LES TRAVAUX DE ALEXANDER GROTHENDIECK

JEAN DIEUDONNÉ

Alexandre Grothendieck n'a pas 40 ans, et déjà l'ampleur de son œuvre et l'étendue de son influence sur les mathématiques contemporaines sont telles qu'il n'est pas possible d'en donner autre chose qu'une idée très déformée dans un aussi bref exposé.

Chacun sait que Grothendieck est le principal artisan de la rénovation de la Géométrie algébrique qui s'accomplit sous nos yeux. Bien entendu, cette rénovation a été préparée par les travaux de Weil-Zariski d'une part, fondant la Géométrie algébrique « abstraite » sur un corps quelconque, et d'autre part par ceux de Serre, introduisant dans la théorie les puissants outils que sont les faisceaux et l'algèbre homologique. Mais Grothendieck a su donner à ces idées toute leur portée en les développant sous leur forme générale, débarrassées des restrictions parasites qui en gênaient l'emploi ; et il y a ajouté de nombreuses idées entièrement originales.

Sous sa forme « affine », la Géométrie algébrique moderne se confond avec l'algèbre commutative ; déjà en Géométrie algébrique classique, à une variété affine était associé l'anneau des fonctions « régulières » sur la variété. Inversement, on fait maintenant correspondre biunivoquement à un anneau commutatif *quelconque* A (ayant un élément unité) un objet géométrique, le « schéma affine d'anneau A », qui est l'ensemble des idéaux premiers de A, muni d'une certaine topologie et d'un faisceau dont les fibres sont les anneaux locaux aux idéaux premiers de A. L'intérêt de cette formulation est : 1° de fournir une intuition géométrique qui est un guide très appréciable (en suggérant par exemple des analogies, avec les variétés différentiables ou analytiques) ; 2° de dépasser le point de vue « affine » pour aboutir à l'idée de « schémas » généraux (généralisant les «variétés abstraites» de Weil) par le simple procédé topologique de «recollement» des espaces topologiques munis de faisceaux (idée due à Serre).

Ce cadre est complété par deux idées nouvelles: 1° l'accent mis sur la notion de *morphisme*, qui, dans le cas affine, correspond à celle d'homomorphisme d'anneaux conservant l'élément unité, et qui permet de «relativiser» toutes les notions de la théorie classique; 2° la notion générale de «*changement de base*: étant donné un morphisme $X \to S$, pour tout morphisme «changement de base» $S' \to S$, on forme canoniquement un nouveau schéma $X' = X_{(S')}$

et un nouveau morphisme $X' \to S'$ par un procédé qui, dans le cas affine, correspond au produit tensoriel des anneaux, et englobe la classique «extension du corps de base» de la période Weil-Zariski.

Ces notions, ainsi que celle de *platitude* (due à Serre, mais dont Grothendieck a considérablement développé l'emploi) sont à la base d'une technique d'une puissance et d'une souplesse remarquables. Parmi les nombreux outils ainsi forgés, citons notamment:

I) Le passage à la *limite projective* dans les schémas, qui permet dans beaucoup de cas de ramener les problèmes au cas où les anneaux que l'on considère sont des algèbres de type fini sur **Z** (concrétisant ainsi la célèbre thèse kroneckérienne).

II) La théorie des anneaux *excellents*, qui systématise et complète des résultats profonds de Zariski-Nagata sur les anneaux locaux nœthériens, et peut être utilisée dans les problèmes généraux grâce au passage à la limite projective, les **Z**-algèbres de type fini étant des anneaux excellents.

III) La théorie de la *cohomologie relative* dans les schémas et de ses relations avec la notion de profondeur (due à Auslander-Buchsbaum et Serre).

IV) La théorie des *schémas formels* : ce sont ici des *limites inductives* de schémas, opération qui, dans le cas affine, correspond à la complétion des anneaux locaux, mais a une portée plus générale; elle permet par exemple, dans certaines questions, de ramener un problème en caractéristique $p > 0$ à un problème en caractéristique 0; c'est dans ce cadre aussi que se formule la théorie des «fonctions holomorphes» de Zariski (mise d'ailleurs sous une forme cohomologique beaucoup plus générale).

V) L'utilisation de la notion de *foncteur représentable*, qui remplace celle, plus limitée, de «problème universel»; il s'agit, étant donné un ensemble E attaché à un morphisme $X \to S$, d'une façon «compatible» avec les changements de base, de savoir s'il existe un schéma Z sur S tel que E s'identifie de façon naturelle à l'ensemble des *sections* du morphisme $Z \to S$.

VI) La théorie de la *descente*. De nombreux problèmes se simplifient lorsqu'on fait un «changement de base» approprié (par exemple, en Géométrie algébrique classique, lorsqu'on passe du corps de base à une clôture algébrique de ce corps). Il s'agit de pouvoir revenir à la situation initiale et y tirer des conséquences de ce qui se passe après le changement de base; c'est le but de la théorie de la «descente», qui fournit des critères permettant ce retour dans des cas assez généraux pour avoir de nombreuses applications.

