FG-ILS SGAG.1/6

16.11.1966.

Cher Verdier,

Merci pour ta lettre et mes copies de tes Chap I et II. Enchanté de ton accord pour faire un bouquin dès maintenant. Je ne vois pas pourquoi cela retarderait ta soutenance. Tu pourras bien faire tirer tes textes actuels (avec des changements de virgules éventuels) à 150 exemplaires pour contenter la Faculté, et soutenir, sans attendre la parution du bouquin (dont tu n'auras de toutes façons qu'une vingtaine d'exemplaires d'auteur). Je te signale que North Holland s'engage à sortir le bouquin dans les neuf mois après réception du manuscript final, en comptant un mois pour la correction des épreuves par toi. Si par la suite tu dévisses une variante plus sophistiquée de la notion de catégorie triangulée, et trouves d'autres compléments importants à ajouter (comme la question de la complétion des catégories triangulées par des filtrations genre "degrés"), tu pourras toujours faire un volume ou deux, tout seul ou en collaboration avec une bonne volonté. J'attends pour le moment ton Chapitre III. Y aura-t-il un chapitre IV sur les topos annelés ? Tu pourras bien sûr y renvoyer sans vergogne à SGAA I à VI . Je serais content également si tu pouvais éclairer ma lanterne sur le tapis à la Freyd; ou n'en sais-tu pas plus pour le moment que ce que tu as mis ? A propos, si la généralisation du tapis de Freyd (qui, me dit Giraud, partait d'une catégorie de complexes) n'est pas entièrement évidente et demande du travail supplémentaire, tu peux quand même signaler dans le texte qu'il s'agit d'une généralisation de ton cru, tout en créditant Freyd comme il se doit.

FG_ILS SGA4.1/6

Quant aux désaccords que tu me soumets ~~xxxx~~ concernant mes observatix ons, tu dois sans doute avoir raison, y ayant plus réfléchi que moi. Mais je n'ai rien compris à tes explications concernant le premier point en litige, car page 2 ligne -9 l'assertion de factorisabilité que tu fais me semble trivialement déconnant (prends pour F le foncteur nul). Mais qu'as tu voulu dire en fait ? Pour les suites spectrales, c'est bien triste qu'on ait besoin de deux notations contradictoires, alors que dans Cartan Eilenberg il n'est jamais question qué d'une seule. ~~Tuxdevrais~~ Je n'ai pas essayé de comprendré tes explications, préférant te croire sur parole plutôt que de me replonger dans cette orgie d'indices qui m'a déjà laissé un souvenir assez pénible, du temps où j'apprenais les suites spectrales sur Serre et Cartan-Eilenberg ...

Je me demande si tu as déjà réfléchi à la situation suivante, que l'on peut formuler par exemple en termes de complexes de Kan X à homotopie près. Pour pouvoir utiliser le langage faisceautique, je vais identifier X avec sa réalisation topologique (bien que ce soit sans doute idiot ..). ~~Regarde~~ Fixe toi un anneau de base (A $\underline{Z}$ sera sans doute le plus beau) et regarde la catégorie des faisceaux de A-modules pseudocohérents et bornés, disons, bornés et i.e. à faisceaux de cohomologie localement constants à fibres de type fini sur A (quand A est noethérien). On la regarde comme sous-catégorie pleine de D(X;A). C'est une catégorie triangulée, et pour X variable dans la catégorie homotopique, elle dépend (sauf erreur) de façon contravariante de X, avec lex grain de sel habituel concernant les transitivités (on devrait avoir une catégorie fibrée sur la catégorie homotopique ...). On voit facilement que la connaissance de la catégorie

