A. Grothendieck
33 rue du Maréchal Girard
Nancy (M et M)

Nancy le 16.12.1950

Cher Monsieur Dixmier,

Merci pour votre lettre et votre tirage à part. – Malheureusement, la suggestion que vous me faites ne m'apporte rien de neuf, car les minimisations dont vous parlez sont à fortiori incluses dans le fait de prendre un f^{lt} compact convexe minimal (ce qui est possible grace au théorème de Zorn).

Il est bien vrai que dans un espace complet quelconque, l'enveloppe convexe fermée d'une partie f^{lt} cpte est aussi f^{lt} cpte. Également vous avez donné la démonstration dans le cas où l'espace est séparable; dans le cas général, on remarque que d'après le théorème d'Eberlein, il suffit de montrer que ~~des~~ t. ~~les~~ suite extraite de l'enveloppe convexe admet un point faiblement adhérent, ce qui ramène immédiatement au cas séparable. – Notez qu'il existe un assez grand nombre de théorèmes dont l'énoncé ne fait intervenir aucune condition de dénombrabilité, et qui ne paraît se démontrer sans l'aide du th. d'Eberlein (j'en connais cinq exemples au moins). Cela tient à ce que l'emploi des suites permet d'utiliser le théorème de Lebesgue sur l'intégrale d'une limite simple de fonctions bornées dans leur ensemble!

Vous me demandez avec raison comment, du théorème sur la moyenne des fonctions flt. p.p., on pourrait déduire que ~~tout~~ groupe borné d'opérateurs dans un Hilbert est semblable à un groupe d'opérateurs unitaires. Si on savait que les fonctions sur G de la forme $\varphi_{x,y}(s) = \langle T^s x, T^s y \rangle$ sont flt. p.p., on n'aurait qu'à considérer la forme bilinéaire sur H : $B(x,y) = M_s(\langle T^s x, T^s y \rangle) = M(\varphi_{x,y})$, où M est la moyenne invariante sur l'espace des fonctions flt. p.p., et l'affirmation apparaîtrait aisément. J'avais cru voir que ces $\varphi_{x,y}$ sont en effet flt. p.p., mais n'en aperçois plus la raison maintenant que je vous écris, de sorte qu'il me semble bien possible que je me suis trompé — mais je n'en suis pas convaincu. Comme ces semaines-ci je suis particulièrement pris par des soucis matériels de recherche de logement et de déménagement, et d'autre part une autre recherche de cours, je ne peux pas avant quelques semaines examiner la question de près, aussi j'ai préféré vous répondre ~~tout~~ de suite. — Il est évident par la construction : écrite de φ_{xy} et $\varphi_{T^\sigma_x, T^\sigma_y}$, où σ parcourt le groupe G, T^σ_x et T^σ_y parcourent des parties relt. compactes de H. D'autre part $(a,b) \to \varphi_{ab}$ est application bilinéaire continue de $H \times H$ dans $C^\infty(G)$. Il ne s'en suit malheureusement pas pour autant que l'ensemble des $\varphi_{T^\sigma_x, T^\sigma_y}$ est une partie relt. compacte de $C^\infty(G)$, car il est possible de trouver une application bilinéaire continue du produit de deux Hilberts dans un Banach, telle que l'image du produit de deux boules unité ne soit pas relt compacte. — Peut-être m'étais-je trompé sur ce point ?

Je vous joins le tirage à part de ma dernière note.

Recevez mes cordiales salutations

A. Grothendieck

P.S. Les autres résultats de ma précédente lettre, et de celle-ci, ont été repensés par moi avec assez de soin pour être ~~tout~~ à fait convaincants !