Cristaux discontinus.

1. Suite des pro-modules

Lemme 1.1. Soient S un site, C un champ sur S, $\mathrm{pro}(C)$ la catégorie fibrée sur S de fibres les catégories $\mathrm{pro}(C(U))$, et $\mathrm{pro}^a C$ le champ engendré par $\mathrm{pro}\, C$. Si $U \in \mathrm{Ob}\, S$ est quasi-compact quasi-séparé, alors, pour $X, Y \in \mathrm{pro}\, C(U)$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\, C}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}^a C}(X, Y)$$

Il suffit de vérifier que, pour (U_i) recouvrement ouvert fini de U et $(U_{ij,k})$ recouvrement ouvert fini de $U_i \times_U U_j$, on a une suite exacte

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\, C(U)}(X, Y) \longrightarrow \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\, C(U_i)}(X, Y) \rightrightarrows \prod_{i,j,k} \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\, C(U_{ij,k})}(X, Y)$$

Pour le vérifier, on note que les $\varprojlim$ finies commutent aux $\varprojlim$ et aux $\varinjlim$ filtrantes.

Variante 1.2 Soient X un espace topologique localement compact, C un champ sur X, K un compact de X et $X, Y \in \mathrm{pro}\, C(K)$ (où $\mathrm{pro}\, C(K) \overset{\text{déf}}{=} \varinjlim_{U \supset K} \mathrm{pro}\, C(U)$)

On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}\, C(K)}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}^a C(K)}(X, Y)$$

....

Proposition 1.3. Soient X un espace topologique noethérien et C un champ sur X. On suppose que C est un champ en catégories abéliennes, que les foncteurs de restriction sont exacts et que

$(*)$ quels que soient $V \subset U$ dans X, $F \in \mathrm{Ob}\, C(U)$ et $G \subset F/V$, il existe un plus petit sous-objet G_1 de F tel que $G_1 | V \supset G$. Sa formation est de nature locale, et donc $G_1 | V = G$.

Alors, pro C est un champ sur X

Exemple : X schéma noethérien, C = faisceaux cohérents ou
C = faisceaux quasi-cohérents.

Preuve. Il reste à vérifier que les objets se recollent et, procédant par récurrence, il suffit de vérifier que pour U_1 et U_2 deux ouverts de X, $\underline{F}_i \in \text{pro } C(U_i)$, toute donnée de recollement $\underline{F}_1 | U_1 \cap U_2 \simeq \underline{F}_2 | U_1 \cap U_2$ est effective. Soit $\underline{F}_{1,2} = \underline{F}_i | U_1 \cap U_2$.

Soit donné deux flèches $\underline{F}_i \longrightarrow F_i$ $(i=1,2\ ;\ F_i \in C(U_i))$.

Il existe alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & & F_1|U_{1,2} \\ \underline{F}_{1,2} \arrow[urr] \arrow[r] \arrow[drr] & F_{1,2} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & F_2|U_{1,2} \end{tikzcd}$$

De plus, puisque $\underline{F}_{1,2} = \underline{F}_i | U_{1,2}$ on peut trouver un diag comm.

$$\begin{tikzcd} \underline{F}_i \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & F_i' \arrow[r, "\alpha_i"] & F_i \end{tikzcd} \quad (\text{sur } U_i)$$

donnant lieu à un diagramme commutatif sur $U_1 \cap U_2$

$$\begin{tikzcd} & F'_1 \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dr, "\beta_1"'] & & F_1 \\ \underline{F}_{1,2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & F_{1,2} \arrow[ur, "\gamma_1"'] \arrow[dr, "\gamma_2"] & \\ & F'_2 \arrow[rr, "\alpha_2"] \arrow[ur, "\beta_2"] & & F_2 \end{tikzcd}$$