près. Soit X un tel ensemble semi-simplicial, il lui correspond une catégorie fibrée $\underline{X}$ sur la catégorie semi-simpliciale. Soit A un anneau (le cas le plus intéressant sera $A=\underline{Z}$), il y a lieu de s'intéresser à diverses sous-catégories de la catégorie dérivée droite $D^+(\underline{X},A)$ des préfaisceaux de A-modules sur $\underline{X}$: la catégorie $D^+_{\mathcal{L}c}$ des complexes dont les faisceaux de cohomologie sont localement constants (i.e. les applications simpliciales y induisent des isomorphismes), la catégorie analogue $D^b_{\mathcal{L}c}$, et les catégories D^b_{coh} et D_{parf} des complexes pseudocohérents bornés resp. des complexes parfaits:

$$D^+_{\mathcal{L}c}(\underline{X},A) \supset D^b_{\mathcal{L}c}(\underline{X},A) \supset D^b_{coh}(\underline{X},A) \supset D_{parf}(\underline{X},A)$$

Il y a lieu également, peut-être, d'introduire D^+_{coh}, sous-catégorie pleine de $D^b_{\mathcal{L}c}(\underline{X},A)$ formée des complexes à objects de cohomologie localement constants de type fini, lorsque A est noethérien. Toutes ces sous-catégories sont des catégories triangulées de D^+. Elles dépendent de X de façon contravariante, et lorsque $X \to X'$ est une équivalence d'homotopie, les foncteurs correspondants sont des équivalences de catégories triangulées. On a donc des catégories fibrées sur la catégorie homotopique. Il y a d'ailleurs lieu de mettre sur ces catégories triangulées des structures supplémentaires: ainsi D_{parf} est muni d'un produit tensoriel et d'un $\underline{Hom}$ interne, et il opère par produit tensoriels resp. $\underline{Hom}$ sur les autres catégories envisagées; si A est régulier, $D^b_{\mathcal{L}c}$ est aussi d'un produit tensoriel et d'un $\underline{Hom}$ interne, et il opère par $\otimes$ et $\underline{Hom}$ externes sur $D^+_{\mathcal{L}c}$. Il y a lieu d'introduire ces catégories, par ce que, à des degrés divers, elles constituent d'excellentes approximations à la connaissance de X, comme objet de la catégorie homotopique. Ainsi, elles impliquent la connaissance des cohomologies à coefficients constants ou tordus, comme foncteurs

hotip!

cohomologiques en les coéfficients, les opérations de cup-produit etc. De façon précise, la connaissance de $D^b_{\chi_c}(\underline{X},A)$ avec sa structure multiplicative ~~xxxxxxx~~ (pour A régulier non nul) implique sauf erreur la connaissance du groupe fondamental de chacune des composantes connexes de $\underline{X}$. Il faudrap cependant, peut-être, utiliser une petite structure supplémentaire, à savoir la donnée, pour chaque composante connexe de X (qui s'explicite d'ailleurs en termes des n'importe laquelle des catégories précédentes) d'un "foncteur fibre" (défini à isomorphisme non unique près)

$$D^+_{\chi_c}(\underline{X},A) \longrightarrow D(A) \quad \text{etc} \quad .$$

le groupe fondamental s'explicite alors comme le groupe des automorphismes du foncteur fibre, quand ce dernier est restreint aux objets "réduits au degré 0" (ce qui a un sens à nouveau en termes du foncteur fibre). Utilisant une variante convenable de Hurewicz due à Artin-Mazur, on trouve alors que si $A=\underline{Z}$, et si $X \longrightarrow Y$ est tel que $D^b_{lc}(Y) \longrightarrow D^b_{lc}(X)$ est une équivalence, alors $X \longrightarrow Y$ est un isomorphisme dans la catégorie homotopique. Il est alors tentant de se poser la question si X n'est pas déterminé à isomorphisme près par la connaissance de $D^b_{\chi_c}(X)$ avec sa structure multiplicative, plus précisément si le "foncteur" (il faudrait sans doute dire, 2-foncteur) $X \rightsquigarrow D^b_{\chi_c}(X)$ ne serait pas pleinement fidèle (en mettant bien sûr sur $D^b_{\chi_c}(X)$ sa structure multiplicative). Il est bien possible d'ailleurs que pour avoir un tel énoncé, il faudra une notion de catégorie triangulée plus sophistiquée que la tienne, peut-être style ∞-catégorie ... On peut remarquer en tous cas, déjà, que l'on a ici des RHom et pas seulement des Hom, ce qui est déjà plus riche que ta notion. On ne doit plus s'attendre à une correspondance aussi exacte lorsqu'on travaille avec des catégories genre D^b_{coh} ; ainsi, au lieu de récupérer le groupe fondamental

