FG-IL2 GIRAUD 69

Marly 13.6.1969

Cher Giraud,

Je me demande si tu as des lumières sur la question des obstructions aux relèvements infinitésimaux de schémas en groupes lisses, qui est traitée de façon peu satisfaisante dans SGA 3 II, faute notamment d'y disposer du langage des faisceaux et de leur cohomologie. Cela nous oblige à ne travailler qu'avec la cohomologie "de Hochschild" des schémas en groupes, ce qui signifie pratiquement qu'on travaille dans la catégorie de tous les préfaisceaux.

a) Soient S_o un schéma, S un voisinage infinitésimal d'ordre 1, de sorte que $S_o=V(\underline{J})$. Soient d'abord X et Y deux schémas sur S, avec Y lisse pour simplifier, et $u_o: X_o \longrightarrow Y_o$ un S_o-morphisme, qu'on se propose de relever. Travaillons dans le site fppf ou fpqc. Alors on construit canoniquement un torseur $P(u_o)$ sur X_o, de groupe $\underline{G}=u_o^*(\mathcal{G}_{Y_o/S_o})\otimes\underline{J}$, dont les sections correspondent aux relèvements de u_o en un homomorphisme $u: X \longrightarrow Y$. Lorsque Y_o est munie d'une structure de préschéma en groupes sur S_o, alors le Groupe structural s'interprète aussi comme l'image inverse de $\underline{L}=\underline{Lie}(Y_o/S_o)\otimes\underline{J}$ sur X_o. Lorsque X et Y sont tous deux munis de structures de préschémas en groupes et que u_o est un hom. de Groupes, alors $P(u_o)$ est muni d'une structure d'extension de Y_o par $\underline{Lie}(Y_o/S_o)\otimes\underline{J}$ $=\underline{L}$ (sur lequel $\underline{L}_o$ opère de la façon que tu sais), et si f est une section de $P(u_o)$ sur Y_o correspondant au prolongement u de u_o, u est un homomorphisme si et seulement si f est multiplicative i.e. un homomorphisme, i.e. un splittage de l'extension de groupes.

b) Partons maintenant d'un schéma lisse X_o sur S_o. Alors (pour un ouvert de Zariski variable de X_o) les relèvements lisse sur S forment une gerbe de lien le Groupe commutatif $\underline{G}=\mathcal{G}_{X_o/S_o}\otimes\underline{J}$, et à ce titre la caté

FG-IL2 GIRAUD 69

gorie des relèvements globaux lisses X de X_o est vide ou un " 2-torseur" sous la catégorie " 2-groupe " (ou "catégorie de Picard") TOR($\underline{G}$) des $\underline{G}$-torseurs; donc si X est un tel relèvement, la catégorie de tous les ~~extrm~~ relèvements est canoniquement (en termes de X) équivalente à la catégorie TOR($\underline{G}$). Si d'autre part X_o est un Groupe, donc $\underline{G} = \underline{L}_{X_o}$, où $\underline{L}$ = Lie(G) ~~et X est un relèvement des Groupes~~, alors il résulte de a) et de ce qui précède que la catégorie des relèvements ~~ex~~ de X_o en des Groupes lisses X sur S est vide ou un " 2-torseur " sous la catégorie ~~Extop($\underline{G}$,~~ EXTOP(X_o,$\underline{L}$) des extensions de X_o par $\underline{L}$ (sur lequel X_o opère de la façon connue), donc que pour tout~~e~~ relèvement X de X_o en un groupe lisse sur S, la catégorie des relèvements ~~lisses~~ de X_o en des groupes lisses sur S est canoniquement équivalente à la catégorie EXTOP(X_o,$\underline{L}$).

Tout ceci est de nature purement soritale (bien que cela ne semble pas avoir été fait proprement nulle part). Les choses sont moins claires malheureusement pour ce qui suit:

c) Le Groupe lisse X_o sur S_o étant donné, comment expliciter l'obstruction à ~~le~~ relever en un Groupe lisse X sur S? Dans SGA 3, on décompose le Pb en petits bouts:

1º) On définit une obstruction (c_1) dans $H^2(X_o,\underline{L}_{X_o})$ pour ~~prolonger~~ relever X_o en un schéma lisse sur S (sans autre structure) ("première obstruction"), et on <u>choisit</u> un tel relèvement à isomorphisme près, ce qui introduit une indétermination qui se trouve dans $H^1(X_o,\underline{L}_{X_o})$.