Sur $U_1 \cap U_2$, on a $\mathrm{Ker}(\beta_i) \subset \mathrm{Ker}(\alpha_i)$. Soit K_i le plus grand sous objet de F'_i tel que $K_i | U_{1,2} = \mathrm{Ker}(\beta_i)$. On a $K_i \subset \mathrm{Ker}(\alpha_i)$, et, remplaçant F'_i par F'_i / K_i, on peut supposer que β_i est un monomorphisme. Soient $F'_{1,2} = \beta_1(F'_1) \cap \beta_2(F'_2)$, et F''_i le plus grand sous-objet de F'_i tel que $F''_i | U_{1,2} = \beta_i^{-1}(F'_{1,2})$. On dispose encore d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \underline{F}_i \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & F''_i \arrow[r] & F_i \end{tikzcd} \qquad (\text{sur } U_i)$$

$$\begin{tikzcd} & F''_1 | U_{1,2} \arrow[r] \arrow[dr, "\sim"'] & F_1 | U_{1,2} \\ \underline{F}_{1,2} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dr] & & F'_{1,2} \arrow[u] \arrow[d] \\ & F''_2 | U_{1,2} \arrow[r] \arrow[ur, "\sim"] & F_2 | U_{1,2} \end{tikzcd} \qquad (\text{sur } U_1 \cap U_2).$$

On peut alors recoller les F''_i selon $F'_{1,2}$ et obtenir R sur $U_1 \cup U_2$ et un diagramme

$$\underline{F}_1 \longrightarrow R | U_1 \longrightarrow F_1$$

$$\underline{F}_{1,2} \longrightarrow R | U_{1,2}$$

$$\underline{F}_2 \longrightarrow R | U_2 \longrightarrow F_2$$

Si maintenant $\underline{R}$ est le système projectif des objets R de $\mathcal{C}(U_1 \cup U_2)$ munis de flèches compatibles $\underline{F}_i \to R$,

on a $\underline{R} | U_i \sim \underline{F}_i$

et les F_i se recollent.

(1.4) J'aurai encore à utiliser les principaux résultats de l'appendice à Hartshorne, Residues and duality, pour lesquels je renvoie à loc. cit.

(1.5) Un cristal procohérent (sur X, schéma de type fini sur un corps k de car 0) est une section cartésienne, au dessus de la catégorie des épaississements de type fini d'ouverts de X, du champ des pro-objets ~~de la catégo~~ du champ des Modules cohérents.

(1.6) Si X est un schéma et F une partie localement fermée de X : $j : F \to X$, on dispose de foncteurs

$$\left\{ \begin{matrix} j^* \\ j_! \end{matrix} \right. \quad \text{des cristaux pro-cohérents sur } \begin{matrix} X \\ F \end{matrix} \quad \text{dans ceux sur } \begin{matrix} F \\ X \end{matrix}$$

et pour $U = X - F$, F fermé

$$U \xhookrightarrow{j} X \xhookleftarrow{i} F,$$

d'une suite exacte

$$0 \to j_! j^* \mathcal{C} \to \mathcal{C} \to i_* i^* \mathcal{C} \to 0 .$$

2. Le cas lisse et localement constant

(2.1) Rappelons que si X est un schéma lisse sur $\mathbb{C}$, il y a équivalence de catégorie entre

(i) les systèmes locaux complexes sur X^{top}

(ii) les fibrés vectoriels (alg) à connexion intégrable (alg) régulière sur

(iii) les cristaux en fibrés vectoriels sur X, définissant une connection intégrable régulière sur X

(2.2) Soit $h : X_{cris} \longrightarrow X_{zar}$ le ~~fp~~ morphisme de ~~sit~~ topos canonique, et

$$h^{an} : X^{an}_{cris} \longrightarrow X^{top}$$

l'analogue analytique. Les théorèmes fondamentaux (X lisse) sont

(a) Pour V fibré vectoriel ~~algébr~~ à connection intégrable sur X et $cr(V)$ le cristal correspondant, on a

$$R h_* (cr V) = \Omega^*_X (V)$$

(Grothendieck)

$$R h^{an}_* (cr V) = \Omega^*_{X^{an}} (V)$$

(b) Pour V régulier, $R\Gamma(X_{zar}, \Omega^*_X(V)) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X_{top}, \Omega^*_{X^{an}}(V))$

(c) Pour V système local complexe sur X_{top},

$$V \xrightarrow{\sim} R h^{an}_* (h^{an*} V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}) = \Omega^*(V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O})$$

(Poincaré)

3. Construction de certains procohérents. Enoncés

Soit X un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$.

Définition 3.1 Un faisceau algébriquement constructible complexe sur est un faisceau de $\mathbb{C}$-vectoriels F sur X_{top}, tel qu'il existe une partition $X = \bigcup X_i$ de X en un nombre fini de parties localement fermées (pour la topologie de Zariski) telles que $F | X_i$ soit un faisceau localement constant de $\mathbb{C}$-vectoriels de dimension finie.

