C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279 (22 juillet 1974) Série A — 129

TOPOLOGIE. — *Classification topologique des plongements des 1-complexes compacts dans les surfaces.* Note (*) de M. **Yves Ladegaillerie**, présentée par M. Henri Cartan.

On établit l'équivalence de la catégorie isotopique des voisinages tubulaires orientés des 1-complexes avec la catégorie des 1-complexes circularisés. On établit ensuite l'équivalence de la catégorie isotopique des voisinages tubulaires quelconques des 1-complexes avec la catégorie des 1-complexes munis d'un automorphisme involutif sans point fixe et d'une circularisation antisymétrique. Enfin on caractérise les plongements dans des surfaces orientées de genre minimal.

7. Voisinages tubulaires des 1-complexes. — La terminologie et les notations sont celles de ([1]). Dans la suite K désigne un 1-complexe topologique compact.

7.1. Théorème. — *Soit i un plongement de* K *connexe dans une surface à bord compacte orientée* X, *soit* A *un anneau non réduit à* 0. *Il y a équivalence entre :*

(*a*) *i est une équivalence d'homotopie*;

(*b*) *i est équivalent à un plongement standard* i_ω [*cf.* ([1]), 3.3];

(*c*) $x \not\simeq S^2$, $\pi_0(i)$ et $\pi_1(i)$ *sont des isomorphismes*;

(*d*) $X \not\simeq S^2$, X *connexe et* $H_1(i)$ *est un isomorphisme de* $H_1(K; A)$ *sur* $H_1(X; A)$;

(*e*) $X \not\simeq S^2$, X *connexe et* $H^1(i)$ *est un isomorphisme de* $H^1(K; A)$ *sur* $H^1(X; A)$.

On dira alors que (X, i) est un *voisinage tubulaire orienté de* K.

7.2. Plus généralement on appelle *voisinage tubulaire* d'un 1-complexe K tout couple (X, i) où i est un plongement de K dans la surface compacte à bord X et i est une équivalence d'homotopie. Ce sont les objets de la *catégorie isotopique des voisinages tubulaires* notée TUB, un *morphisme entre les voisinages tubulaires* (X, i) et (X', i') de K et K′ étant une classe d'isotopie d'homéomorphismes h de X sur X′ tel que $h(i(K)) = i'(K')$.

7.3. La *catégorie isotopique des voisinages tubulaires orientés* est la catégorie TUBO dont les objets sont les voisinages tubulaires orientés de 1-complexes et dont les morphismes sont les morphismes de voisinages tubulaires qui respectent l'orientation.

8. La catégorie isotopique des 1-complexes circularisés.

8.1. C'est la catégorie $K\,\omega_I$ dont les objets sont les couples (K, ω) où K est un 1-complexe quelconque et ω une circulation de K. Un morphisme de (K, ω) dans (K', ω') est une classe d'isotopie d'homéomorphismes de K dans K′ qui respecte la circulation.

8.2. On a un foncteur T de $K\,\omega_I$ dans TUBO qui à (K, ω) associe le voisinage tubulaire standard $T(K, \omega)$ ([1]) et qui à un morphisme $\bar{h} : (K, \omega) \to (K', \omega')$ associe le morphisme $T(\bar{h})$ de voisinages tubulaires classe de l'homéomorphisme $H : T(K, \omega) \to T(K', \omega')$ défini à partir des homéomorphismes $H_a : \bar{a} \times I \to \overline{h(a)} \times I$ (a étant un arc de K) qui à (x, t) associe $(h(x), t)$.

8.3. Théorème. — T *est une équivalence entre les catégories* $K\,\omega_I$ *et TUBO.*

9. La catégorie isotopique des Z_2-voisinages tubulaires orientés.

9.1. C'est la catégorie $\widetilde{\text{TUBO}}$ dont les objets sont les couples $(\tilde{T}, \theta)$ où $\tilde{T}$ est un objet de TUBO et θ un homéomorphisme de voisinage tubulaire de $\tilde{T}$ sur $\tilde{T}$, involutif, sans

25

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

point fixe et qui inverse l'orientation. Un morphisme entre $(\tilde{T}, \theta)$ et $(\tilde{T}', \theta')$ est une classe d'isotopie $\bar{h}$ d'homéomorphisme h de voisinages tubulaires de $\tilde{T}$ sur $\tilde{T}'$ tel que $h\,\theta = \theta'\,h$.

9.2. On définit un foncteur Q de $\widetilde{\mathrm{TUBO}}$ dans TUB qui à un objet $(\tilde{T}, \theta)$ de $\widetilde{\mathrm{TUBO}}$ associe le voisinage tubulaire quotient de $\tilde{T}$ par θ et qui à un morphisme associe le morphisme quotient.