2º) On essaie de prolonger la multiplication $u_o: X_o x X_o \longrightarrow X_o$ en un morphisme (sans autre conditions) $u: XxX \longrightarrow X$. A priori, on trouve une obstruction dans $H^1(X_o x X_o, \underline{L}_{X_o x X_o})$. Si elle est non nulle, on essaie de la rendre nulle en corrigeant le relèvement choisi X par un élément de $H^1(X_o,\underline{L}_{X_o})$. Donc la vraie "deuxième obstruction" (c_2) se trouve

dans Coker $(H^1(X_o,\underline{L}) \xrightarrow{d} H^1(X_o x X_o,\underline{L}))$. Si et seulement si cette dernière est nulle, on peut relever à la fois X_o et u_o , et l'indétermination dans le relèvement conjoint de X_o n'est plus que dans Ker d $\subset H^1(X_o,\underline{L})$; d'autre part, pour X choisi, l'indétermination de u est dans $H^o(X_o x X_o,\underline{L})$. (NB Je laisse tomber l'indice X_o, ...au $\underline{L}$ $X_o x X_o$ quand je prends la cohomologie de ces schémas à coéfficients dans l'image inverse de $\underline{L}$.)

3º) X étant choisi comme dessus, on cherche à corriger u par un élément de $H^o(X_o x X_o,\underline{L})$ de façon que u soit une loi de composition associative, i.e. que le défaut d'associativité, qui a priori est un c $\in H^o(X_o x X_o x X_o,\underline{L})$, devienne nulle. On trouve donc une obstruction dans Coker $(H^o(X_o x X_o,\underline{L}) \xrightarrow{d'} H^o(X_o x X_o x X_o,\underline{L}))$, et comme c est un cocycle de Hochschild, cette obstruction peut s'interpréter comme un élément de $H^3_{op}(X_o,\underline{L})$, où l'indice op désigne la cohomologie de Hochschild: C'est le calcul de SGA 3 II. Cet élément n'est pas vraiment la "troisième obstruction" à une solution du problème de relèvement, car même si cet élément est non nul, on peut encore essayer de le rendre nul en corrigeant X, comme indiqué dans 2º, à l'aide d'un élément de Ker d $\subset H^1(X_o,\underline{L})$. Donc la vraie troisième obstruction c_3 est dans Coker (Ker d $\xrightarrow{d''} H^3_{op}(X_o,\underline{L})$) .

4º) De ce qui précède résulte que l'existence d'une solution X du Pb de relèvement équivaut à la nullité des trois obstructions successives c_1, c_2, c_3 que nous venons de décrire.

d) Tout ceci sent la suite spectrale à plein nez. Pour préciser ce point, considérons la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$H^{\cdot}(B_{X_o},\underline{L}) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p_{op}(X_o, \underline{H}^q(\underline{L})) ,$$

FG-iL2 GIRAUD 69

où $\underline{H}^q(\underline{L})$ désigne le préfaisceau $Z \mapsto H^q(Z,\underline{L})$ sur $C = \mathrm{Schp}\beta/S_o$, interprété comme un préfaisceau sur B_{X_o} grâce aux opérations de X_o sur $\underline{H}^q(\underline{L})$ provenant des opérations de X_o sur $\underline{L}$. Le suite spectrale en question est la suite spectrale de Leray d'un recouvrement, savoir de l'objet final de B_{X_o} par le torseur universel E_{X_o} ... Il peut être plus commode de partir du terme $E_1^{p,q}$,

$$E_1^{p,q} = H^q(X_o{}^p, \underline{L}) \quad .$$

La première idée serait que l'obstruction totale et unique pour prolonge se trouve dans $H^3(B_{X_o},\underline{L})$. Il faut modifier ce point de vue un peu, pour que la discussion précédente corresponde bien à la filtration d'un terme H^3 par la suite spectrale. On trouve que tout marcherait bien si on avait un invariant H^3 qui serait l'aboutissement d'une suite spectrale qui serait identique à la précédente, sauf qu'on y supprime la première colonne, formée des $E_1^{o,q}$. (Il faut faire le dessin !) Or il y a bien un tel invariant, que j'ai envie de noter

$$H^2(E_{X_o} \bmod B_{X_o}, \underline{L}) = H^2(S_o \bmod B_{X_o}, \underline{L}) \quad ,$$

s'insérant dans une suite exacte infinie

$$(*) \qquad \ldots \quad H^i(B_{X_o}) \to H^i(E_{X_o}) \to H^i(E_{X_o} \bmod B_{X_o}) \to H^{i+1}(B_{X_o}) \quad \ldots \quad ,$$

où j'ai laissé tomber les coéfficients.