On dira simplement ici "faisceau constructible"

Rmq : (a) Si F et G sont constructibles, alors $F \otimes G$, et les $\underline{Ext}^i_{\mathbb{C}}(F, G)$ sont constructibles

(b) Si $X \to S$ est un morphisme de schémas, alors

(b1) Si F est algébriquement constructible sur X, alors $R^if_* F$ et $R^if_! F$ sont algébriquement constructibles sur S

(b2) Si F est algébriquement constructible sur S, alors f^*F et les $R^if^!F$ sont algébriquement constructibles sur X.

(c) Si dans une suite exacte

$$F_1 \to F_2 \to F \to F^2 \to F^1$$

les F_i et F^i sont constructibles, alors F est constructible

Définition 3.2. Soient V un faisceau constructible sur X_{top} et $\mathcal{F}$ un faisceau algébrique ~~[illegible]~~ cohérent sur X. Un homomorphisme modéré de V dans $\mathcal{F}$ est un morphisme de faisceau $\varphi : V \longrightarrow \mathcal{F}^{an}$, tel que

(*) ~~Quelle que~~ Soit ~~Il existe~~ une partition $X = \bigcup Y_i$ de X en parties localement fermées pour la topologie de Zariski, ~~et localement fermés~~ lisses, ~~et~~ et telles que $V|Y_i$ soit localement constant. Soit V_i^* le cristal défini par $V|Y_i$ (2.1). Alors, pour tout voisinage infinitésimal $Y_{i,n}$ de Y_i dans X, l'homomorphisme

$$(V_i^*|Y_{i,n})^{an} \simeq V|Y_i \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{Y_{i,n}} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}^{an}|Y_{i,n}$$

est algébrique.

[On vérifie facilement l'indépendance de la partition]

(3.3) Soit V constructible sur X_{top}. Le foncteur

$$\mathcal{F} \longmapsto \mathrm{Hom\,mod}(V, \mathcal{F})$$

est proreprésentable, car exact à gauche

(pour le voir, noter que $\mathcal{F} \mapsto \text{"}\varprojlim_n\text{"}\, \mathcal{F}^{an}|Y_{i,n}$ ~~$\mathcal{S}$~~ est exact)

~~On pose~~ On définit le pro-module $\alpha(V)$ par la formule ~~est~~

$$\mathrm{Hom\,mod}(V, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_X(\alpha(V), \mathcal{F})$$

On a alors

~~[illegible]~~

Théorème 3.4: (i) Le foncteur $V \to cr(V)$ est exact et pleinement fidèle

(ii) Il commute aux images réciproques ; en particulier, $cr(V)$ est cristallin. Il commute aux "prolongement par zéro".

(iii) Il commute aux produits tensoriels.

~~(iv)~~ (iv) $cr(V)$ est une limite dénombrable, et est plat. → (6.1)

(3.5) Soit X un schéma lisse, et D un diviseur à croisement normaux sur X. Soit D_k l'ensemble des points de X où passent k branches de D ($0 \le k \le \dim X$). On dira que V est adapté à (X, D) si pour tout k, $V|D_k$ est localement constant.

(3.6) Le coeur de la démonstration sera dans l'étude du cas 3.5. ~~Voici quelq~~ qu'on effectuera au n° suivant. Voici quelques trivialités préliminaires.

(a) Le foncteur $V \to cr(V)$ commute aux images réciproques par une immersion fermée

(b) Le foncteur $V \to cr(V)$ commute au "prolongement par zéro", dans cas d'une immersion ouverte

case not smooth

(c) Si X_{red} est lisse et V localement constant on all X, alors $cr(V)$ est le cristal ~~défini par~~ en fibrés vectoriels défini par V (2.1)

(d) Soit ~~V~~ $i: Y \hookrightarrow X$ une partie fermée de X_{red} et V un faisceau constructible sur Y. Supposons que $cr(V)$ soit un cristal procohérent ~~sur~~ Y. Alors $cr(i_* V)$ est un cristal procohérent sur X et

Y not smooth

$$i_* cr(V) = cr(i_* V)$$

au sens des cristaux procohérents.

