C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278 (27 mai 1974) Série A — 1401

TOPOLOGIE. — *Classification topologique des plongements des* 1-*complexes compacts dans les surfaces.* Note (*) de M. **Yves Ladegaillerie**, présentée par M. Henri Cartan.

On étudie d'abord le cas des surfaces compactes orientées en utilisant une notion d'équivalence de plongements par homéomorphisme. On caractérise alors les classes d'équivalence à l'aide d'invariants.

1. CATÉGORIE DES 1-COMPLEXES A ISOTOPIE PRÈS.

1.1. On appellera *étoile standard* à n branches ($n \geqq 1$), la partie de $\mathbf{R}^2$ définie en coordonnées polaires par $\{(\rho, \theta), 0 \leqq \rho \leqq 1, \theta = (2k\pi/n), k \in \mathbf{Z}\}$. On appellera *étoile* tout espace topologique homéomorphe à une étoile standard ou réduit à un point (0 branche). Un 1-*complexe compact* est un espace topologique compact dont tout point a un voisinage homéomorphe à une étoile à n branches; si $n \neq 2$, on dira que c'est un *sommet*, si $n = 0$ c'est un *sommet isolé*.

1.2. On notera $\mathscr{K}_{\mathscr{I}}$ la catégorie des 1-*complexes à isotopie près*, dont les objets sont les 1-complexes compacts et les morphismes sont les *classes d'isotopie* d'homéomorphismes. On notera $\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$ la catégorie des 1-*complexes combinatoires* dont les objets sont les 5-uples (S, A, A_1, σ, s), où S, A, A_1 sont des ensembles finis, $A_1 \subset A$, σ une involution sans point fixe de A telle que $\sigma(A_1) = A_1$, s une application de A_1 dans S telle qu'il n'existe pas de x de S tel que $\operatorname{card}(s^{-1}(x)) = 2$. Un morphisme entre (S, A, A_1, σ, s) et $(S', A', A'_1, \sigma', s')$ est un couple (φ, ψ), où φ est une bijection de S sur S', ψ une bijection de A sur A' telles que $\psi(A_1) = A'_1$, $\varphi \circ s = s' \circ \psi|_{A_1}$, $\psi \circ \sigma = \sigma' \circ \psi$.

1.3. On définit un foncteur $\mathscr{C}$ de $\mathscr{K}_{\mathscr{I}}$ dans $\mathscr{K}_{\mathscr{C}}$ en associant au 1-complexe K le 5-uple (S, A, A_1, σ, s), où S est l'ensemble (fini) des sommets de K, A l'ensemble (fini) des *arcs* de K (un arc étant une arête orientée et une arête une composante connexe de $K \setminus S$), A_1 l'ensemble des arcs ayant une source, s l'application de A_1 dans S qui à un tel arc associe sa source, σ l'involution de A qui a un arc associe son inverse.

1.4. THÉORÈME. — *Le foncteur $\mathscr{C}$ est une équivalence de catégories.*

2. PRÉLIMINAIRES TOPOLOGIQUES. — *Terminologie.* — Une surface (resp. surface à bord) est une 2-variété topologique (resp. 2-variété à bord).

2.1. On appellera *plongement* d'un 1-complexe K dans une surface à bord orientée V une injection continue de K dans l'intérieur de V.

2.2. PROPOSITION. — *Toute injection continue de* $[0, 1]$ *dans* $\mathbf{R}^2$ *se prolonge en un homéomorphisme de* $\mathbf{R}^2$ *sur lui-même* [*voir* (2), (3), (4)].

2.3. PROPOSITION. — *Tout plongement d'une étoile* K *dans* $\mathbf{R}^2$ *orienté détermine de façon canonique un ordre circulaire sur l'ensemble des branches de* K *et est isotope par isotopie ambiante à un plongement standard* (1.1) *induisant le même ordre circulaire.*

2.4. DÉFINITION. — Deux plongements f_1 et f_2 d'un 1-complexe compact K dans deux surfaces orientées à bords V_1 et V_2 sont dits *équivalents* s'il existe un homéomorphisme orienté h de V_1 sur V_2 tel que $h \circ f_1 = f_2$.

29

2.5. Proposition. — *Soient* W, W′ *deux surfaces à bords* ∂W, $\partial W'$ *orientées et de même genre (nombre d'anses), et h un homéomorphisme orienté de* ∂W *sur* $\partial W'$; *alors h s'étend en un homéomorphisme orienté de* W *sur* W′.

3. Voisinage tubulaire standard d'un 1-complexe circularisé. — Dans la suite, K désigne un 1-complexe compact.

3.1. On appellera 1-*complexe circularisé* le couple (K, ω) fermé de K et d'une famille (circularisation) $\omega = (\omega_x)_{x \in S}$, où pour tout sommet $x \in S$, ω_x est un ordre circulaire sur l'ensemble des arcs issus de x. [Cette notion a d'abord été systématisée dans le contexte combinatoire dans ([1]).]