De façon générale, soit $f: E \quad B$ un morphisme de topos, et soit $\underline{L}$ un faisceau abélien sur B. On a alors un homomorphisme dans la catégorie dérivée de (Ab)

$$R\Gamma_B(\underline{L}) \longrightarrow R\Gamma_E(\underline{L}) \quad ,$$

dont le cône sera noté $R\Gamma_{E/B}(\underline{L})$ ou $R\Gamma_{E \bmod B}(\underline{L})$, et les groupes de cohomologie d'icelui seront les $H^i(E/B,\underline{L})$ ou $H^i(E \bmod B, \underline{L})$. Lorsque l'image inverse d'un faisceau flasque sur B est un faisceau flasque sur E, par exemple si $f: E \to B$ est un étalement (par exemple dans le cas $E_{X_o} \to B_{X_o}$)

FG-IL2 GIRAUD 69

les $H^i(E/B,-)$ sont les foncteurs dérivés droits du foncteur $(\underline{L} \mapsto \mathrm{Coker}(H^0(B,\underline{L}) \to H^0(E,\underline{L}_E)))$, - foncteur qui en général n'est pas exact à droite, mais peu importe. Dans le cas où f est induit par un morphisme dans le topos B de but l'objet final (écrivons pour simplifier encore $f:B \to B$ pour ce morphisme), et si $f: E \to B$ est un épimorphisme, alors pour tout complexe injectif $I^\cdot$ sur B, dont le comp. simple associé, on peut considérer le double complexe $C^{\cdot\cdot}(E,I^\cdot)$, est isomorphe dans Dér(Ab) à $\Gamma_B(I^\cdot) = R\Gamma_B(I^\cdot)$, et on a une suite exacte

E ?

$$(*) \qquad 0 \to \underset{\substack{\| \text{ (défn)} \\ \mathrm{Ker}\, w}}{C^{\cdot\cdot}(E/B,I^\cdot)} \xrightarrow{v} \underset{\substack{\| \\ R\Gamma_B(I^\cdot)}}{C^{\cdot}(E/B,I^\cdot)} \xrightarrow{w} \underset{\substack{\| \\ R\Gamma_E(I_E^\cdot)}}{\Gamma_E(I_E^\cdot)} \to 0 \quad ,$$

et lorsque $I^\cdot$ est une résolution injective d'un $\underline{L}$, alors $C^{\cdot\cdot}(E/B,I^\cdot)$ a comme complexe simple associé $\Gamma_{E/B}(\underline{L})$, et la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte précédente n'est autre que la suite exacte du type (*) ci-dessus. D'autre part, le bicomplexe $C^{\cdot\cdot}$ donne naissance à une suite spectrale ayant comme aboutissement $H^\cdot(E/B,\underline{L})$, et dont le terme intitial E_1 est celui de la suite spectrale de Leray pour le recouvrement $f:E \to B$ (associée au bicomplexe $C^\cdot$), à cela près que l'on supprime la première colonne de ce dernier terme initial, et ajuste les degrés p en conséquence (en les diminuant de 1).

5º)Avec tout ce qui précède, il est difficile de douter qu'on ne puisse trouver une obstruction totale

$$\mathrm{obst}(X_o) \in H^2(S_o \bmod B_{X_o} \ , \ \underline{\mathrm{Lie}}(X_o) \otimes J) \ ,$$

dont l'annulation soit nécessaire et suffisante pour qu'il existe un Groupe lisse X sur S relevant X_o . Mais comment le définir ??? Je soumet la question au spécialiste du H^2 !

