RÉDACTION N° 327

COTE : PCR 026

TITRE : Extrait du multiplodoque Grothendieck
§ 4 Anneaux adiques

FONDS PIERRE CARTIER

NOMBRE DE PAGES : 12

NOMBRE DE FEUILLES : 12

PCR 026 2

n° 327

EXTRAIT du MULTIPLODOQUE GROTHENDIECK

§ 4 Anneaux adiques.

1. Anneaux admissibles.

Rappelons que si A est un anneau topologique, on dit que A est linéairement topologisé s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 dans A formé d'idéaux. Rappelons aussi que dans un anneau topologique A (non nécessairement séparé) un élément x est dit topologiquement nilpotent si 0 est une limite de la suite $(x^n)_{n \geqslant 0}$

Définition 1. - Dans un anneau linéairement topologisé A, on dit qu'un idéal J est un idéal de définition si J est ouvert et si, pour tout voisinage V de 0, il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $J^n \subset V$ (ce qu'on exprime, par abus de langage, en disant que la suite (J^n) tend vers 0). On dit qu'un anneau linéairement topologisé A est préadmissible s'il existe dans A un idéal de définition ; on dit que A est admissible s'il est préadmissible, et si en outre il est séparé et complet.

Lemme 1. - Soit A un anneau linéairement topologisé.

(i) Pour que $x \in A$ soit topologiquement nilpotent, il faut et il suffit que pour tout idéal ouvert J de A, l'image canonique de x dans A/J soit nilpotente. L'ensemble T des éléments topologiquement nilpotents de A est un idéal.

(ii) Supposons en outre A préadmissible, et soit J un idéal de définition de A. Pour que $x \in A$ soit topologiquement nilpotent, il faut et il suffit que son image canonique dans $A/\underline{J}$ soit nilpotente ; l'idéal $\underline{T}$ est l'image réciproque de la racine de 0 (ou nilradical) dans $A/\underline{J}$.

(i) découle aussitôt des définitions. Pour prouver (ii), il suffit de remarquer que pour tout voisinage V de 0 dans A, il existe $n \geqslant 0$ tel que $\underline{J}^n \subset V$; si $x \in A$ est tel que $x^m \in \underline{J}$, on a $x^{mn} \in V$, donc x est topologiquement nilpotent.

Proposition 1. - Soient A un anneau préadmissible, $\underline{J}$ un idéal de définition de A.

(i) Pour qu'un idéal ouvert $\underline{J}'$ de A soit un idéal de définition, il faut et il suffit qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $\underline{J}'^n \subset \underline{J}$.

(ii) Pour qu'un $x \in A$ soit contenu dans un idéal de définition, il faut et il suffit qu'il soit topologiquement nilpotent.

(i) Si $\underline{J}'^n \subset \underline{J}$, pour tout voisinage ouvert V de 0 dans A, il existe m tel que $\underline{J}^m \subset V$, d'où $\underline{J}'^{mn} \subset V$.

(ii) La condition est évidemment nécessaire ; elle est suffisante, car si elle est remplie, $\underline{J}' = \underline{J} + Ax$ est un idéal de définition, car il est ouvert et si $x^n \in \underline{J}$, on a $\underline{J}'^n \subset \underline{J}$.

Corollaire 1. - Les notations et hypothèses étant celles de la prop. 1 les propriétés suivantes d'un idéal $\underline{J}'$ de A sont équivalentes :

a) $\underline{J}'$ est le plus grand idéal de définition de A.

b) $\underline{J}'$ est un idéal de définition maximal.

c) $\underline{J}'$ est un idéal de définition tel que $A/\underline{J}'$ soit réduit (i.e. n'a pas d'élément nilpotent).

. PCR 026 4

Pour qu'il existe un idéal $\mathfrak{J}'$ *ayant ces propriétés, il faut et il suffit que le nilradical de* $A/\mathfrak{J}$ *soit nilpotent ;* $\mathfrak{J}'$ *est alors égal à l'idéal* $\mathfrak{T}$ *des éléments topologiquement nilpotents de* A .

