FG-ILS SGA4-114

4.3.66.

Cher Verdier,

Je prépare un exposé sur les séries caractéristiques d'endomorphismes de complexes parfaits, et à ce propos me pose la question d'une généralisation non commutative, analogue aux traces généralisées à la Stallings. Cela soulève un Pb dont tu dois connaitre plus ou moins la réponse: Soit A un anneau, soit C la catégorie additive des modules projectifs de type fini M sur A munis d'un endomorphisme u, et C' la catégorie triangulée formée des complexes parfaits de A-modules, munis d'un endomorphisme au sens des catégories dérivées. D'où deux groupes K évidents, et un homomorphisme canonique

$$K(C) \longrightarrow K(C') \quad ;$$

ce dernier est-il un isomorphisme ? Sinon, devient-il un isomorphisme si on divise de part et d'autres par les sous-groupes engendrés par les classes de couples (X,u), avec u=0 ? Une difficulté pour définir $K(C') \longrightarrow K(C)$, c'est que dans C', un homomorphisme de (X,u) dans (X',u'), même si X,X' sont strictement parfaits (i.e. pour de bons bornés et à composante projectives de type fini), et u et u' donnés comme vrais endomorphismes, est défini par un $v:X \to X'$ qui ne commute à (u,u') que à homotopie près, de sorte que lorsque v est un quasi-isomorphisme, je ne vois pas comment la considération d'un mapping-cylinder va nous prouver que $\sum(-1)^i cl(X^i,u^i) = \sum(-1)^i cl(X'^i,u'^i)$. Que peux-tu me dire à ce sujet ? Bien entendu, l'anneau A ne joue aucun rôle bien particulier, et tu pouvais aussi bien partir d'une catégorie abélienne avec un ensemble privilégié d'objets (jouant le rôle de projectifs de type fini) pour poser le problème.

Depêche pour Ferrand

~~[illegible]~~ La même question que ci-dessus se pose d'ailleurs si on remplace les endomorphismes d'objets par des automorphismes resp. automorphismes au sens de la catégorie dérivée; je serais également prêt au besoin à diviser les groupes K obtenus par les sous-groupes engendrés par les classes des (X, id_X) . Cette question se pose pour définir des déterminants généralisés à la Dieudonné-Whitehead-Bass pour des endomorphismes de complexes parfaits (et non seulement de modules libres ou projectifs de type fini).

A propos des déterminant généralisés, je me demande si je t'ai jamais vendu le tapis suivant, qui permet d'attrapper simultanément de façon assez sympathique le K^0 et le K^1 d'une catégorie triangulée (disons), et qui a peut-être une chance de se généraliser à la définition des K^i (pour des catégories triangulées ou assimilées), en remplaçant les catégories d'arrivée par des n-catégories. Appelons, pour simplifier, <u>catégorie de Picard</u> une catégorie P qui est un groupoïde, et qui est munie d'une loi de composition notée $\otimes$: $(X,Y) \rightsquigarrow X \otimes Y$, et d'un objet 1_P , l'opération $\otimes$ étant associative et commutative, admettant 1_P comme objet unité, et admettant des inverses. (Tout ça avec des grains de sel: les axiomes d'associativité et d'unité de commutativité sont plûtôt des <u>données</u> supplémentaires, savoir des isomorphismes de tri- resp. bi-foncteurs resp mono-fonct :

$$(X \otimes Y) \otimes Z \simeq X \otimes (Y \otimes Z) , \quad X \otimes Y \simeq Y \otimes X , \quad X \otimes 1 \simeq 1 \otimes X \simeq X ;$$

avec quelques axiomes emmerdants de compatibilité, l'inverse X^{-1} est défini comme solution d'un problème universel du type Hom interne). On pourrait aussi avoir envie d'appeler un tel fourbin un groupe-catégorie, ça ressemble à un groupe dans (Cat), sans être tout à fait ça , car il faut tenir compte de la structure de 2-catégorie de (Cat) et prendre la notion de groupe à valeurs dans une 2-catégorie ...