Suite dans n° 4 et 5

4. Construction de cristaux pro-cohérents ; cas standard.

4.1. Soient

$D = \{z \mid |z| < 1\}$ $\boxed{X = D^n}$

$Y_i = pr_i^{-1}(0)$ $(i \in [1,m],\ m \leq n)$ $Y = \bigcup Y_i$

$Y_Q = \bigcap_{i\in Q} Y_i$ ~~(i∈Q)~~ $(Q \subset [1,m]$ $(Y_Q \downarrow$ pour $Q\uparrow)$

$\left[Y_Q^\circ = Y_Q - \bigcup_{\substack{i\notin Q\\ i\leq m}} Y_i \right.$: $X \cup Y_i = \coprod_{Q\subset[1,m]} Y_Q^\circ$ (y compris $Q=\emptyset$)

$i_Q : Y_Q \hookrightarrow X$

$i_Q^\circ : Y_Q^\circ \hookrightarrow X$

$pr_Q : X \longrightarrow Y_Q$

$j_Q : X_Q \hookrightarrow X$

$\left\{ \begin{array}{l} X_Q = pr_Q^{-1}(Y_Q^\circ) = X - \bigcup_{i\notin Q} Y_i \\ pr_Q^\circ : X_Q \longrightarrow Y_Q^\circ \end{array} \right.$

4.2. Soit V un faisceau sur X adapté à Y. On dispose d'une ~~présentation~~ suite exacte

$$\underbrace{j_{P!}\, j_P^*\, pr_Q^{\circ *}\, i_Q^{\circ *} V}_{\mathrm{II}} \overset{\partial_0 - \partial_1}{\rightrightarrows} \underbrace{\sum_{Q\subset[1,m]} j_{Q!}\, pr_Q^{\circ *}\, i_Q^{\circ *} V}_{\mathrm{I}} \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

où les flèches sont laissées au lecteur.

Exemple : $n = m = 1$

(faisceau c^t V_0 sur D^*, prolongé par 0) $\longrightarrow$ $\left(\begin{array}{c} \text{faisceau } V, \text{ restreint à } D^*, \text{ prolongé par } 0 \\ + \\ \text{faisceau constant } V_0 \text{ sur } D \end{array} \right) \to V$

(on utilise que la fibre V_0 en 0 s'envoie dans la fibre en un p^t général.

4.2. Soit V un faisceau de $\mathbb{C}$-vectoriels sur X adapté à Y. On se propose de décrire une résolution de V par des sommes de faisceaux localement constants prolongés par zéro.

a) Pour $P \subset [1,m]$, soit V'_P ~~le faisceau sur X_P~~, l'unique faisceau localement constant sur X_P qui prolonge $V|Y^o_P$, et soit $V_P = j_{P!} V'_P$. Son existence et unicité provient de ce que

$$\pi_1(Y^o_P) \to \pi_1(X_P)$$

b) Pour $P \subset Q \subset [1,m]$ on dispose sur X_P d'un morphisme canonique $\varphi: V_Q \to V_P$. On dispose encore de $\varphi: V_P \to V$

c) V_P est foncteur exact en V

Proposition 4.3. Pour chaque application croissante σ ~~$\Delta_i = [0,i]$~~ σ de $\Delta_i = [0,i]$ dans l'ensemble des parties de $[1,m]$, soit $V'_\sigma = V_{\sigma(i)} | X_{\sigma(0)}$ et soit $V_\sigma = [V'_\sigma$ prolongé par zéro$]$. Pour toute application croissante $\varphi: \Delta_i \to \Delta_j$, on dispose de

$$\varphi^*: V_\sigma \longrightarrow V_{\sigma\circ\varphi},$$

d'où un complexe semi-simplicial augmenté vers V de composants

(4.3.i) $$V(i) = \sum_{Hom_{\leq}(\Delta_i, \mathcal{P}(E))} V_\sigma$$

$$\sum_{P\subset Q\subset R} j_{P!} j_P^* V_R \rightrightarrows \sum_{P\subset Q} j_{P!} j_P^* V_Q \longrightarrow \sum V_P \longrightarrow V$$

Ce complexe est une $\boxed{\text{résolution}}$ de V

Les composants dudit complexe sont foncteur exact en V : il suffit donc de traiter le cas où V est localement constant $\neq 0$ sur Y^o_P, prolongé par zéro.

V_Q est alors nul pour ~~...~~ $Q \neq P$, et le complexe est nul en dehors de X_P.

