GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *Corps de classes local géométrique relatif.* Note (*) de **Carlos E. Contou-Carrère,** présentée par Henri Cartan.

Soit A un anneau. Posons :

$$\mathscr{X} = \operatorname{Spec} A[[T]] \quad \text{et} \quad \mathscr{U} = \operatorname{Spec} A[[T]][T^{-1}].$$

On construit un A-schéma en groupes $\mathscr{J}^0$ et un morphisme $\varphi^0 : \mathscr{U} \to \mathscr{J}^0$ tels que pour A noethérien, la flèche :

$$\operatorname{Hom}_{A-gr}(\mathscr{J}^0, A) \to G(\mathscr{U})/G(\mathscr{X}),$$

induite par composition avec φ^0 est une bijection pour tout A-schéma en groupes G, lisse et séparé.

For any ring A, *we put:*

$$\mathscr{X} = \operatorname{Spec} A[[T]] \quad \textit{and} \quad \mathscr{U} = \operatorname{Spec} A[[T]][T^{-1}].$$

We construct group scheme $\mathscr{J}^0$ *on* A *and a morphism* $\varphi^0 : \mathscr{U} \to \mathscr{J}^0$ *such that if* A *is noetherian the map:*

$$\operatorname{Hom}_{A-gr}(\mathscr{J}^0, G) \to G(\mathscr{U})/G(\mathscr{X}),$$

induced by composition with φ^0 *is a bijection for any smooth and separated group scheme* G *on* A.

0. Introduction. — Le S-groupe $J^{\cdot}$ de [1] est une extension de de $Pic_{\hat{X}/S}$ par un S-groupe représentable, quotient par $\mathbf{G}_m$ d'un S-groupe $\mathscr{J}^0$ de nature locale autour de T [*cf.* (1.3), *loc. cit.*]. On étudie ici une propriété universelle de $\mathscr{J}^0$ si S est affine et noethérien et si T est image d'une section de $\hat{X}$ au-dessus de S.

1. Préliminaires et énoncé du théorème. — (*a*) Soient A un anneau commutatif, B une A-algèbre adique augmentée vers A et isomorphe à A[[T]]; on pose :

$$I = \operatorname{Ker}(B \to A) \quad \text{et} \quad S = \operatorname{Spec} A.$$

Si U est un générateur de I, soit $B^* = B[U^{-1}]$ (B^* est indépendante du choix de U).

Pour toute A-algèbre A′, soient :

$$\mathscr{X}_{\{A'\}} = \operatorname{Spec} A' \hat{\otimes}_A B, \qquad \mathscr{X}^{(n)}_{\{A'\}} = \operatorname{Spec} A' \hat{\otimes}_A B/I^{(n+1)}, \tag{1.1}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $\mathscr{U}_{\{A'\}} = \operatorname{Spec}(A' \hat{\otimes}_A B)^*$. On écrit $\mathscr{X}$ pour $\mathscr{X}_{\{A\}}$, etc.

On définit des A-faisceaux f. p. q. c. en groupes :

$$\begin{cases} \mathscr{I}(A') = \mathbf{G}_m(\mathscr{U}_{\{A'\}}), \qquad \mathscr{J}^0(A') = \mathbf{G}_m(\mathscr{X}_{\{A'\}}), \\ \mathscr{J}^0_n(A') = \mathbf{G}_m(\mathscr{X}^{(n)}_{\{A'\}}). \end{cases} \tag{1.2}$$

On a les décompositions canoniques $\mathscr{J}^0 = \mathbf{G}_m \times \Lambda^0$ et $\mathscr{J}^0_n = \mathbf{G}_m \times \Lambda^0_n$, où Λ^0 (resp. Λ^0_n) est isomorphe au groupe multiplicatif des séries formelles (resp. séries formelles tronquées à l'ordre $n+1$) de terme constant 1.