FG-ILZ GIRAUD 69

d) Regardons de plus près le cas des schémas en groupes commutatifs. On constate que si $u_o : X_o \longrightarrow Y_o$ est un homomorphisme de schémas en groupes, restrictions de schémas en groupes commutatifs X, Y, alors $P(u_o)$ est une extension commutative de X_o par $\underline{L} = \underline{\mathrm{Lie}}(Y_o) \otimes \underline{J}$, et par suite que pour un groupe lisse et commutatif X_o donné sur S_o, la catégorie de ses prolongements en des groupes lisses et commutatifs sur S est un 2-torseur sous la catégorie des extensions commutatives de X_o par $\underline{L} = \underline{\mathrm{Lie}}(X_o) \otimes \underline{J}$. En particulier, l'indétermination pour relever X_o lissement et commutativement est dans $\mathrm{Ext}^1(X_o, \underline{L})$. Ceci suggère que l'obstruction ~~xxxxxx~~ à l'existence d'un tel relèvement se trouve dans $\mathrm{Ext}^2(X_o, L_o)$. Quand on traite le problème "à la main" comme dans c) ci-dessus, on trouve en effet trois obstructions successives, qui s'interprètent en effet parfaitement en termes d'une suite spectrale que je connais aboutissant à $\mathrm{Ext}^{\bullet}(X_o, \underline{L})$ (du moins jusqu'en degré 2 ...), très analogue à celle envisagée dans c). D'ailleurs on a un homomorphisme de ∂-foncteurs en F (et mieux, dans une catégorie dérivée ...)

$$\mathrm{Ext}^i(X_o, F) \longrightarrow H^i(S_o \mathrm{mod} B_{X_o}, F) \quad ,$$

pour un Groupe abélien F variable, ~~xxx~~ associé à un homomorphisme des suites spectrales pertinentes, et il faudrait bien sûr que l'obstruction escomptée dans d) 5º) soit l'image de l'obstruction qu'on désire dans le $\mathrm{Ext}^2(X_o, F)$. Mais comment définir cette dernière ?

e) Pour terminer, je signale qu'on dispose, dans les question de prolongements infinitésimaux de structures diverses, d'une vingtaine de théories, correspondant aux cas divers qu'on a eu à utiliser jusqu'à présent. Dans tous ces cas, les résultats ont finalement exactement la même gueule. Je suis convaincu que si on choisit au hasard une vingtaine d'autres espèces de structure et qu'on en fasse ~~xxx~~ la théorie du prolon-

FG-ILZ GIRAUD 69

ment, on trouvera ~~ins~~ encore des énoncés exactement du même type. Il s'agit là de vérités d'expérience si concordantes, qu'il semble impossible qu'il n'y ait pas là-dessous de raisons générales, comme il semble clair aussi que pour trouver un dénominateur commun à ces situations, il faudra faire un travail tout à fait non trivial. Un yoga intéressant dans une voisine ~~est~~ développé par Quillen dans "Homotopical Algebra", (Lecture Notes 43, Springer), conduisant à des invariants du genre "complexe cotangent relatif" pour à peu près n'importe quel genre (?) de structure algébrique. Comme on sait le rôle joué par les complexes cotangents relatifs en théorie des déformations de structure, il y a une indication sérieuse qu'il conviendrait de creuser dans cette voie.

Cela n'empêche pas, d'ailleurs, d'essayer de trouver une description directe aussi simple et naive que possible des obstructions demandées dans c) et d) !

Bien cordialement

A.G.

FG-iL2 GIRAUD 69

13.6.69

Cher Giraud,

Ceci est un PS à ma lettre de tout à l'heure. Tout d'abord, un erratum p.5 ligne 2: supprimer " $H^o(E/B,-) =$ " .

A propos des invariants $H^i(S \bmod B_X, L)$ (je laisse tomber les indices o , et E est un groupe d'un topos quelconque, L un E-Module), note que $H^1(S \bmod B_X, L)$ n'est autre que l'ensemble des classes d'extensions de X par L (pour les opérations données de X sur L), et que $H^o(S \bmod B_X, L)$ est le groupe des automorphismes de l'extension triviale de X par L. La suite exacte (*) de page 4 a alors une interprétation géométrique, pour les degrés ≤ 2, que tu connais bien. Je me demande si l'introduction des invariants $H^i(S \bmod B_X$ ne devrait pas permettre de simplifier la présentation de tes calculs d'extensions de groupes. (Il est vrai que tu t'intéresses surtout au cas non commutatif.)

Du point de vue du problème de relèvement examiné dans c), les résultats attendus ont vraiement une gueule sympathique: les $H^i(S_o \bmod B_{X_o}, L)$ s'interprètent successivement, pour i=0,1,2, comme le groupe des automorphismes d'une solution du problème de relèvement (sous-entendu: automorphismes de X induisant l'identité sur X_o), le groupe des indéterminations pour les solutions possibles, enfin le groupe où se trouve l'obstruction pour l'existence d'une solution. Que demander de mieux !