En ~~...~~ $x \in Y^o_Q$, $Q \subset P$, on a $((V_\sigma)_x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma(i) = P$ et $\sigma(0) \supset Q)$

En $Q = P$, seul $V_P \neq 0$, et OK. Pour $Q \neq P$, il y a lieu de considérer le [complexe] ... de l'ensemble ordonné $\mathcal{P}(P - Q)$ modulo l'ouvert complément de $\{P\}$: 0.

V localement constant

$Y \subset X$ NCD, $j_! V$

4.3 Soit X une variété analytique, Y un diviseur à croisements normaux dans X, et V un faisceau localement $\mathbb{C}^{\,\cdot}$ V sur $X-Y$, prolongé par 0 sur X. ($j_! V$) $\qquad j : X-Y \to X$

Soit V^* le fibré vectoriel sur X de sections les sections de $j_* j^* V \otimes \mathcal{O}$ ayant une croissance au plus en $O(\log(d(x,Y))^k)$ près de Y (prolongement canonique de $V \otimes \mathcal{O} \,|\, X-Y$)

Soit $\alpha_k(V) = I^k . V^*$, où I est l'idéal qui définit Y. On notera que $\alpha_k(V)$ est exact en V

4.4 Les faisceaux I et II de 4.2 sont sommes de faisceaux du type considéré en 4.3. On étend la définition 4.3 par additivité à de tels faisceaux ; α_k reste fonctoriel

Lemme 4.6. Le complexe des $\alpha_k(V(i))$ est acyclique en dimension $i \neq 0$.

Preuve Puisque $\alpha_k(V(i))$ dépend de façon exacte de $V(i)$, on se ramène par dévissage au cas où V est localement constant de rang 1 sur $\overset{\circ}{Y}_P$, prolongé par zéro. Soit $\mathcal{L}'$ le prolongement canonique de $V \otimes \mathcal{O}$ sur Y_Q, I l'idéal qui définit $Y_P - \overset{\circ}{Y}_P$, $\mathcal{L}'' = I^k \mathcal{L}$, et $\mathcal{L}$ l'image réciproque de $\mathcal{L}''$ sur X. ~~On a~~ ~~V~~ par pr_P. Si J_A ($A \subset [1,m]$) est l'idéal qui définit $\bigcup_{i \in A} Y_i$, on a, pour $\sigma : \Delta_i \to \mathcal{P}([1,m])$)

$$V_\sigma = \begin{cases} 0 & : \sigma(i) \neq P \\ \mathcal{L} . J^k_{P-\sigma(0)} & : \sigma(i) = P \end{cases}$$

Reste à considérer le complexe de composante

$$W^i = \sum_{\mathrm{Hom}(\Delta_i,\, \mathcal{P}(P))} J^k_{P-\sigma(0)}$$

~~Ecrivons~~ $\mathcal{T}(P)$ le ensemble semi-simplicial $\mathrm{Hom}(\Delta_i, \mathcal{T}(P))$ est le complexe singulier du complexe ordonné $(\Delta_1)^P$. On a

$W^* \sim \bigotimes_{i \in P}$ (semi-simplicial défini par $J_i \to \mathcal{O}$

homotopie $\sim \bigotimes (J_i \to \mathcal{O})$

quasi-iso $\sim \bigotimes \mathcal{O}/J_i$ en degré 0

d'où le lemme.

Proposition 4.7 Il est d'une et d'une seule façon possible d'associer à chaque V ~~comme plus haut~~ adapté à (X, Y) un module analytique cohérent $\alpha_k(V)$ de telle sorte que
(a) on prolonge la définition 4.4
(b) exactitude

Preuve. D'après 4.3, on doit poser
$$\alpha_k(V) = \alpha_k(V(0)) / \alpha_k(V(1)).$$
L'exactitude résulte de l'exactitude en V de $\alpha_k V(\cdot)$ et de 4.6.