Le choix de U permet d'envoyer $\mathbf{Z}_A$ dans $\mathscr{I}$; soit $\mathscr{J}$ (*jacobienne locale* de B) le sous A-faisceau en groupes de $\mathscr{I}$ engendré par $\mathbf{Z}_A$ et $\mathscr{J}^0$; le choix de U donne un isomorphisme $\mathscr{J} \simeq \mathscr{J}^0 \times \mathbf{Z}_A$, on a aussi une suite exacte $0 \to \mathscr{J}^0 \to \mathscr{J} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z}_A \to 0$ qui ne dépend que de I.

Pour toute section ν de $\mathbf{Z}_A$ on pose $\mathscr{J}^\nu = \varepsilon^{-1}(\nu)$. Pour tout A-groupe G, soient :

$$\begin{cases} G(\mathscr{X})^+ = \operatorname{Ker}(G(\mathscr{X}) \to G(S)), \\ F(G) = G(\mathscr{U})/\operatorname{Im} G(\mathscr{X}), \\ F^+(G) = G(\mathscr{U})/\operatorname{Im} G(\mathscr{X})^+. \end{cases} \tag{1.3}$$

On pose :

$$t = U \otimes 1 \in B^* \hat{\underset{A}{\otimes}} B, \qquad T = 1 \otimes U \in B^* \hat{\underset{A}{\otimes}} B$$

$$\varphi_U^0 = (t-T)^{-1} \in \mathscr{J}^0(B^*) \quad \text{et} \quad \varphi_U^1 = T.(t-T)^{-1} \in \mathscr{J}^1(B^*).$$

La classe $\bar{\varphi}^0$ (resp. $\bar{\varphi}^1$) de φ_U^0 (resp. φ_U^1) dans $F(\mathscr{J}^0)$ [resp. $F^+(\mathscr{J})$] est indépendante de U; $\bar{\varphi}^0$ et $\bar{\varphi}^1$ induisent respectivement par composition des applications :

$$(1.4) \qquad \mathrm{Hom}_{A-gr}(\mathscr{J}^0, G) \xrightarrow{\rho} F(G), \qquad \mathrm{Hom}(\mathscr{J}, G) \xrightarrow{\rho^+} F^+(G).$$

THÉORÈME (1.5). – *Si* A *est noetherien et si* G *est un* A-*schéma en groupes commutatif, lisse et séparé,* ρ *et* ρ^+ *sont des bijections.*

2. INJECTIVITÉ DE ρ (RESP. ρ^+) POUR A QUELCONQUE. – (*a*) Soit $B_{(0)}$ (resp. $B_{(\infty)}$) la A-algèbre adique des sections globales du complété formel de $\mathbf{P}_A^1$ le long de 0 (resp. ∞); on notera $\mathscr{J}_{(0)}$ (resp. $\mathscr{J}_{(\infty)}$) la jacobienne locale de $B_{(0)}$ (resp. $B_{(\infty)}$), $\mathscr{X}_{(0)} = \mathrm{Spec}\, B_{(0)}$, etc., $(J_{(\infty)}\, \Phi_{(\infty)})$, [resp. $(J_{(0)}\, \Phi_{(0)})$, (J, Φ)] la jacobienne de $\mathbf{P}_A^1/\{\infty\}$ (resp. $\mathbf{P}_A^1/\{0\}$, $\mathbf{P}_A^1/\{0, \infty\}$) (*cf.* [1]).

(*b*) *Liens entre jacobiennes locales et globales.* – $\mathscr{J}_{(0)}^0 \times \mathscr{J}_{(0)}^0$ s'envoie dans J sur le noyau de l'augmentation $J \to \mathbf{Z}_A$ (*cf.* [1]). L'inclusion $\mathbf{P}_A^1/\{0, \infty\} \hookrightarrow \mathbf{P}_A^1/\{0\}$ fournit la suite exacte :

$$(2.1) \qquad 0 \to \mathscr{J}_{(0)}^0 \to J \to J_{(\infty)} \to 0$$

(universalité de J, *cf.* [1]). On choisit une fois pour toutes un générateur U de $I_{(0)} \subset B_{(0)}$ induit par une fonction méromorphe relative R de $\mathbf{P}_A^1$ ayant des pôles le long de ∞ seulement, et on écrit φ^0 pour φ_U^0, etc. Comme $\varphi^1 \in \mathscr{J}_{(0)}(\mathscr{U}_{(0)})$ se prolonge à $\mathbf{P}_A^1/\{0, \infty\}$, la propriété universelle de J donne la suite exacte :

$$(2.2) \qquad 0 \to \Lambda_{(\infty)}^0 \to J \xrightarrow{p} \mathscr{J}_{(0)} \to 0.$$