9.3. Proposition. — Q *est une équivalence entre les catégories* $\widetilde{TUBO}$ *et TUB.*

10. La catégorie isotopique des $\mathbf{Z}_2$-1-complexes circularisés.

10.1. C'est la catégorie $\tilde{\mathrm{K}}\,\omega_{\mathrm{I}}$ dont les objets sont les triplés $(\tilde{\mathrm{K}}, \tilde{\omega}, \theta)$ où $(\tilde{\mathrm{K}}, \tilde{\omega})$ est un objet de $\mathrm{K}\,\omega_{\mathrm{I}}$ et θ un homéomorphisme involutif sans point fixe de $\tilde{\mathrm{K}}$ qui inverse la circularisation (on dira que $\tilde{\omega}$ est *antisymétrique*). Un morphisme entre $(\tilde{\mathrm{K}}, \tilde{\omega}, \theta)$ et $(\tilde{\mathrm{K}}', \tilde{\omega}', \theta')$ est une classe d'isotopie $\bar{h}$ d'homéomorphisme h de $\tilde{\mathrm{K}}$ sur $\tilde{\mathrm{K}}'$ qui respecte les circularisations et tel que $h\,\theta = \theta'\,h$.

10.2. Le foncteur T induit un foncteur $\tilde{\mathrm{T}}$ de $\tilde{\mathrm{K}}\,\omega_{\mathrm{I}}$ dans $\widetilde{\mathrm{TUBO}}$.

Théorème. — $\tilde{\mathrm{T}}$ *est une équivalence de catégories entre* $\tilde{\mathrm{K}}\,\omega_{\mathrm{I}}$ *et* $\widetilde{TUBO}$.

Corollaire. — *Les catégories* $\tilde{\mathrm{K}}\,\omega_{\mathrm{I}}$ *et TUB sont équivalentes.*

11. La catégorie isotopique des 1-complexes cocircularisés.

11.1. Une *cochaîne* sur K est une application γ de A (arcs de K) dans $\mathbf{Z}_2$ (i. e. $\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}$) telle que $\gamma\sigma = \gamma$ [*voir* (1)]. Si ω et ω' sont deux circularisations de K telles que pour tout sommet s de degré $\geqq 3$ (le degré $\mathring{d}s$ de s est le nombre d'arcs issus de s) ω_s et ω'_s soient égaux ou inverses l'un de l'autre (ce qu'on notera $|\omega_s| = |\omega'_s|$), on désigne par ω'_s/ω_s leur « rapport » qui vaut 1 dans le premier cas, -1 dans le second. Si on note φ l'isomorphisme du groupe multiplicatif $\{-1, 1\}$ dans $\mathbf{Z}_2$, on définit un « cobord » $\chi_{\omega\omega'}$, application définie sur l'ensemble des arcs qui n'ont pas d'extrémités de degré 1, qui à un arc d'extrémités s_0 et s_1 associe $\varphi(\omega'_{s_1}/\omega_{s_1}) - \varphi(\omega'_{s_0}/\omega'_{s_0})$, et qui à une boucle isolée associe 0.

11.2. K étant donné, on définit une relation d'équivalence sur les couples (γ, ω) où γ est une cochaîne, ω une circularisation par $(\gamma, \omega) \sim (\gamma', \omega') \Leftrightarrow$ pour tout sommet s de K tel que $\mathring{d}s \geqq 3$ on a $|\omega'_s| = |\omega_s|$ et $\chi_{\omega\omega'} = \gamma' - \gamma$ (sur le domaine où $\chi_{\omega\omega'}$ est défini). Une classe η de couples (γ, ω) sera appelée *cocircularisation* de K.

11.3. La catégorie isotopique des 1-complexes cocircularisés est la catégorie $\mathrm{K}\,\eta_{\mathrm{I}}$ dont les objets sont les couples (K, η) où η est une cocircularisation du 1-complexe K. Un morphisme de (K, η) dans (K', η') est la donnée d'une classe d'isotopie d'homéomorphisme de K dans K′ qui respecte les cocircularisations et, pour chaque point isolé, chaque arc isolé, chaque boucle isolée b telle que $\gamma(b) = 0$, la donnée d'un signe $+1$ ou -1 (intuitivement, le signe indique si l'extension du morphisme au voisinage tubulaire conserve ou inverse l'orientation).

11.4. Théorème. — *Les catégories* $\mathrm{K}\,\eta_{\mathrm{I}}$ *et TUB sont équivalentes.*

[On définit un foncteur de $\mathrm{K}\,\eta_{\mathrm{I}}$ dans TUB qui à (K, η) associe un « voisinage tubulaire standard » $\mathrm{T}(\mathrm{K}, \eta)$ et un foncteur quasi-inverse du précédent qui à un voisinage tubulaire de K associe le couple (K, η) où η est la « cocircularisation induite » sur K.]