~~Proposition 4.8~~

4.8. Soit X une variété analytique lisse et Y un diviseur à croisements normaux. Pour tout V sur X adapté à Y, la définition 4.7 de $\alpha_k(V)$ se globalise et fournit un faisceau analytique cohérent sur X. Les $\alpha_k(V)$ forment un système projectif, et on dispose d'un système projectif d'applications modérées de V dans $\alpha_k(V)$. On a

Proposition 4.9 (a) Si $f: V \to \mathcal{F}$ est une application modérée, il existe pour tout compact K de X un entier k tel que f se factorise par $\alpha_k(V)$ sur K.
$f \in \mathrm{Hom}_{\text{mod}}(V, \mathcal{F})$

4

(b) Si deux applications $f_1, f_2 : cr_k(V) \longrightarrow \mathcal{F}$ induisent le même morphisme de V dans $\mathcal{F}$, il existe pour tout compact K de X un entier $\ell \geq k$ tel que $f_1 \,|\, cr_\ell(V) = f_2 \,|\, cr_\ell(V)$

La question est locale sur X

reduce to the case when Y

Revenant aux définitions on se ramène au cas où V est

to loc. constant on an open set, extended to zero

localement C^t sur un ouvert, prolongé par zéro, et on utilise 3.6 (b) + (c)

p vrai

$\bar{X}$ lisse $\quad X \hookrightarrow \bar{X}$

Corollaire

4.10. Soient X une ~~variété algébrique~~ schéma séparé lisse de type fini sur $\mathbb{C}$ et Y un diviseur à croisements normaux. Soit $\bar{X}$ une compactification de X telle que $Y' = Y \cup (\bar{X} - X)$ soit un diviseur à croisements normaux. Si V sur X est adapté à Y, alors $j_! V$ sur $\bar{X}$ est adapté à Y'. Puisque $\bar{X}$ est propre, par GAGA, on dispose de $cr_k(j_! V)$ sur $\bar{X}$, et on pose

$$cr_k(V) = cr_k(j_! V) \,|\, X$$

On tire de 4.9 que

Proposition 4.11 a) $cr_k(V)$ est compatible à la localisation

b) $cr_k(V)$ est compatible à l'image inverse par un morphisme lisse

c) $\varinjlim_k \mathrm{Hom}(cr_k(V), \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom\,mod}(V, \mathcal{F})$

d) $cr_k(V)$, et donc "$\varprojlim$" $cr_k(V)$ sont exacts en V

De b) + c) + (3.6 c), on peut déduire que $cr(V) = $ "$\varprojlim$" $cr_k(V)$ est un cristal procohérent sur X.

5. Construction de cristaux pro cohérents. Cas général.

5.1. Soit $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ une suite exacte de faisceaux constructible sur X. Il résulte de la définition que la suite

$$a(V') \to a(V) \to a(V'') \to 0$$

est exacte. Pour prouver que a est exacte, il suffit donc de prouver que si

$$\alpha \quad V_1 \hookrightarrow V_2$$

est un monomorphisme, alors $a(\alpha)$ est monomorphisme. Ceci signifie que quel que soit l'homomorphisme modéré

$$f_1 : V_1 \to \mathcal{F}_1 ,$$

il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d, "f_1"'] & V_2 \arrow[d, "f_2"] \\ \mathcal{F}_1 \arrow[r, hook, "\beta"] & \mathcal{F}_2 \end{tikzcd}$$

avec f_2 modéré et β monomorphisme.

Soit $u : X' \xrightarrow{\text{smooth}} X$ un morphisme ~~projectif~~ projectif ~~[illegible]~~, de source lisse, tel qu'il existe un diviseur à croisements normaux Y auquel ~~[illegible]~~ $u^* V_1$ et $u^* V_2$ soient adaptés. Choisissons une factorisation

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{P}^2_X \arrow[dl] \\ X & \end{tikzcd}$$

soit X'_n le n ième voisinage inf de X' dans $\mathbb{P}^2_X$. Pour n assez grand, on a $\underline{\mathcal{F}_1 \hookrightarrow u_* u^* \mathcal{F}_1}$. D'autre part, d'après le n°6;

On a sur X'_n

$$\alpha_{X'_n}(u^*V_1) \hookrightarrow \alpha_{X'_n}(u^*V_2)$$

de sorte qu'il existe $\mathcal{F}'_2$ sur X'_n et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
u^*V_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & u^*V_2 \arrow[d, "f'_2"] \\
u^*\mathcal{F}_1 \arrow[r, hook, "\beta'"] & \mathcal{F}'_2
\end{tikzcd}$$

avec f'_2 modéré et β' injectif. On en déduit par image directe

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & V_2 \arrow[ddd] \\
\mathcal{F}_1 \arrow[d, "\wr"] & \\
& \\
u_*u^*\mathcal{F}_1 \arrow[r, hook] & u_*\mathcal{F}'_2
\end{tikzcd}$$

et ceci résoud le problème posé :