LEMME (2.3). – (*a*) *Si* G *est un* A *schéma en groupes commutatif, lisse et séparé, alors les applications* ρ *et* ρ^+ *sont injectives.*

(*b*) *Si l'énoncé* (1.5) *est vrai après extension fidèlement plate de* A, $A \to A'$ *alors il est vrai pour* A.

Résulte de (2.1) et de (2.2).

LEMME (2.4). – (*a*) *Le morphisme* $\prod^{n+2} \mathscr{U} \xrightarrow{\prod^{n+2} \varphi_U^0} \mathscr{J}_n^0$ *induit par* φ_U^0 *et le produit de* $\mathscr{J}_n^0$ *est fidèlement plat.*

(*b*) *Si* A *est intègre* (*resp. réduit*) $\prod^{n+2} \mathscr{U}$ *est intègre* (*resp. réduit*).

(2.5) On note $\mathbf{P}_A^1/\{0, \infty\} \xrightarrow{\theta_n} \mathbf{P}_A^1/\{0, \infty\}$ le morphisme fini et plat donné par $R \to R^n$ et $\mathscr{U}_{(0)} \xrightarrow{\theta_n} \mathscr{U}_{(0)}$ le morphisme induit par restriction. On a :

$$\mathrm{tr}_{\theta_n}\, \varphi^0 = (-1)^{n+1}(t-T^n)^{-1}$$

et :

$$\mathrm{tr}_{\theta_n}\, \varphi^1 = (-1)^{n+1}(t-T^n)^{-1}\, T^n$$

3. PREUVE DE (1.5) SI A EST UN CORPS. – On pose $A = k$. Résulte du dévissage d'un k-groupe G (*cf.* [5] et [6]), du fait que $\mathrm{Ext}^1(\Lambda^0, G_a) = 0$ si k est parfait et de la formule :

$$\mathrm{Rés}\,(F(T)\, d(t-T)/(t-T)) \equiv F(t) \qquad (\mathrm{mod}\ G_a(\mathscr{U})^+),$$

si $F(T) \in k[[T]][T^{-1}]$.

LEMME (3.1). — *Si* A *est un corps et si* $\alpha \in G(\mathscr{U})$ *il existe un entier* $n>0$ *tel que :*

$$\mathrm{tr}_{\theta_{n'}} \alpha \equiv \mathrm{tr}_{\theta_{n''}}(\alpha) \qquad [\mathrm{mod}\ G(\mathscr{X})],$$

si $n', n'' \geqq n$ *et si* n', n'' *sont impairs.*

4. RÉDUCTION DE LA PREUVE DE (1.5) AU CAS OU A EST RÉDUIT.

PROPOSITION (4.1). — *Soit* A *un anneau noéthérien tel que :*

(*i*) *Pour tout idéal* q *égal à son radical les flèches* ρ *et* ρ^+ *de* (1.5) *obtenues à partir de* A/q *sont des bijections.*

(*ii*) *Il existe un idéal* $I \subset A$ *avec* $I^2=0$ *tel que les flèches* ρ *et* ρ^+ *de* (1.5) *obtenues à partir de* A/I *sont des bijections.*

Alors les flèches ρ *et* ρ^+ *de* (1.5) *obtenues à partir de* A *sont des bijections.*

(*a*) Si A est local on notera k son corps résiduel et si A est intègre K son corps de fractions.