Il est clair que a) implique b) , et b) implique c) en vertu de la prop. 1 (ii) ; pour la même raison, compte tenu du lemme 1 (ii), la prop. 1 (ii) montre que c) entraîne a). La dernière assertion résulte de la prop. 1 (i) et du lemme 1 (ii).

Lorsque $\mathfrak{T}/\mathfrak{J}$, nilradical de $A/\mathfrak{J}$, est nilpotent, on note A_{red} l'anneau quotient (réduit) $A/\mathfrak{T}$.

Corollaire 2. - *Si l'anneau préadmissible* A *est tel que pour un idéal de définition* $\mathfrak{J}$, *les puissances* $\mathfrak{J}^n$ ($n \geqslant 0$) *forment un système fondamental de voisinages de* 0 , *il en est de même des puissances* $\mathfrak{J}'^n$ *de tout idéal de définition de* A .

Définition 2. - *On dit qu'un anneau préadmissible* A *est préadique s'il existe un idéal de définition* $\mathfrak{J}$ *de* A *tel que les* $\mathfrak{J}^n$ *forment un système fondamental de voisinages de* 0 *dans* A . *On appelle anneau adique un anneau préadique séparé et complet.*

Si $\mathfrak{J}$ est un idéal de définition d'un anneau préadique (resp. adique) A, on dit encore que A est un anneau $\mathfrak{J}$-*préadique* (resp. $\mathfrak{J}$-*adique*) et que sa topologie est la topologie $\mathfrak{J}$-*préadique* (resp. $\mathfrak{J}$-*adique*). Plus généralement, si M est un A-module, la topologie sur M ayant pour système fondamental de voisinages de 0 les sous-modules $\mathfrak{J}^n M$ est dite topologie $\mathfrak{J}$-*préadique* (resp. $\mathfrak{J}$-*adique*). En vertu du cor. 2 de la prop. 1, ces topologies sont indépendantes de l'idéal de définition J considéré.

Proposition 2. - *Soient* A *un anneau admissible,* $\mathfrak{J}$ *un idéal de dé-*

finition de A . Alors $\underline{J}$ est contenu dans le radical de A .

On sait (   ) que cet énoncé est équivalent à un quelconque des corollaires suivants.

Corollaire 1. - Pour tout $x \in \underline{J}$, $1 + x$ est inversible dans A.

Corollaire 2. - Pour que $f \in A$ soit inversible dans A, il faut et il suffit que son image canonique dans $A/\underline{J}$ soit inversible dans $A/\underline{J}$.

Corollaire 3. - Pour tout A-module M de type fini, la relation $M = \underline{J}M$ (équivalente à $M \otimes_A A/\underline{J} = 0$) entraîne $M = 0$

Corollaire 4. - Soit $u : M \longrightarrow N$ un homomorphisme de A-modules, N étant de type fini : pour que u soit surjectif, il faut et il suffit que $u \otimes 1 : M \otimes_A A/\underline{J} \longrightarrow N \otimes_A A/\underline{J}$ le soit.

Pour démontrer la prop. 2, il suffit donc de prouver son cor. 1 ; or comme A est séparé et complet et que la suite $(\underline{J}^n)$ tend vers 0 , il est immédiat que la série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ est convergente dans A, et si y est sa somme, on a $y(1 + x) = 1$, d'où le cor. 1.

2. Anneaux adiques et limites projectives.

Toute limite projective d'anneaux discrets est évidemment un anneau linéairement topologisé, séparé et complet. Inversement, soit A un anneau linéairement topologisé, et soit $(\underline{I}_\lambda)$ un système fondamental filtrant (pour $\supset$) de voisinages ouverts de 0 dans A formée d'idéaux. Les applications canoniques $\varphi_\lambda : A \longrightarrow A/\underline{I}_\lambda$ définissent alors une représentation continue $\varphi : A \longrightarrow \varprojlim A/\underline{I}_\lambda$; si A est séparé, φ est un isomorphisme topologique de A sur le sous-anneau partout dense

. PCR 026 6

$\varphi(A)$ de $\varprojlim A/\underline{I}_\lambda$; si en outre A est complet, φ est un isomorphisme topologique de A sur $\varprojlim A/\underline{I}_\lambda$.

