Lettre à J. Dixmier

10.12.1950

par

Alexander Grothendieck

Transcription by

CSG ISTITUTO GROTHENDIECK

Edited by Mateo Carmona
mateo.carmona@csg.igrothendieck.org
Centre for Grothendieckian Studies (CSG)
Grothendieck Institute
Corso Statuto 24, 12084 Mondovì, Italy

This transcription is based on an unpublished scan previously available within the 'Grothendieck circle.' This project was carried out by researchers and volunteers of the CSG under the supervision of Mateo Carmona. More details are available at:
https://csg.igrothendieck.org/transcriptions/.

How to cite:

A. Grothendieck. *Lettre à J. Dixmier*. Unpublished letter, 10.12.1950. Transcription by M. Carmona et al., CSG, Grothendieck Institute. Draft, May 2024.

Nancy le 10.12.1950

A. Grothendieck
33 rue du Maréchal Gérard
Nancy (M et M)

Cher Monsieur Dixmier,

Merci pour votre lettre et votre tirage à part. — Malheureusement, la suggestion que vous me faites ne m'apporte rien de neuf, car les minimisations dont vous parlez sont à fortiori incluses dans le fait de prendre un flot compact convexe *minimal* (ce qui est possible grâce au théorème de Zorn).

Il est bien vrai que dans un espace complet quelconque, l'enveloppe convexe fermé d'une partie flot compacte est encore flot compacte. Godement nous a donné la démonstration dans le cas où l'espace est séparable ; dans le cas général, on remarque que d'après le théorème d'Eberlein, il suffit de montrer que toute *suite* extraite de l'enveloppe convexe admet un point faiblement adhérent, ce qui ramène immédiatement au cas séparable. —- Notez qu'il existe un assez grand nombre de théorèmes dont l'énoncé ne fait intervenir aucune condition de dénombrabilité, et qui ne peuvent se démontrer sans l'aide du théorème d'Eberlein (j'en connais cinq exemples au moins). Cela tient à ce que l'emploi des suites permet d'appliquer le théorème de Lebesgue sur l'intégrale d'une limite simple de fonctions bornées dans leur ensemble !

Vous me demandez avec raison comment, du théorème sur la moyenne des fonctions flot p.p., on pourrait déduire que tout groupe G borné d'opérateurs dans un Hilbert est semblable à un groupe d'opérateurs unitaries. Si on savait que les fonctions sur G de la forme $\varphi_{x,y}(s) = \langle T^s x, T^s y \rangle$ sont flot p.p., on n'aurait qu'à considérer la forme bilinéaire sur H : $B(x,y) = M_s(\langle T^s x, T^s y \rangle) = M(\varphi_{x,y})$, où M est la moyenne invariante sur l'espace des fonctions flot p.p., et l'affirmation apparaîtrait aisément. J'avais cru voir que ces $\varphi_{x,y}$ sont en effet flot p.p., mais n'en aperçois plus la raison maintenant que je vous écris, de sorte qu'il me semble bien possible que je me suis trompé – mais je n'en suis pas convaincu. Comme ces semaines-ci je suis partiellement pris par des soucis matériels de recherche de logement et de déménagement, et ai d'autre part une autre recherche en cours, je ne peux pas avant quelques semaines examiner la question de près, aussi j'ai préféré vous répondre tout de suite. – Il est à noter que la σ-translation à droite de φ_{xy} est $\varphi_{T^\sigma x, T^\sigma y}$, or si σ parcourt le groupe G, $T^\sigma x$ et $T^\sigma y$ y parcourent des parties flot relativement compactes de H. D'autre part $(a, b) \longrightarrow \varphi_{ab}$ est application bilinéaire continue de $H \times H$ dans $C^\infty(G)$. Il n'en suit malheureusement pas pour autant que l'ensemble des $\varphi_{T^\sigma x, T^\sigma y}$ est une partie flot relativement compacte de $C^\infty(G)$, car il est possible de trouver une application bilinéaire continue du produit de deux Hilberts dans un Banach, telle que l'image du produit des deux boules unité ne soit pas flot relativement compacte. – Peut-être m'étais-je trompé sur ce point ?

Je vous joins le tirage à part de ma dernière note.

Recevez mes cordiales salutations

A. Grothendieck

P.S. Les autres résultats de ma précédente lettre, et de celle-ci, ont été regardé par moi avec assez de soin pour être tout à fait certains !