→ $\boxed{\alpha \text{ est exact}}$

5.2. Pour prouver que (dans cet ordre) $\alpha(V)$ est plat, fait une limite alors que α commute aux images réciproques, ~~et une limite [illegible]~~ et que α commute aux produits tensoriels, on se ramène par dévissage au cas où V est localement constant ~~prolongé par 0~~ sur un sous-schéma lisse, prolongé par 0, cas justifié de **3.6 (c)+(d)**.

5.3. Il reste à prouver la pleine fidélité ~~[illegible]~~ 3.5 (i). Je renvoie [illegible] plus tard (   ), me contentant ici de noter que le problème est local sur X, qu'on peut donc supposer plongé dans Z lisse (voire supposer lisse).

6. Cohomologie de De Rham

6.1. Un module pro-cohérent $\mathcal{F}$ est dit plat si pour toute suite exacte $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$, ~~la suite~~ de modules cohérents

$$0 \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_3 \to 0$$

est exacte [ex : $\alpha(V)$]

Un cristal pro-cohérent est dit plat si ~~[illegible]~~ les modules pro-cohérents qu'il définit sont plats

6.2. Soit Z un schéma lisse, et $\mathcal{V}$ un cristal pro-cohérent plat sur Z. On dispose alors d'un pro-complexe d'opérateurs différentiels du 1er ordre

$$\Omega^*_Z(\mathcal{V})$$

ayant un analogue analytique

$$\Omega^{*\,an}_Z(\mathcal{V})$$

Définition 6.3. Soit $\mathcal{V}$ un cristal pro-cohérent sur un schéma X. On dit que $\mathcal{V}$ est constructible s'il existe une partition finie de X en sous-schémas (lisses) (localement fermés) ~~tels que $\mathcal{V}|$~~ , $X = \coprod X_\alpha$, tels que $\mathcal{V} | X_\alpha$ soit le cristal défini par un fibré vectoriel à connection intégrable régulière sur X_α

out $\boxed{\text{Exemple 6.4.}}$ Si V est un système local sur X, alors $\alpha(V)$ est un cristal pro-cohérent constructible sur X, ainsi qu'on le voit par dévissage

Rmq (a) constructible est stable par extension

(b) constructible $\Rightarrow$ plat.

Théorème 6.5 Soit $\mathcal{V}$ un cristal pro-cohérent constructible sur un schéma lisse Z.

(i) $\mathbb{H}(Z, \Omega^*(\mathcal{V})) \longrightarrow \mathbb{H}(Z^{an}, \Omega^{*\,an}(\mathcal{V}))$

est un isomorphisme de pro-objets

(ii) $\underline{H}^i(\Omega^{*\,an}(\mathcal{V})) = \begin{cases} 0 & \text{pour } i > 0 \\ \text{un faisceau constructible} & \text{pour } i = 0 \end{cases}$ en tant que pro-objet de la catégorie des faisceaux sur X

Grâce à 1.6 (Appendice à Hartshorne), on se ramène par dévissage au cas où il existe un sous-schéma lisse localement fermé X de Z et un module à connection intégrable régulier $\mathcal{F}$ sur X tel que $\mathcal{V}$ soit le "prolongement par zéro" du cristal correspondant. $J_!\, cr(V)$

Par 1.5, on se ramène à supposer que $\overline{X}$ est lisse (résolution des singularités de $\overline{X}$ plongé ds X) et $\overline{X} - X$ un ~~Par un nouveau dévissage et récurrence sur la~~ diviseur à croisement normaux.

Les constructions de la lettre à Atiyah permettent alors d'achever sans grandes difficultés la démonstration.