Lemme 2. - Pour qu'un anneau linéairement topologisé soit admissible, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à une limite projective $A = (\varprojlim A_\lambda$, où $(A_\lambda, u_{\lambda\mu})$ est un système projectif d'anneaux discrets ayant pour ensemble d'indices un ensemble ordonné filtrant L (pour $\leqslant$) admettant un plus petit élément noté 0, et satisfaisant aux conditions suivantes :

a) les $u_\lambda : A \longrightarrow A_\lambda$ sont surjectifs ;

b) le noyau de $u_o : A \longrightarrow A_o$ est nilpotent.

Compte tenu des remarques qui précèdent, cela exprime la déf. 1 (en remplaçant les $\underline{I}_\lambda$ par $\underline{J} \cap \underline{I}_\lambda$, où $\underline{J}$ est un idéal de définition, et prenant $\underline{J} = \underline{I}_o$).

Soient A un anneau topologique admissible, $\underline{J}$ un idéal de définition de A ; on peut considérer sur A la topologie d'anneau ayant pour système fondamental de voisinages de 0 les puissances $\underline{J}^n$ $(n \geqslant 0)$ nous l'appellerons encore topologie $\underline{J}$-préadique. L'hypothèse que A est admissible entraîne que $\bigcap_n \underline{J}^n = (0)$, donc la topologie $\underline{J}$-préadique sur A est séparée ; soit $A = \varprojlim A/\underline{J}^n$ le complété de A pour la topologie $\underline{J}$-préadique, et désignons par u l'homomorphisme d'anneaux (non nécessairement continu) $A \longrightarrow \hat{A}$ défini par les homomorphisme $u_n : A \longrightarrow A/\underline{J}^n$. D'autre part, la topologie $\underline{J}$-préadique sur A est plus fine que la topologie donnée sur A ; comme A est séparé et complet pour cette dernière, on peut prolonger par continuité l'application identique de A (muni de la topologie $\underline{J}$-préadique) dans A (muni de la topologie donnée) ; cela donne par suite une représentation continue $v : \hat{A} \longrightarrow A$.

<u>Proposition 3.</u> - <u>Si</u> A <u>est un anneau topologique admissible, les homomorphismes d'anneaux</u> $u : A \to \hat{A}$ <u>et</u> $v : \hat{A} \to A$ <u>sont bijectifs et réciproques l'un de l'autre.</u>

Il résulte en effet des définitions que $v \circ u$ est l'application identique de A ; d'autre part, $u_n \circ v : \hat{A} \longrightarrow A/\underline{J}^n$ est le prolongement par continuité (pour la topologie $\underline{J}$-adique) de l'application canonique $u_n : A \longrightarrow A/\underline{J}^n$, autrement dit c'est l'application canonique de $\varprojlim_k A/\underline{J}^k$ sur $A/\underline{J}^n$; $u \circ v$ est la limite projective de cette suite d'homomorphismes, et par suite est l'application identique de $\hat{A}$.

<u>Corollaire 1.</u> - <u>Sous les hypothèses de la prop. 3, les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

(i) <u>l'homomorphisme</u> u <u>est continu</u> ;

(ii) <u>l'homomorphisme</u> v <u>est bicontinu</u> ;

(iii) A <u>est un anneau adique</u>.

<u>Corollaire 2.</u> - <u>Soient</u> A <u>un anneau topologique admissible,</u> $\underline{J}$ <u>un idéal de définition de</u> A. <u>Pour que</u> A <u>soit noethérien, il faut et il suffit que</u> $A/\underline{J}$ <u>soit noethérien et que</u> $\underline{J}/\underline{J}^2$ <u>soit un</u> $(A/\underline{J})$-<u>module de type fini</u>.