FG-iL S SGAL-114

Pour un tel P, l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets de P est un groupe abélien, qu'on devrait peut-être noter $K^0(P)$ ou $\pi_0(P)$, Dieu sait. D'autre part, pour tout élément X de P, Aut(X) est un groupe qu'il faut supposer commutatif si ça ne résulte pas des autres axiomes, et qui alors à isomorphisme canonique près ne dépend que de la classe de X dans $K^0(P)$: c'est le groupe fondamental en X du groupoïde P, lequel se trouve être commutatif donc déterminé à isomorphisme unique près indépendamment du choix de X dans une composante connexe donnée. Il y a mieux, tous les groupes K(X) sont canoniquement isomorphes entre eux, comme on voit en faisant opérer Aut(X) sur un élément Y en écrivant $Y \simeq X \otimes Z$ (avec $Z = X^{\otimes -1} \otimes Y$). Leur valeur commune s'applera $K^1(P)$, ou mieux, $\pi_1(P)$. Avec une généralisation convenable à des n-catégories, on aurait de même des $\pi_i(P)$ (en l'occurence, se bornant à une catégorie usuelle, il faut considérer les π_i supérieurs comme étant nuls, je pense). Sans doute la connaissance de $\pi_0(P)$ et $\pi_1(P)$ ne déterminé pas P avec ses structures à équivalence près, il y a sans doute un invariant du type de Postnikoff qui précisera cette structure; je n'ai jamais regardé, et peu importe d'ailleurs pour la construction qui va suivre. Partons en effet d'une catégorie triangulée C, et pour toute catégorie de Picard P, considérons les foncteurs $D : C_{is} \to P$, où C_{is} désigne la catégorie déduite de C en ne prenant comme flèches que les isomorphismes. On s'intéresse aux foncteurs qui sont "multiplicatifs", i.e. satisfont $D(X) \simeq D(X') \otimes D(X'')$ lorsque on a un triangle exact $X' \to X \to X'' \to X'$; plus précisément, pour tout triangle exact D comme dessus, on se donne un isomorphisme $\phi_D : D(X) \xrightarrow{\sim} D(X') \otimes D(X'')$, et on impose aux ϕ_D des conditions de compatibilité convenables. Ceci posé, il va y avoir un foncteur

multiplicatif universel

$$D: \ C \longrightarrow \underline{\underline{K}}(C) \quad ,$$

(universel étant pris ici au sens: à équivalence près, adapté au fait que l'argument P lui-même varie dans une 2-catégorie ....). On aura alors (par définition si tuveux)

$$K^0(C) = \pi_0(\underline{\underline{K}}(C)) \ , \quad K^1(C) = \pi_1(\underline{\underline{K}}(C)) \quad .$$

Le foncteur D joue le rôle que joue le foncteur dét(X) pour des faisceaux de complexes parfaits sur un espace commutativement annelé (dét(X) étant un faisceau inversible sur le même espace annelé). Lorsque C est la catégorie des ~~xxxxx~~ ~~xxxxxxxxx~~ complexes de modules parfaits sur un anneau A, on doit retrouver le groupe $K^1(A)$ de Whitehead-Bass, limite inductive des Gl(n,A) rendus abéliens. Dans ce cas, on a un objet privilégié A_s de C , définissant un objet privilégié $D(A_s)$ de $\underline{\underline{K}}(C)$. Si alors X est un complexe <u>libre</u> de type fini en chaque degré, avec une base <u>donnée</u>, on trouve un isomorphisme canonique ~~xxxxx~~ $D(A_s)$ $D(X)$, et si X' est un autre complexe avec une telle structure, et u:X X' un quasi-isomorphisme (ne respectant pas nécessairement les bases données), alors D(u): D(X) D(X') induit un <u>automorphisme</u> de $D(A_s)$, d'où un élément de $K^1(A)$, qui ~~est~~ par définition (Whitehead) est ~~xxx~~ 1 si et seulement si u est compatible avec les "types d'homotopie simple" de X,X' .

Dans le même ordre d'idées, j'ai un petit commentaire à faire sur ta définition des $Tr_i(C)$, C une catégorie additive. En effet, il me semble que ta définition des $Tr_i(C)$ est formelle à partir de la seule structure de 2-groupoïde (au sens de Gabriel) de la catégorie des complexes de C, où les 1-flèches sont les homomorphismes de complexes, les 2-flèches les homotopies entre de tels homomorphismes. Tu devrais donc pouvoir utiliser

FG-ILS SGAG.114

tels quels certains morceaux du tapis Gabriel. D'autre part, une circonstance qui frappe dans ta définition des homotopies, c'est que ce sont également des "homomorphismes <u>modulo</u> bords", i.e. bien que tu deviens plus précis en ne te contentant pas d'emblée à prendre les homomorphismes de complexes modulo bords i.e. modulo homotopie, et que tu raffines en tenant compte de la structure de 2-catégorie sous-jacente à la notion "modulo homotopie", tu ne raffines cependant que d'un cran en repoussant d'un cran le "modulo". Pour avoir un formalisme satisfaisant, il me semble pour cela, très plausible, qu'il faut tenir compte de la structure de ∞-catégorie pour les complexes de $\underline{C}$, dont les n-flèches se définissent de façon évidente en termes d'homomorphismes gradués de degré $\geq -n+1$. Cela permettrait peut-être d'obtenir une définition satisfaisante des K^i (qu'il faudra sans doute plutôt écrire K_i) en s'inspirant du tapis précédent.

Gabriel m'a envoyé une lettre d'invitation à transmettre à Roos. Je n'ai pas son adresse à Paris, mais je pense le voir mardi prochain.

Bien cordialement