~~Cor 6.6 Les foncteurs~~

~~$\mathcal{V} \longrightarrow cr(V)$~~

~~$\mathcal{V} \longrightarrow H^0(\Omega^*$~~

by dévissage means that: $j: X - Y \hookrightarrow X \overset{i}{\hookleftarrow} Y$

$0 \to j_! j^* \mathcal{V} \to \mathcal{V} \to i_* i^* \mathcal{V} \to 0$

$\rightsquigarrow$ filtration of $\mathcal{V}$ connected with $i: Y \hookrightarrow X$

Corollaire 6.6 Soient X un schéma et $j : X \hookrightarrow Z$ un plongement X dans Z lisse. Alors, les foncteurs

$$\begin{cases} V \longrightarrow \alpha(V) \\ \mathcal{V} \longrightarrow \underline{H}^0(\Omega^*_Z(j_!\mathcal{V})) \end{cases}$$

sont des équivalences de catégorie inverses l'une de l'autre entre ~~systèmes locaux sur X et~~ faisceaux algébriquement constructibles sur $\underline{X_{cl}}$ et cristaux pro-cohérents constructibles sur X

Dém : a) α est exact

b) $\underline{H}^0(\Omega^*_Z(j_!\mathcal{V}))$ est exact

c) on a $V \to \underline{H}^0(\Omega^*_Z(j_!\,\alpha(V)))$

$\alpha(\underline{H}^0(\Omega^*_Z(j_!\mathcal{V}))) \longrightarrow \mathcal{V}$

$\to$ dévissage, et ces flèches sont des isomorphismes.

[6.5 / 6.6 est un peu bref, j'avoue]

~~Corollaire 6.7 On a des isomorphismes de pro-objet, pour X c... et Φ ensemble des f~~ ~~invariance~~

~~$H^*(X_{cl}, V) \xrightarrow{\sim} (X^a$~~

Corollaire 6.7 Soit $j : X \hookrightarrow Z$ un plongement de X dans Z lisse séparé et soit Φ l'ensemble des fermés de X_{cl} fermés dans Z. On a des isomorphismes de pro-objet

$$H^*_\Phi(X, V) \xrightarrow{\sim} H^*(X^{an}, \Omega^{*an}_Z(j_!\,\alpha V)) \xleftarrow{\sim} H^*(X, \Omega^*_Z(j_!\,\alpha V))$$

supporto dentro i chiusi di X

Im Katz [illegible] ... But only [illegible] of vector bundles [illegible]

Corollaire 6.8 Soit X un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$.

(a) équivalence de catégorie entre systèmes locaux (complexes) sur X et cristaux en fibrés vectoriels constructibles sur X

(b) Soient les morphismes de topos

$$
\begin{tikzcd}
X^{an}_{cris} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "h^{an}"] & X_{cris} \arrow[d, "h"] \\
X_{cl} \arrow[r, "\varepsilon"] & X_{zar}
\end{tikzcd}
$$

Alors

1. Pour V système local sur X_{cl}, on a
$$V \xrightarrow{\sim} Rh^{an}_{*}(h^{an*}V \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O})$$
(lemme de Poincaré cristallin)

2. Pour $\mathcal{V}$ cristal correspondant, on a
$$H^*(X_{cl}, V) \xrightarrow{\sim} H(X^{an}_{cris}, \mathcal{V}^{an}) \xleftarrow{\sim} H(X_{cris}, \mathcal{V})$$

3. Pour $i : X \hookrightarrow Z$ immersion fermée dans Z lisse, on a
$$Rh_*\mathcal{V} = \Omega^*_{Z/X^\wedge}(\mathcal{V})$$
$$Rh^{an}_*\mathcal{V} = \Omega^{*an}_{Z/X^\wedge}(\mathcal{V}^{an})$$

$$
\begin{tikzcd}
H(X_{cl}, V) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "\sim", "\text{cf } 6.6"'] & H(X^{an}_{cris}, \mathcal{V}) \arrow[d, equal, "\text{(cf Coats-Jumla)}"] & & H(X_{cris}, \mathcal{V}) \arrow[ll, "\sim"'] \arrow[d, equal, "\text{(cf Coats Jumi}"] \\
& H(X_{cl}, \Omega^{*an}_{Z/X^\wedge}(\mathcal{V}^{an})) & & H(X_{zar}, \Omega^*_{Z/X^\wedge}(\mathcal{V})) \arrow[ll, "\text{cf } 6.5", "\sim"']
\end{tikzcd}
$$

A Grothendieck [illegible] raised by I. Coates and O. Jumla [illegible]

$$= \varprojlim \Omega^i_{Z_n}(V)$$

pour Z_n $n^{\text{ième}}$ voisinage de X dans Z

En bref, j'avoue encore ; trop bref à peine pour avoir une idée.