Ces conditions sont évidemment nécessaires. Inversement supposons-le remplies ; comme A est complet pour la topologie $\underline{J}$-préadique en vertu de la prop. 3, pour qu'il soit noethérien, il faut et il suffit que l'anneau gradué associé $\mathrm{grad}^{\underline{J}}(A)$ le soit (   ). Or si $a_1, \ldots, a_n$ sont des éléments de $\underline{J}$ dont les classes sont des générateurs de $\underline{J}/\underline{J}^2$ en tant que $A/\underline{J}$-module, il est immédiat par récurrence que les classes mod. $\underline{J}^{n+1}$

des monômes de degré m en les a_i forment un système de générateurs du $(A/\underline{J})$-module $\underline{J}^m/\underline{J}^{m+1}$. Autrement dit, grad(A) est un anneau isomorphe à un quotient de $(A/\underline{J})[T_1,\ldots,T_n]$ (T_i indéterminées), ce qui achève la démonstration.

<u>Proposition 4.</u> - <u>Soit</u> (A_i, u_{ij}) <u>un système projectif d'anneaux discrets</u> ($i \in \underline{N}$), <u>et pour tout</u> i, <u>soit</u> $\underline{J}_i$ <u>le noyau dans</u> A_i <u>de l'homomorphisme</u> $u_{oi} : A_i \to A_o$. <u>On suppose que</u> :

a) <u>pour</u> $i \leqslant j$, u_{ij} <u>est surjectif et son noyau est</u> $\underline{J}_j^{i+1}$

(donc A_i est isomorphe à $A_j/\underline{J}_j^{i+1}$) ;

b) $\underline{J}_1/\underline{J}_1^2$ est un module de type fini sur $A_1/\underline{J}_1 = A_o$.

<u>Soit</u> $A = \varprojlim A_i$, <u>et pour tout</u> n, <u>soient</u> u_n <u>l'homomorphisme canonique</u> $A \to A_n$, $\underline{J}^{(n)} \subset A$ son noyau. Dans ces conditions :

(i) <u>A est un anneau adique ayant pour idéal de définition</u> $\underline{J} = \underline{J}^{(o)}$;

(ii) <u>on a</u> $\underline{J}^{(n)} = \underline{J}^{n+1}$ <u>pour tout</u> $n > 0$;

(iii) $\underline{J}/\underline{J}^2$ <u>est isomorphe à</u> $\underline{J}_1/\underline{J}_1^2 = \underline{J}_1$, <u>et est par suite un module de type fini sur</u> $A_o = A/\underline{J}$

Il est clair que A est par définition un anneau linéairement topologisé, et comme l'hypothèse a) entraîne que $\underline{J}_j^{j+1} = (0)$, A est un anneau admissible (lemme 2) ; par définition, les $\underline{J}^{(n)}$ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans A, et (ii) entraînera donc (i). En outre, les hypothèses entraînent que $\underline{J}_i = \underline{J}_{i+1}/\underline{J}_{i+1}^{i+1}$; d'où on tire aisément que tout $x_1 \in \underline{J}_1$ est l'image d'un élément de $\underline{J}$, et par suite (ii) entraînera (iii). On est ainsi ramené à prouver (ii). Par définition, $\underline{J}^{(n)}$ est formé des éléments $(x_k)_{k \geqslant 0}$ de A tels que

