menge der) Isomorphieklassen bedeutet. (Es sei dazu bemerkt, dass die Kategorie $\underline{\mathrm{Hom}}_{top}(X_{et},Y_{et})$ rigid ist, nämlich dass es stets nur einen Isomorphismus zwischen zwei Homomorphismen $X_{et} \to Y_{et}$ geben kann. Wenn X und Y Multiplizitäten und nicht Schemata sind, muss folgende Aussage durch eine entsprechend feinere, nämlich eine Äquivalenz von Kategorien $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ mit $\underline{\mathrm{Hom}}_{top}(X_{et},Y_{et})$ ersetzt werden.) Wesentlich ist dabei, dass X_{et} und Y_{et} lediglich als topologische Gebilde, also mit Ausschluss der Strukturgarben, betrachtet werden, während ja das erste Glied von (8) als $\mathrm{Iskl}\ \mathrm{Hom}_{top.\,ann}(X_{et},Y_{et})$ aufgefasst werden kann.

Zuerst sei bemerkt, dass aus dem vorhergehendem "Bekannten" ohne Schwierigkeit folgen dürfte, dass (8) injektif ist. Dazu fällt mir nun allerdings ein, dass ich bei der Beschreibung des zweiten Gliedes von (8) ein wichtiges Strukturelement vergass, nämlich X_{et} und Y_{et} sollen als Topoi über der absoluten Basis $\underline{Q}_{et}$ aufgefasst werden, die durch die preendliche Gruppe $\Gamma = \pi_1(K)$ (5) völlig beschrieben ist. Also Hom_{top} soll als $\mathrm{Hom}_{top/\underline{Q}_{et}}$ gelesen werden. Mit dieser Berichtigung wäre nun die naheliegende Vermutung, dass (8) bijektif sei. Das kann nun aber aus dem Grund nicht ganz zutreffen, weil es ja endliche radizielle Morphismen $Y \to X$ geben kann (sogenannte "universelle Homeomorphismen"), die nämlich eine topologische Äquivalenz sind nämlich einer Äquivalenz $Y_{et} \xrightarrow{\sim} X_{et}$ zeitigen, ohne Isomorphismen zu sein, so dass also keine Umkehrung $X \to Y$ existiert, während sie doch für die etalen Topoi existiert. Setzt man aber X als normal voraus, so vermute ich, dass (8) bijektif ist. Im allgemeinen Fall sollte es zutreffen, dass für jedes φ im zweiten Glied sich ein Diagram bilden lässt

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & Y \end{tikzcd} ,$$

(wo g ein "universeller Homeomorphismus" ist), aus dem φ im naheliegenden Sinn entspringt. Ich vermute sogar, dass dasselbe gültig bleibt ohne Char. Null Voraussetzung, nämlich wenn $\underline{Q}$ durch $\underline{Z}$ ersetzt wird - was damit zusammenhängt, dass die "birationelle" Hauptvermutung auch in beliebiger Charakteristik gültig sein dürfte, sofern wir nur die "absoluten"

Körper durch deren "perfekte Hüllen" $K^{p^{-\infty}}$ ersetzen, die ja dasselbe π_1 haben.

Ich fürchte, ich wurde etwas ausschweifig mit jenem Abstecher bezüglich beliebiger Schemata vom endlichen Typus und deren etale Topoi - interessanter für Sie dürfte eine dritte Formulierung der Hauptvermutung sein, die jene noch leicht verschärft, und die zudem einen besonders "geometrischen" Beiklang hat. Es ist auch die, die ich vor etwa zwei Jahren Deligne mitteilte, und von der er mir sagte, dass aus ihr die Mordell'sche Vermutung folge. Es sei wiederum X eine anabelsche geometrisch zusammenhängende Kurve über dem absoluten Körper K der Char. Null, $\tilde{X}$ ihre universelle Überdeckung, aufgefasst als ein Schema (aber nicht vom endlichen Typ) über $\bar{K}$, nämlich als universelle Überdeckung der "geometrischen" Kurve $\bar{X}$. Sie steht hier als eine Art algebraisches Analogon zur transzendenten Konstruktion, wo die Überdeckung dem Poincaré'schen Halbebene isomorph ist. Ich betrachte aber zudem die Komplettierung $X^\wedge$ von X (die also eine projektive Kurve ist, nicht unbedingt anabelsch da ja X vom Geschlecht 0 oder 1 sein kann), und deren Normalisierung $\tilde{X}^\wedge$ bezüglich $\tilde{X}$, die eine Art Kompaktifizierung von $\tilde{X}$ darstellt. (Wenn es Ihnen lieber ist, können Sie gerne vorerst X eigentlich, also $X = X^\wedge$ voraussetzen, also $\tilde{X} = \tilde{X}^\wedge$) Die Gruppe $\pi_1(X)$ kann aufgefasst werden als die Gruppe der X-Automorphismen von $\tilde{X}$, und sie agiert zugleich auf dessen "Kompaktifizierung" $\tilde{X}^\wedge$. Diese Aktion ist verträglich mit der Aktion auf $\bar{K}$ via $\pi_1(K)$. Ich interessiere mich nun für die entsprechende Aktion