(*b*) Si A est local complet on note $\mathrm{Sch}|_A \xrightarrow{\wedge} \mathrm{Schf}|_A$ le foncteur de complétion formelle au-dessus de Spec k. Si X est un A-schéma on pose :

$$X^{(\nu)} = \mathrm{Spec}\ A/m_A^{(\nu)} \times_A X.$$

(*c*) Si A est local et complet étant donné $\alpha \in G(\mathscr{U})$ on peut construire une factorisation $\hat{\alpha} = f \circ \hat{\varphi}^0$, $f \in \mathrm{Hom}_{A-gr}(\hat{\mathscr{J}}^0, \hat{G})$, quitte à remplacer α par $\alpha.\delta$, où $\delta \in G(\mathscr{X})$ [*cf.* (4.2)].

5. PREUVE DE (1.5) SI A EST UN ANNEAU DE VALUATION DISCRÈTE COMPLET. — On reprend la notation de 2 et l'on écrit $\mathscr{U}$ pour $\mathscr{U}_{(0)}$, $\mathscr{X}$ pour $\mathscr{X}_{(0)}$, etc. Pour tout $\alpha \in G(\mathscr{U})$ de la forme :

$$\alpha = h \circ \varphi^1, \qquad h \in \mathrm{Hom}_{A-gr}(\mathscr{J}, G),$$

soit :

$$\bar{\alpha} = h \circ p \circ \Phi \in G(\mathbf{P}^1/\{0, \infty\}).$$

LEMME (5.1). — *Si* $\alpha \in G(\mathscr{U})$ *et si* $\alpha_{\{K\}} \in G(\mathscr{X}_{\{K\}})$ *alors* $\alpha \in G(\mathscr{X})$.

La preuve de (5.1) est une adaptation schématique de celle de [3], page 27.

Si $\alpha \in G(\mathscr{U})$ les propriétés fonctorielles de $\mathrm{tr}_{\theta_n} \alpha$ (*cf.* [4]), le (3.1) et le (5.1) donnent le :

LEMME (5.2). — *Si* $\alpha \in G(\mathscr{U})$ *il existe* $n \in \mathbf{N}$ *tel que :*

$$\mathrm{tr}_{\theta_{n'}} \alpha (\mathrm{tr}_{\theta_{n''}} \alpha)^{-1} \in G(\mathscr{X}).$$

si $n', n'' > n$ *sont impairs.*

LEMME (5.3). — *Soit* $\alpha \in G(\mathscr{U})$ *avec* $\hat{\alpha} = f \circ \hat{\varphi}^0$ [*cf.* (*c*) *de* 4] *où* $f \in \mathrm{Hom}_{A-gr}(\Pi^0, \hat{G})$, *il existe* $n \in \mathbf{N}$ *tel que* $\mathrm{tr}_{\theta_{n'}} \alpha = \mathrm{tr}_{\theta_{n''}} \alpha$ *si* $n', n'' > n$ *sont impairs.*

Esquisse de preuve. — Par (5.2), la restriction à $\mathscr{U}^{(\nu)}$ [resp. $\mathscr{U}^{(\nu)}_{(\infty)}$] de la section de G au-dessus de $(\mathbf{P}^1/\{0, \infty\})^{(\nu)}$ donnée par :

$$\mathrm{tr}_{\theta_{n'}} \overline{(\alpha^{(\nu)})} (\mathrm{tr}_{\theta_{n''}} \overline{(\alpha^{(\nu)})})^{-1},$$

est un élément de $G(\mathscr{X}^{(\nu)})$ [resp. $G(\mathscr{X}^{(\nu)}_{(\infty)})$]. Donc elle est constante. Comme elle se factorise par $(\mathscr{J}^0)^{(\nu)}$ on conclut qu'elle est égale à $1_{G^{(\nu)}}$. On en déduit :

$$\mathrm{tr}_{\theta_{n'}} \bar{\alpha} = \mathrm{tr}_{\theta_{n''}} \bar{\alpha},$$

et *a fortiori* $\mathrm{tr}_{\theta_{n'}} \alpha = \mathrm{tr}_{\theta_{n''}} \alpha$.

LEMME (5.4). – *Avec les hypothèses et les notations de* (5.3) :

(*a*) *Le* A-*morphisme formel :*

$$^m\alpha : \quad \hat{\mathscr{U}} \to \hat{\mathscr{J}}^0 \to \hat{\mathbf{G}}_m \xrightarrow{f|\hat{\mathbf{G}}_m} \hat{\mathrm{G}},$$

est « algébrisable ».