$x_k = 0$ pour $k \leqslant n$, donc $\underline{J}^{(n)}\underline{J}^{(m)} \subset \underline{J}^{(n+m)}$; les $\underline{J}^{(n)}$ constituent donc une filtration de A. D'autre part, $\underline{J}^{(n)} / \underline{J}^{(n+1)}$ est isomorphe à la projection de $\underline{J}^{(n)}$ sur A_{n+1}, donc (en vertu du fait que $u_{i,i+1}$ a pour noyau $\underline{J}_{i+1}^{i+1}$ et que $u_{i,i+1}(\underline{J}_{i+1}) = \underline{J}_i$) à $\underline{J}_{n+1}^{n+1}$, qui est un module sur $A_o = A_{n+1} / \underline{J}_{n+1}$. Soient alors $a_j = (a_{jk})_{k \geqslant 0}$ r éléments de $\underline{J} = \underline{J}^{(o)}$ tel que $a_{11}, \dots, a_{r1}$ forment un système de générateurs de $\underline{J}_1$ sur A_o ; nous allons voir que l'ensemble S_n des monômes de degré total n+1 en les a_j, engendre l'idéal $\underline{J}^{(n)}$ de A. Il est clair tout d'abord (puisque $\underline{J}_i^{i+1} = (0)$) que $S_n \subset \underline{J}^{(n)}$; comme A est complet pour la filtration $(\underline{J}^{(m)})$, il suffit de montrer que l'ensemble $\bar{S}_n$ des classes mod. $\underline{J}^{(n+1)}$ des éléments de S_n engendre le module gradué grad$(\underline{J}^{(n)})$ sur l'anneau gradué grad(A) (pour cette filtration) ( ) ; en vertu de la définition de la multiplication dans grad(A), il suffira de prouver que pour tout m, $\bar{S}_m$ est un système de générateurs du A_o-module $\underline{J}^{(m)} / \underline{J}^{(m+1)}$, ou encore que $\underline{J}_m^m$ est engendré par les monômes de degré m en les a_{jm} $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Pour cela, il reste à prouver que $\underline{J}_m$ est (en tant que A_m-module) engendré par les monômes de degré $\leqslant$ m par rapport aux a_{jm} : raisonnons par récurrence sur m, et soit $\underline{J}'_m$ le sous-A_m-module de $\underline{J}_m$ engendré par ces monômes ; la relation $\underline{J}_{m-1} = \underline{J}_m / \underline{J}_m^m$ et l'hypothèse de récurrence prouvent que $\underline{J}_m = \underline{J}'_m + \underline{J}_m^m$, d'où, puisque $\underline{J}_m^{m+1} = 0$, on tire $\underline{J}_m^m = \underline{J}'^m_m$, et finalement $\underline{J}_m = \underline{J}'_m$.

<u>Corollaire 1.</u> - <u>Sous les conditions de la prop. 4, pour que</u> A <u>soit noethérien, il faut et il suffit que</u> A_o <u>le soit.</u>

Cela résulte en effet du cor. 2 de la prop. 3.

<u>Corollaire 2.</u> - <u>Supposons vérifiées les hypothèses de la prop. 4 ; pour tout</u> i , <u>soit</u> M_i <u>un</u> A_i-<u>module de type fini, et pour</u> $i \leqslant j$, <u>soit</u> $v_{ij} : M_j \longrightarrow M_i$ <u>un di-homomorphisme tel que</u> (M_i, v_{ij}) <u>soit un système projectif. Supposons en outre que</u> v_{ij} <u>soit surjectif et que son noyau soit</u> $\underline{J}_j^{i+1} M_j$. <u>Alors</u> $M = \varprojlim M_i$ <u>est un A-module de type fini.</u>

Soient $z_h = (z_{hk})_{k \geqslant 0}$ un système de s éléments de M tels que les z_{h0} forment un système de générateurs de M_o ; on va montrer que les z_h engendrent le A-module M. Le A-module M est séparé et complet pour la filtration des $\underline{J}^{(n)}M = \underline{J}^{n+1}M$, et les hypothèses entraînent que $\underline{J}^n M / \underline{J}^{n+1} M$ est isomopphe à $\underline{J}_n^n M_n$; on est ramené à montrer que les classes mod. $\underline{J}$ de z_h engendrent le module gradué grad(M) sur l'anneau gradué grad(A) ; tout revient de nouveau à voir que les z_{hn} engendrent le A_n-module M_n. On raisonne de nouveau par récurrence sur n ; la relation $M_{n-1} = M_n / \underline{J}_n^n M_n$ et l'hypothèse de récurrence montrent que si M'_n est le sous-module de M_n engendré par les z_{hn} , on a $M_n = M'_n + \underline{J}_n^n M_n$, et comme $\underline{J}_n$ est nilpotent, cela entraîne $M_n = M'_n$.