FG_ILS SGA4.1/6

via la catégorie de tous les $\underline{Z}(\pi)$-modules, comme on ne dispose plus que de la catégorie des $\underline{Z}(\pi)$-modules de type fini sur $\underline{Z}$, on trouvera sans doute une sorte d'enveloppe pro-algébrique du groupe fondamental, système projectif de schémas en groupes affines de type fini sur Spec $\underline{Z}$. Cela n'empêche qu'à certains égards les catégories genre D^b_{coh} sont plus excitantes, car pour des X pas trop gros leurs Hom vont être de type fini sur $\underline{Z}$, et on peut espérer trouver une théorie de structure pour des catégories triangulées à produit tensoriels interne ayant cette propriété de finitude, généralisant le théorème de structure dont je t'avais parlé pour les cas des catégories abéliennes A-linéaires, A un corps en termes de schémas en groupes sur k. On entrevoit une nouvelle façon dont la géométrie algébrique pourrait s'introduire en topologie. Il y aurait lieu bien sûr de regarder une foule de questions préliminaires, par exemple, comment se traduisent en termes des catégories triangulées précédentes les constructions les plus importantes familières aux homotopistes: groupes d'homotopie supérieurs et plus précisément, espaces des lacets; en sens inverse suspensions, ou encore espaces classifiants; tuage des groupes d'homotopie supérieurs, squélettes; produits cartésiens d'epaces etc. Si on se rappelle la construction de Cartan-Serre suivant laquelle toute application continue $X \to Y$ peut être regardée comme une fibration de Serre, de façon essentiellement unique, cela fournit par considération des images directes un foncteur $D^+_{\mathcal{X}_b}(X) \to D^+_{\mathcal{X}_c}(Y)$, satisfaisant par exemple la formule de projection, pour autant qu'on puisse l'écrire, et qui moyennant des hypothèses de finitude convenables induit des foncteurs images directes aussi pour certaines des autres catégories triangulées envisagées. En relation avec cette construction, comment s'interprète-t-en termes des $D^+_{\mathcal{X}}$ etc la construction de la "fibre" de $X \to Y$ (Y étant connexe disons), et plus généralement la suite exacte

infinie formée de X,Y,~~Z~~ et la fibre Z, et leurs espaces de lacets ? ~~Ent~~ Autres genres de questions: comment pourrait-on réconstituer les $D^+_{lc}(X,A)$ (disons) connaissant $D^+_{lc}(X,\underline{Z})$? Je suspecte, d'après l'analogie avec le cas des catégories abéliennes, que cela doit être possible. Et encore: comment récupérer le foncteur <u>homologie</u> (je devrais dire, hyperhomologie) $H_*(X,K)$ en termes de la donnée D^+_{lc} ou de ses variantes ? On tient ici la <u>cohomologie</u> de façon naturelle, comme un Hom dans la catégorie donnée . Il y a là tout un complexe de questions, évidemment très liées à celles abordées dans ma lettre du 26 Mars dont tu viens de m'envoyer la photocopie, et je crois qu'on devrait bien un jour les regarder systématiquement. C'est peut-être la seule façon de s'obliger à dévisser assez à fond les fondements de l'algèbre homologique, et en particulier la notion de catégorie triangulée, pour être sûr des bonnes notions ! Il semble aussi que l'algèbre homologique et l'homotopie ne devraient former qu'une seule et même discipline, et il y a peut-être là une voie possible pour mettre en évidence cette unité. (Comme autre approche vers une telle unification, je ne connais que par ouie-dire la définition des groupes d'homotopie comme foncteurs dérivés non commutatifs ....).

Bien cordialement