11.5. Terminologie. — Un *circuit* de K est un ensemble non vide d'arcs ordonné circulairement, l'extrémité d'un arc coïncidant avec l'origine du suivant. Une *boucle* est le couple formé par un circuit et son inverse. Si (K, η) est un 1-complexe cocircularisé

26

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

et (γ, ω) un élément de η, les η-boucles de K sont d'une part les boucles dont on obtient un circuit représentatif par la loi qui étant donné un arc a et $i \in \mathbf{Z}_2$ leur associe l'arc $(-1)^j \omega_s(-a)$ et $j \in \mathbf{Z}_2$, où s est l'extrémité de a et $j = i+\gamma(a)$, et d'autre part les circuits réduits à un arc boucle isolé b telle que $\gamma(b) = 0$. Cette définition ne dépend pas du représentant (γ, ω) choisi. On note $C(K, \eta)$ l'ensemble des η-boucles et on a une bijection canonique ψ entre $C(K, \eta)$ et $\pi_0 \partial T(K, \eta)$.

12. Classification des Plongements.

12.1. Définition. — Deux plongements f_1 et f_2 de K dans V_1 et V_2 (deux surfaces compactes) sont *équivalents* s'il existe un homéomorphisme h de V_1 sur V_2 tel que $h \circ f_1 = f_2$.

12.2. Soit un plongement f de K dans la surface compacte V tel que $\pi_0(f)$ soit surjectif. Il lui est associé un premier invariant (à équivalence près) la cocircularisation η_f induite sur K par un voisinage tubulaire T quelconque de $f(K)$ dans V.

12.3. Soit alors $\Sigma = V \backslash \text{int}\, T$; Σ est une surface à bord $\partial\Sigma = \partial T$. On obtient une partition de $\pi_0 \partial\Sigma$ en rangeant dans une même classe E_i les composantes de $\partial\Sigma$ contenues dans une même composante Σ_i de Σ. Ceci induit une partition de $C(K, \eta_f)$ qui permet de construire un second invariant du plongement. A la classe E_i est associé un entier $+1$ ou -1 selon que Σ_i est, ou non, orientable et un autre entier : le genre de Σ_i. Tous ces invariants permettent la classification (un peu technique) des plongements compte tenu des « symétries » du voisinage tubulaire, du fait que si Σ_i est orientable, tout homéomorphisme de $\partial\Sigma_i$ ne se prolonge pas forcément à Σ_i et que, par contre :

12.4. Proposition. — *Si* W *est une surface* non orientable *compacte à bord* ∂W *et* h *un homéomorphisme de* ∂W, *alors* h *s'étend en un homéomorphisme de* W'.

13. Plongements minimaux.

13.1. Avec les notations de 12 ci-dessus, si χ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré on a $\chi(V) = \chi(K)+\chi(\Sigma)$.

13.2. Un plongement f de K dans une surface orientable connexe compacte V est *minimal* si pour tout plongement dans une autre surface V' le genre de V' est supérieur ou égal à celui de V. Le genre de K est alors, par définition, celui de V.

13.3. On note $\Omega(K) = \sup_{\omega} \text{Card}\, C(K, \omega)$ [*cf.* (1)], c'est un entier positif attaché à K et on a :

Proposition. — *Si* K *est connexe son genre est* $1-(1/2)(\chi(K)+\Omega(K))$.

Cela conduit à l'algorithme d'Edmonds (2).

13.4. Si K a pour composantes connexes $K_1, K_2, \ldots, K_p$ le genre de K est la somme des genres de $K_1, K_2, \ldots, K_p$. On retrouve un résultat connu (3); de plus :

13.5. Théorème. — *Avec les notations précédentes* (13.4) *les plongements minimaux de* K *sont ceux obtenus de la façon suivante : soient* f_i $(i = 1, \ldots, p)$ *des plongements minimaux des* K_i *dans des surfaces compactes* V_i, *et soit* Γ *une structure d'arbre sur l'ensemble des* V_i, *on forme une surface* V *en « reliant par un cylindre » tout couple* (V_i, V_j) *tel que* V_i *soit lié à* V_j *dans* Γ.

(*) Séance du 5 juin 1974.

27

https://grothendieck.umontpellier.fr
Université de Montpellier, UMR CNRS 5149, Case courrier 051, Place Eugène Bataillon
34095 Montpellier cedex 5 - France

(1) Y. Ladegaillerie, *Comptes rendus*, 278, série A, 1974, p. 1401.
(2) J. R. Edmond, *Not. Amer. Math. Soc.*, 7, 1960, p. 646.
(3) J. Battle, F. Harary, Y. Kodama et J. W. T. Youngs, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68, 1962, p. 565.

Université des Sciences et Techniques
du Languedoc,
Mathématiques,
place Eugène-Bataillon,
34000 *Montpellier.*