<u>Remarques</u>

1) Si A est un anneau adique ayant un idéal de définition $\underline{J}$ tel que $\underline{J}/\underline{J}^2$ soit un (A/J)-module de type fini , il est clair que les $A_i = A/J^i$ vérifient les conditions de la prop. 4 ; leur limite projective étant A, on voit que la prop. 4 donne la description de <u>tous</u> les anneaux adiques

du type considéré (et en particulier de tous les anneaux adiques noethériens).

2) Soit A un anneau adique noethérien, $\mathfrak{J}$ un idéal de définition de A, de sorte que $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est un $(A/\mathfrak{J})$-module de type fini ; tout A-module M de type fini est alors séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{J}$-adique (§ 3, n° 5, cor. 4 du lemme 2) ; si $M_i = M/\mathfrak{J}^{i}M$, on a alors $M = \lim M_i$ et les M_i vérifient les conditions du cor. 2 de la prop. 4.

Exemple. - Soient B un anneau, $\mathfrak{I}$ un idéal de B tel que $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ soit un module de type fini sur $B/\mathfrak{I}$ (ou sur B, ce qui revient au même) ; posons $A = \varprojlim B/\mathfrak{I}^{n+1}$; A est le complété de l'anneau séparé associé à B muni de la topologie $\mathfrak{I}$-préadique. Si $A_n = B/\mathfrak{I}^{n+1}$, il est immédiat que les A_n vérifient les conditions de la prop. 4 ; on voit donc que A est un anneau adique, et si $\mathfrak{J}$ est l'adhérence, dans A, de l'image canonique de $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{J}$ est un idéal de définition de A et $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ est isomorphe à $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ en tant que $(A/\mathfrak{J})$-module. De même, si N est un B-module de type fini, et si on pose $M_j = N/\mathfrak{I}^{j+1}N$, $M = \varprojlim M_j$ est un A-module de type fini, isomorphe au complété du module séparé associé à N (pour la topologie $\mathfrak{I}$-préadique).

3. Anneaux de séries formelles ses restreintes, convergentes ...

Soient A un anneau topologique linéairement topologisé, séparé et complet ; soit $(\mathfrak{I}_\lambda)$ un système fondamental filtrant de voisinages ouverts de 0 dans A formé d'idéaux, de sorte que A s'identifie canoniquement à $\varprojlim A/\mathfrak{I}_\lambda$. Pour tout λ, soit $B_\lambda = (A/\mathfrak{I}_\lambda)[T_1,\ldots,T_n]$, où les T_i sont des indéterminées ; il est clair que les B_λ forment un système projectif d'anneaux discrets. Nous poserons $A\{T_1,\dots,T_r\} = \varprojlim B_\lambda$, et nous allons voir que cet anneau topologique est indépendant du système fondamental d'idéaux $(\underline{I}_\lambda)$ considéré. De façon précise, soit A' le sous-anneau de l'anneau des séries formelles $A[[T_1,\dots,T_r]]$ formé des séries formelles $\sum_\alpha c_\alpha T^\alpha$ $(\alpha = \alpha_1,\dots,\alpha_r) \in \underline{N}^r)$ telles que $\lim c_\alpha = 0$ (suivant le filtre des complémentaires des parties finies de $\underline{N}^r$) ; pour tout voisinage V de 0 dans A, soit V' l'ensemble des $x = \sum_\alpha c_\alpha T^\alpha$ tels que $c_\alpha \in V$ pour tout α. On vérifie aussitôt que les V' forment un système fondamental de voisinages de 0 définissant sur A' une topologie d'anneau séparée ; nous allons définir un isomorphisme topologique canonique de $A\{T_1,\dots,T_r\}$ sur A'. Pour tout $\alpha \in \underline{N}^r$ et tout λ, soit $\varphi_{\lambda\alpha}$ l'application de $(A/\underline{I}_\lambda)[T_1,\dots,T_r]$ dans $A/\underline{I}_\lambda$ qui, à tout polynôme du premier anneau, fait correspondre le coefficient de T^α dans ce polynôme. Il est clair que les $\varphi_{\lambda\alpha}$ forment un système projectif d'homomorphismes d'anneaux, dont la limite projective.

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-