$$\text{Aktion von } \pi_1(X) \text{ auf } \tilde{X}^\wedge(\bar{K}),$$

(die Menge der $\bar{K}$-wertigen Punkte, oder was aufs selbe herauskommt, der vom generischen Punkt verschiedenen Punkte von $X^\wedge$), und insbesondere, für eine gegebene Spaltung von (3)

$$\pi_1(K) \to \pi_1(X),$$

für die entsprechende Aktion von der Galois-Gruppe $\pi_1(K)$. Die Vermutung ist nun, dass letztere Aktion (genau) einen Fixpunkt besitzt.

Dass es höchstens einen Fixpunkt geben kann, folgt aus der Injektivität in (7), oder lässt sich jedenfalls auf dem selben Weg mittels dem Mordell-Weilschen Satz beweisen. Unbewiesen ist die Existenz des Fixpunktes, die mehr oder weniger der Surjektivität von (7) äquivalent ist. Dabei geht es mir nun aber auf, dass die Formulierung von der Hauptvermutung via (7), die ich vorhin gab, nur im Fall wo X eigentlich ist eine korrekte ist - und in dem Fall ist sie mit der dritten (soeben gegebenen) Formulierung tatsächlich äquivalent. Im Falle hingegen wo X nicht eigentlich ist, also "unendlich ferne Punkte" besitzt, so liefert jeder eine dieser Punkte

FP-ILZ FALTINGS 83

auf naheliegende Weise ein erkleckliches Paket von Spaltungsklassen (dessen Mächtigkeit das des Kontinuums ist), die sich nicht durch im endlichen liegende Punkte erhalten lassen. Diese entsprechen dem Fall eines Fixpunktes in $\tilde{X}^{\wedge}$, der nicht in $\tilde{X}$ liegt. Die Einzigkeit des Fixpunktes besagt unter anderem, dass ausser der Injektivität von (7), dass die "Pakete", die verschiedenen Punkten im Unendlichen entsprechen, leeren Durchschnitt haben, also dass jede Spaltungsklasse, die keinem endlichen Punkt entspricht, einem eindeutig bestimmten Punkt im Unendlichen entspringt.

Anstoss für diese dritte Formulierung der Hauptvermutung waren gewisse transzendente Überlegungen über Aktion endlicher Gruppen auf algebraischen komplexen Kurven und deren (transzendent definierten) universellen Überlagerungen, die in meinen Uberlegungen(in der ersten Hälfte des Jahres 1981, also vor zwei Jahren etwa), über die Aktion von Γ auf gewisse proendliche anabelsche Fundamentalgruppen (insbesondere die von $P^1 - (0,1,\infty)$), eine entscheidende Rolle spielten. (Diese Rolle war vor allem die eines Leitfadens ins vorerst völlig Unbekannte, da die entsprechenden Aussagen in Char. $p > 0$ unbewiesen blieben,und auch heute noch sind .) Um auf die Aktion von Galoisgruppen wie $\Gamma_1(K)$ zurückzukommen, so erscheint diese in mancher Hinsicht Analog zur Aktion endlicher Gruppen, was sich z.B. auf besonders frappante und präzise Art in der vorherigen Vermutung äussert.