VII) Poussant cette idée plus loin, Grothendieck a généralisé de façon très originale la notion de topologie et la cohomologie des faisceaux sur un espace topologique (théorie des « sites » et des « topos ») : le rôle joué par les ouverts d'un espace topologique est tenu par des morphismes $X' \to X$ d'un type spécial, le plus souvent les morphismes *étales* (analogues des « revêtements non ramifiés » d'un ouvert d'une variété analytique).

Avant d'aller plus loin, il convient de remarquer qu'on ne rend pas justice aux théories précédentes en les qualifiant un peu dédaigneusement de « résultats techniques » ; pour certains d'entre eux, il s'agit bien d'extensions faciles de méthodes classiques, mais beaucoup nécessitent des méthodes d'attaque toutes nouvelles, s'appuyant sur des considérations subtiles d'algèbre commutative ou d'algèbre homologique, et à eux seuls constitueraient déjà une œuvre imposante et dont il est peu d'exemples.

Il est bien vrai cependant que, dans l'esprit même de Grothendieck, toutes ces méthodes ne sont pas développées pour elles-mêmes, mais en vue d'attaquer quelques problèmes fondamentaux de la Géométrie algébrique. Parmi ceux où il a réalisé (en partie avec la collaboration de ses élèves) des progrès sensibles, il faut citer :

1° La détermination, en caractéristique $p > 0$, de la partie première à p du groupe fondamental d'une courbe algébrique.

2° Les définitions du schéma formel de « modules » (classes de schémas isomorphes), du schéma de Picard (classes de diviseurs), du schéma de Hilbert (ensemble de sous-variétés d'une variété donnée, dont la structure de schéma est destinée à se substituer aux classiques « coordonnées de Chow »).

3° (En collaboration avec M. Demazure.) Une vaste théorie des « schémas en groupes », généralisant la théorie des groupes algébriques de Chevalley.

4° (En collaboration avec M. Artin et J. Verdier.) La définition de la « cohomologie étale » des schémas, où, grâce à la théorie des « sites », on dispose déjà en toute caractéristique de méthodes et résultats analogues à ceux que fournit la topologie algébrique pour les variétés algébriques sur le corps des complexes (théorèmes de finitude et de dualité, formule de Lefschetz, comparaison avec la cohomologie « topologique » dans le cas classique) ; grâce à ces résultats, Grothendieck a pu démontrer une partie des fameuses « conjectures de Weil » : rationalité des fonctions L attachées aux variétés sur un corps fini, et leur expression à l'aide d'invariants homologiques.

5° Enfin, le premier en date des travaux de Grothendieck en Géométrie algébrique, la généralisation du théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch et sa démonstration purement algébrique en toute caractéristique. C'est à cette occasion que Grothendieck a introduit les premières notions de « K-théorie » (ou, comme on dit maintenant, les « groupes (ou anneaux) de Grothendieck »). Cette idée a beaucoup frappé notamment les topologistes et les algébristes, qui en ont tiré, dans de multiples domaines, les brillantes applications que l'on sait.

Il convient d'ailleurs de signaler aussi les travaux de Grothendieck en algèbre homologique, un peu antérieurs à sa démonstration du théorème de Riemann-Roch, et qui ont élargi et assoupli les résultats de Cartan-Eilenberg, notamment en donnant une « bonne » définition de la cohomologie des faisceaux sur un espace quelconque.

Enfin, je n'ai rien dit des premiers mémoires de Grothendieck sur les espaces vectoriels topologiques (1950-55), en partie parce qu'ils sont fort connus et de plus en plus utilisés en Analyse fonctionnelle, notamment la théorie des espaces nucléaires, qui « explique » les phénomènes rencontrés dans la théorie des distributions. J'ai eu personnellement le privilège d'assister de près, à cette époque, à l'éclosion du talent de cet extraordinaire « débutant » qui à 20 ans était déjà un maître ; et, avec 10 ans de recul, je considère toujours que l'oeuvre de Grothendieck de cette période reste, avec celle de Banach, celle qui a le plus fortement marqué cette partie des mathématiques.

S'il fallait chercher une parenté spirituelle à Grothendieck, c'est à Hilbert, me semble-t-il, qu'on pourrait le mieux le comparer : comme Hilbert, sa devise pourrait être : « simplifier en généralisant », en recherchant les ressorts profonds des phénomènes mathématiques ; mais, comme Hilbert aussi, lorsque cette analyse en profondeur a conduit à un point où seule l'attaque de front reste possible, il trouve presque toujours dans sa riche imagination le bélier qui enfonce l'obstacle. La comparaison est peut-être lourde à porter, mais Grothendieck est de taille à n'en pas être accablé.