GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE. — *La jacobienne généralisée d'une courbe relative; construction et propriété universelle de factorisation.* Note (*) de **Carlos E. Contou-Carrère**, prèsentée par Henri Cartan.

Soit $\hat{X} \xrightarrow{f} S$ une courbe propre sur une base S. Si $T \subsetneq \hat{X}$ est un diviseur relatif tel que $X = \hat{X} - T$ soit lisse sur S, on donne la construction d'un S-schéma en groupes « pro-lisse » $J^{\cdot}_{\infty}$ et d'un morphisme $X \xrightarrow{\varphi} J^{\cdot}_{\infty}$ tel que pour tout morphisme $X \xrightarrow{\psi} G$ dans un S-schéma en groupes lisse et commutatif il existe un et un seul S-homomorphisme $\overline{\psi} : J^{\cdot}_{\infty} \to G$ avec $\overline{\psi} \circ \varphi = \psi$. [i. e. $\mathrm{Hom}_{S-gr}(J^{\cdot}_{\infty}, G) \simeq G(X)$].

Let $\hat{X} \xrightarrow{f} S$ be a relative proper curve over S. *And $T \subsetneq \hat{X}$ a relative divisor such that $X = \hat{X} - T$ be smooth over* S. *The construction of an* S-*group-scheme* $J^{\cdot}_{\infty}$ *and a morphism* $X \xrightarrow{\varphi} J^{\cdot}_{\infty}$ *is given, the couple* $(J^{\cdot}_{\infty}, \varphi)$ *verifies the following universal property: any* S-*morphism* $X \xrightarrow{\psi} G$, G *a smooth* S-*group scheme, factors uniquely as* $\overline{\psi} \circ \varphi = \psi$, $\overline{\psi} : J^{\cdot}_{\infty} \to G$ *a group homomorphism.*

0. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES. — (*a*) Soit $\hat{X} \xrightarrow{f} S$ un S-schéma plat de présentation finie à fibres géométriques intègres de dimension 1, localement projectif sur S, donc propre. Soit T un sous-schéma fermé de $\hat{X}$, plat sur S, tel que $\mathscr{I}_{T|\hat{X}}$ (idéal de définition de T dans $\hat{X}$) soit inversible et tel que $X = \hat{X} - T$ soit lisse (lorsque $T \to S$ est surjectif, $\hat{X}$ est projectif sur S).

(*b*) Bien que l'on entende prouver le théorème pour un S-schéma en groupes lisse commutatif les dévissages nécessaires amènent à considérer des S-faisceaux en groupes f. p. p. f. plus généraux.

Soit G un S-faisceau f. p. p. f. en groupes commutatifs (*cf.* [6], vol. 1), localement de présentation finie (l. p. f.) (*cf.* [4]), séparé, formellement lisse (f. l.) (*cf.* [6], vol. II) et à fibres représentables. On suppose aussi que chaque fois que l'on a deux immersions $S_0 \overset{i_1}{\subsetneq} S_1$, $S_0 \overset{i_2}{\subsetneq} S_2$ d'ordre 1 (i. e. les idéaux de définition respectifs étant de carré nul) dans $\mathrm{Sch}|_S$, si i_2 admet une section $S_2 \to S_0$ on a

$$(0.1) \qquad G(S_1 \coprod_{S_0} S_2) \simeq G(S_1) \underset{G(S_0)}{\times} G(S_2).$$

1. CONSTRUCTION DU SYSTÈME PROJECTIF DE S-GROUPES $\{J^{\cdot}_n\}_{n \geq 0}$ ET ÉNONCÉ DU THÉORÈME. — Soit $T^{(n)}$ le *n*-ième voisinage infinitésimal de T dans $\hat{X}$, i. e. $T^{(n)} = V(\mathscr{I}^{(n+1)}_{T|\hat{X}})$. Le S-schéma $T^{(n)}$ étant plat et de présentation finie, la somme amalgamée $\hat{X}^{(n)} = \hat{X} \coprod_{T^{(n)}} S$ existe dans $\mathrm{Sch}|_S$ et commute aux changements de base (*cf.* [1]). On note $f^{(n)} : \hat{X}^{(n)} \to S$ le morphisme naturel donnée par (f, id_S) et $\varepsilon^{(n)} : S \to \hat{X}^{(n)}$ la S-section naturelle. On a une suite de morphismes de S-schémas