3.2. A tout 1-complexe circularisé (K, ω) est associé son *voisinage tubulaire standard* T (K, ω) qui est une surface à bord orientée obtenue par réunion et recollement de la façon suivante : à tout sommet isolé x on associe un disque orienté D_x; à tout arc $a \in A$ on associe le rectangle $\bar{a} \times I$ (où $I = [-1, +1]$) avec l'orientation produit; ($\bar{a}$ est l'arc compactifié par 2 extrémités); on identifie les points de $\bar{a} \times I$ et de $\overline{\sigma(a)} \times I$ selon la loi $(p, t) \sim (p, -t)$. Pour tout arc a ayant une source $x \in S$, on considère $a' = \omega_x(a)$ et on recolle les rectangles orientés $\bar{a} \times I$ et $\bar{a}' \times I$ en identifiant les points (x, t) et $(x, -t)$ pour $t \in [0, 1]$.

3.3. On a un plongement canonique i_ω de K dans T (K, ω), induit par le plongement canonique $(p \to (p, 0))$ de $\bar{a}$ dans $\bar{a} \times I$, un sommet isolé x étant envoyé sur le centre du disque D_x associé. Le plongement i_ω est caractérisé à équivalence près (2.4) par la propriété d'être une équivalence d'homotopie.

3.4. Soit (K, ω) un 1-complexe circularisé et E l'ensemble des arcs et des sommets isolés K. On définit une permutation φ_ω de E de la manière suivante : soit a un arc ayant une source, soit x son but, on pose $\varphi_\omega(a) = \omega_x(-a)$. Sur les autres éléments de E, φ_ω est l'identité. Un ω-*circuit* de K est une orbite de φ_ω. On note C (K, ω) l'ensemble des ω-circuits de K. On définit une bijection canonique entre $\pi_0(\partial T(K, \omega))$ et C (K, ω).

4. Voisinage tubulaire d'un plongement.

4.1. Théorème. — *Étant donné un plongement f de* K *dans une surface orientée* V, *il existe une unique circularisation* ω (*f*) *de* K *telle qu'il existe une surface à bord* T (K, *f*, V) *contenue dans* V (*appelée* voisinage tubulaire de *f*), *l'intérieur de* T (K, *f*, V) *contenant f* (K) *et telle que le plongement f de* K *dans* T (K, *f*, V) *soit équivalent au plongement canonique de* K *dans* T (K, ω (*f*)). *Il existe alors une bijection canonique* ψ_f *entre* $\pi_0(\partial T(K, f, V))$ *et* C (K, ω (*f*)), (3.4).

4.2. Corollaire. — *Soit* f_1 (*resp.* f_2) *un plongement de* K *dans* V_1 (*resp.* V_2); *on a* $\omega(f_1) = \omega(f_2)$ *si et seulement si il existe des voisinages* T_1 *et* T_2 *de* f_1 (K) *et* f_2 (K) *tels que les plongements induits* g_1 *de* K *dans* T_1 *et* g_2 *de* K *dans* T_2 *soient équivalents.*

5. Théorème de classification.

5.1. Si *f* est un plongement de K dans la surface orientée compacte V, tel que $\pi_0(f)$ soit surjectif, T un voisinage tubulaire, soit $V' = V \setminus \text{int}\, T$; alors V′ est une surface compacte orientée à bord $\partial V' = -\partial T$. On construit une partition de $\pi_0(\partial V')$ en rangeant dans une même classe les éléments contenus dans une même composante connexe de V′. A cette classe on associe un entier positif ou nul : le genre de cette composante.

30

C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278 (27 mai 1974) Série A — 1403

Par la bijection ψ_f (4.1), on en déduit une partition $(E_i)_{i\in I}$ de C (K, $\omega(f)$) et à chaque E_i est associé un entier $n_i \geqq 0$. Alors $\omega(f)$ et la famille $((E_i, n_i))_{i\in I}$ sont des invariants, c'est-à-dire sont inchangés lorsqu'on remplace f par un plongement équivalent. On les appellera *invariants* du plongement f.

5.2. Théorème de classification. — *Deux plongements f et f' sont équivalents si et seulement s'ils ont mêmes invariants. De plus, tout système d'invariants sur* K : ω, $(E_i, n_i)_{i\in I}$ *provient d'une classe de plongements.*

(*) Séance du 17 avril 1974.

(1) J. R. Edmonds, *A combinatorial representation for polyhedral surfaces* (*Not. A. M. S.*, 7, 1960, p. 646).
(2) J. F. P. Hudson, *Piece-Wise Linear Topology*, W. A. Benjamin Inc., 1969.
(3) R. L. Wilder, *Topology of Manifolds* (*A. M. S.*, Coll. Publ., 32, 1949).
(4) E. C. Zeeman, *Seminar on Combinatorial topology*, I. H. E. S., 1963, Exp. I à VIII.

Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Mathématiques, Place Eugène-Bataillon, 34000 *Montpellier.*

31