(*b*) $f|\hat{\mathbf{G}}_m$ *est « algébrisable ».*

Esquisse de preuve. – Soit n comme dans (5.3) et $l>n$ un entier impair. Si $\nu \in \mathbf{N}$ il existe $n(\nu) \in \mathbf{N}$ pair tel que $f^{(\nu)}$ se factorise par $(\mathscr{J}^0)^{(\nu)} \to (\mathscr{J}^0_{n(\nu)})^{(\nu)}$ le (5.3) et le (2.5) donnent :

$$(\mathrm{tr}_{\theta_l}\, \alpha)^{(\nu)} = \mathrm{tr}_{n(\nu)+1}\ \alpha^{(\nu)} = {}^m\alpha^{(\nu)};$$

donc $\widehat{(\mathrm{tr}_{\theta_l}\, \alpha)} = {}^m\alpha$.

(*b*) Résulte de (*a*).

(5.5) *Étapes de la preuve de* (1.5). – (*a*) Par (5.4) on peut supposer que $\alpha \in \mathrm{G}(\mathscr{U})$ vérifie $\hat{\alpha} = f \circ \hat{\varphi}^1$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A-gr}}(\hat{\mathscr{J}}, \hat{\mathrm{G}})$ et $\mathrm{Ker}\, f \supset \hat{\mathbf{G}}_m$. Ceci entraîne que :

$$\bar{\alpha} = \{\overline{(\alpha^{(\nu)})}\}_\nu : \quad \widehat{(\mathbf{P}^1/\{0, \infty\})} \to \hat{\mathrm{G}} \text{ se prolonge à } \widehat{(\mathbf{P}^1/\{0\})}.$$

(*b*) Comme $\bar{\alpha}|\hat{\mathscr{U}} = \hat{\alpha}$, on a que $\bar{\alpha}$ n'a qu'une « singularité algébrique » le long de 0, il en résulte que la fibre rigide analytique $\bar{\alpha}^h$ de $\bar{\alpha}$ est « algébrisable ». Donc il existe un K-morphisme :

$$\mathbf{P}^1_{\mathrm{K}}/\{0\} \xrightarrow{\bar{a}_{\mathrm{K}}} \mathrm{G}_{\mathrm{K}} \qquad \text{avec} \quad \bar{a}_{\mathrm{K}}|\mathscr{U}_{\mathrm{K}} = \alpha_{\mathrm{K}}.$$

(*c*) La théorie globale (*cf.* [1]) appliquée à $\bar{a}_{\mathrm{K}}$ fournit une factorisation :

$$\alpha_{\mathrm{K}} = \psi_{\mathrm{K}} \circ \varphi^0_{\mathrm{K}}, \qquad \psi_{\mathrm{K}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K-gr}}(\mathscr{J}^0_{\mathrm{K}}, \mathrm{G}_{\mathrm{K}}).$$

(*d*) Par une descente f.p.q.c. basée sur (2.4), (*a*), on conclut à l'existence de $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A-gr}}(\mathscr{J}^0, \mathrm{G})$ tel que $\alpha = \psi \circ \varphi^0$.

6. PREUVE DE (1.5) DANS LE CAS GÉNÉRAL. – Par 4.on peut supposer A réduit ensuite local, intègre et complet par (2.4), (*a*). Si A est local, intègre et complet il existe un anneau de valuation discrète complet V qui domine A (*cf.* [2]) et on ramène la preuve de (1.5) au cas 5.

(*) Remise le 5 janvier 1981, acceptée après révision le 2 février 1981.

[1] C. E. CONTOU-CARRÈRE, *Comptes rendus*, 289, série A, 1979, p. 306.
[2] A. GROTHENDIECK et J. A. DIEUDONNÉ, *E.G.A.*, Springer-Verlag.
[3] A. WEIL, *Variétés abéliennes*, Hermann, Paris.

Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
Institut de Mathématiques, place Eugène-Bataillon, 34060 *Montpellier Cedex.*