Ich nahm die anabelschen Überlegungen zwischen Dezember 81 und April 1982 wieder auf, diesmal aber mit einem verschiedenen Schwergewicht - nämlich dem Bestreben nach einem Verständnis der mannigfaltigen Struktur der (Teichmüllerschen) Fundamentalgruppen $T_{g,\nu}$ (besser, der Fundamentalgruppoids) der Modulmultiplizitäten $\overline{M}_{g,\nu}$, und der Aktion von Γ auf deren proendliche Komplettierung. (An diese Untersuchung möchte ich diesen Herbst wieder anknüpfen, wenn ich mich in diesem Sommer des Aufschreibens von davon etwas sehr entlegenden Überlegungen über Grundlagen kohomologischer bezw homotopischer Algebra entledigen kann, das mich seit vier Monaten schon beschäftigt.) Ich bitte um Nachsicht um die etwas chaotische Darstellung eines Ideenkreises, der mich zwar sechs Monate lang intensiv im Atem hielt, mit dem ich aber seit zwei Jahren nur sehr flüchtigen Kontakt hatte, wenn überhaupt. Sollte es Sie interessieren, und sich die Gelegenheit ergeben, dass Sie sich in Südfrankreich befinden, wäre es mir ein Vergnügen, mit Ihnen auf diese und andere Aspekte des "anabelschen Yogas" einzugehen. Es wäre sicherlich auch möglich, Sie für eine Ihnen genehme Zeispanne zur Universität Montpellier einzuladen, nur fürchte ich, dass die Prozedur bei der heutigen Konjunktur eine etwas langwierige ist, da die Universität selbst für

FP-1L2 FALTINGS 83

derlei Einladungen z.Z. keine Fonds hat, eine Einladung also von Paris aus beschlossen bezw. genehmigt werden muss - was wohl heissen dürfte, dass entsprechende Vorschläge ungefähr ein Jahr im voraus gemacht werden müssen.

Mit diesen ermunternden Worten will ich nun aber diesen unmässig lang gewordenen Brief beenden, und Ihnen nur noch erfreuliche Ferien wünschen !

Herzliche Grüsse

Ihr Alexander Grothendieck

PS Beim Nachlesen dieses Briefes fällt mir auf, dass, zugleich wie die zweite Fassung der Hauptvermutung, auch dessen Verallgemeinerung auf "elementar anabelsche" Mannigfaltigkeiten berichtigt werden muss, sorry ! Übrigens sehe ich jetzt, dass auch die erste Fassung im selben Sinne berichtigt werden muss - nämlich im Fall von (6) wo Y nicht eigentlich ist, ist es notwendig, sich im ersten Glied auf nicht-konstante Homomorphismen zu beschränken, und im zweiten auf Homomorphismen $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$, deren Bild von endlichem Index (nämlich offen) ist. Im Falle, wo Y durch eine elementar anabelsche Mannigfaltigkeit ersetzt wird, gilt die Bijektivität von (6), sofern man sich im ersten Glied auf <u>dominierende</u> Homomorphismen beschränkt, und im zweiten dieselbe Beschränkung (Bildgruppe von endlichem Index) beibehält. Ähnlich muss auch die "birationelle" Fassung berichtigt werden - nämlich man muss sich auf solche Homomorphismen (4) beschränken, deren Bildgruppe von endlichem Index ist.

Komme ich nun auf die Abbildung (7) zurück im Fall einer anabelschen Kurve, so lässt es sich genau angeben, welches die Spaltungsklassen im zweiten Glied sind, die keinem "endlichem" Punkt also keinem Element des ersten Gliedes entsprechen; und wenn ich recht entsinne, lässt sich eine solche Einfache Kennzeichnung des Bildes von (7) auch auf die allgemeinere Situation eines "elementar-anabelschen" X ausdehnen. Sofern ich mich nun entsinne, ist die Kennzeichnung (die natürlich gleichfalls mutmasslich ist, und zwar in beiden Richtungen, "hinreichend" und "genügend") die folgende.

Es sei $\pi_1(K)^o$ = Kern von $\pi_1(K) \longrightarrow \hat{\mathbb{Z}}^*$ (der zyklotomische Charakter)

Gegeben sei eine Spaltung $\pi_1(K) \to \pi_1(X)$, also $\pi_1(K)$ und deshalb auch $\pi_1(K)^o$ operiert auf $\pi_1(\bar{X})$, der geometrischen Fundamentalgruppe. Die Bedingung ist nun, dass die Fixpunktgruppe dieser Aktion nur aus 1 bestehen soll!