$$(1.1) \qquad \hat{X} \to \hat{X}^{(1)} \to \ldots \hat{X}^{(n)} \to \hat{X}^{(n+1)} \to \ldots;$$

soit :

$$(1.2) \qquad J^{\cdot}_n = \underline{\mathrm{Pic}}_{\hat{X}^{(n)}|S} = R^1 f^{(n)}_*(G_{m_{\hat{X}^{(n)}}}),$$

le S-foncteur de Picard relatif de $\hat{X}^{(n)}$ sur S (*cf.* [5]). On a la suite exacte

$$(1.3) \qquad 0 \to p^{(n)}_*(G_{m_{T^{(n)}}}) \,|\, \mathrm{Im}\, G_{m_S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{\hat{X}^{(n)}|S} \to \underline{\mathrm{Pic}}_{\hat{X}|S} \to 0,$$

ce qui entraîne en vertu de [5] que $J_n^{\cdot}$ est un S-schéma en groupes lisses. La suite (1.1) donne lieu à un système projectif de S-groupes $\{J_n^{\cdot}\}_{n \geqq 0}$ ($J_n^{\cdot} \leftarrow J_m^{\cdot}$ est induit par $\hat{X}^{(n)} \to \ldots \to \hat{X}^{(m)}$ si $n \leqq m$) dont les morphismes de transition sont des morphismes affines, donc la limite projective $J_\infty^{\cdot} = \varprojlim_n J_n^{\cdot}$ existe dans $\mathrm{Sch}|_S$. Pour $\infty \geqq n \geqq 0$ on a une suite exacte $0 \to J_n^0 \to J_n^{\cdot} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_S \to 0$ obtenue à partir de l'augmentation de $\underline{\mathrm{Pic}}_{\hat{X}^{(n)}|S}$ (*cf.* [5]). On pose $J_n^m = \varepsilon^{-1}(m)$ si $m \in \mathbb{Z}$. Une section α de X au-dessus de $S' \in \mathrm{Sch}|S$ est définie par un diviseur relatif qui détermine une section de $J_n^{\cdot}$ (sur S'). On a donc un S-morphisme $X \xrightarrow{\varphi_n} J_n^1$ et un système projectif $\{\varphi_n\}_{n \geqq 0}$ de S-morphismes; on pose $\varphi = \varprojlim_n \varphi_n$.

THÉORÈME (1.4). — *Soit* X *comme dans* 0, *et* G *un* S-*schéma en groupes commutatif et lisse. L'homomorphisme de groupes* $\mathrm{Hom}_{S-gr}(J_\infty^{\cdot}, G) \to G(X)$ *induit par composition avec* $X \xrightarrow{\varphi} J_\infty^{\cdot}$ *est un isomorphisme.* [*Propriété de factorisation universelle* (*p.d.f.u*) *du couple* $(J_\infty^{\cdot}, \varphi)$.]

On ramène la preuve de (1.4) au cas S affine et noethérien (*cf.* [4]).

2. ESQUISSE DE PREUVE DE (1.4) SI S EST RÉDUIT.

NOTATION (2.1). — Soit S = Spec A, A noethérien. Si N est un A-module de type fini, soit W(N) le S-foncteur en groupes $X \to \Gamma(X, \tilde{N}_{(X)})$.

Cas I. — G *est un* S-*faisceau f.p.p.f. en groupes, l.p.f., f.l. et séparé.*

Soient $X \xrightarrow{\psi} G$ un S-morphisme et $\prod^N X \xrightarrow{\sigma_N} J_n^N$ (n fixé) le morphisme $\sigma_N(x_1, \ldots, x_X) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_n(x_i)$. La théorie sur un corps de base (*cf.* [7]) montre qu'il existe : (*a*) un ouvert dense $U \subset S$ et une factorisation $\psi_U = \overline{\psi}_{nU} \circ \varphi_{nU}$, de ψ sur U; (*b*) un entier $N(n) > 0$ et un ouvert $V \subset \prod^{N(n)} X$ tel que $\sigma_{N(n)}|V$ soit fidèlement plat. On conclut l'existence et l'unicité d'un prolongement de ψ_{nV} par descente f.p.p.f. à partir de $\sigma_{N(n)}|V : V \to J_n^{N(n)}$ (G est séparé).

Remarque (2.2). — Soient L et L' deux faisceaux de Zariski en groupes commutatifs sur $\mathrm{Sch}|_S$ qui coïncident sur la sous-catégorie (pleine) des S-schémas plats notée $\mathscr{C}_S$, et une extension E d'un S-schéma en groupes plat G par L. Il existe une extension E' de G par L' telle que : (*a*) E' est scindable si et seulement si E' est scindable; (*b*) les torseurs définis par E et E' sur $\mathscr{C}_G$ coïncident.

Cas II. — G *est une extension d'un S-groupe* G' *comme dans le cas I par* W(N).

Le théorème de structure des A-modules noethériens (*cf.* [8]), (1.7), des généralités sur les prolongements d'homomorphismes (*cf.* [6], vol. I) et un argument comme celui du cas infinitésimal [*cf.* preuve de (3.2)] ramènent la preuve au cas où $N = A|P$, P étant un idéal premier de A. On se ramène au cas I par le changement de base $\mathrm{Spec}\, A|P \subsetneq \mathrm{Spec}\, A$.

3. PREUVE DE (1.4) POUR S AFFINE ET NOETHÉRIEN.

HYPOTHÈSE (3.1). — Un S-groupe vérifie l'hypothèse (3.1) s'il est extension d'un S-schéma en groupes lisses par un S-foncteur W(N).

Soit I un idéal quasi-cohérent de $\mathcal{O}_S$ de carré nul; on pose $V(I)=S_0$ et $X_0=X\underset{S}{\times}S_0$, $(J^{\bullet}_n)_0=J^{\bullet}_n\underset{S}{\times}S_0$, etc.

Pour achever la preuve de (1.4) par récurrence sur l'ordre du radical de $\mathcal{O}_S$ il suffit de prouver :

Proposition (3.2). — *Si pour tout* S_0-*groupe* G_0 *vérifiant* (3.1)

$$\mathrm{Hom}_{S_0-\mathrm{gr}}((J^{\bullet}_{\infty})_0, G_0)\to G_0(X_0)$$

est un isomorphisme, alors $\mathrm{Hom}_{S-\mathrm{gr}}(J^{\bullet}_{\infty}, G)\to G(X)$ *est un isomorphisme pour tout* S-*groupe* G *vérifiant* (3.1).

Soit $\psi\in G(X)$; par hypothèse de (3.2) on a un diagramme commutatif (pour tout $m\geqq n$) :

(3.3)
$$\begin{tikzcd}
& G_0 \arrow[r, hook] & G & \\
X_0 \arrow[ur, "\psi_0"] \arrow[r, "(\varphi_m)_0"'] & (J^{\bullet}_m)_0 \arrow[u] \arrow[r, hook] & J^{\bullet}_m \arrow[u, dashed, "(\overline{\psi}_m)_0"'] & X \arrow[ul, "\psi"'] \arrow[l, "\varphi_m"']
\end{tikzcd}$$

La flèche en pointillé dénote le prolongement de $(\psi_n)_0$ à construire.

Remarque (3.4). — Soit $L^G_I(T_0)=\mathrm{Ker}(G(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{T_0}\oplus\mathcal{O}_{T_0}\underset{\mathcal{O}_{S_0}}{\otimes}I))\to G(T_0))$; on vérifie qu'il existe un $\mathcal{O}_{S_0}$-module N de type fini tel que la restriction de L^G_I à la sous-catégorie de S_0-schémas plats coïncide avec W(N).

Soient G un S-faisceau en groupes de Zariski, f. l., l. p. f. qui vérifie (0.1), T un S-schéma et $T_0\xrightarrow{\gamma_0}G$ un S-morphisme. Sous ces hypothèses il existe un L^G_I-torseur zariskien $\mathcal{T}_{T_0}$ sur T_0 dont les propriétés sont résumées dans le :

Lemme (3.5). — (*a*) On a $\Gamma(T_0, \mathcal{T}_{T_0})\simeq$ *ensemble des* S-*morphismes* $T\xrightarrow{\gamma}G$ *tels que le composé* $T_0\hookrightarrow T\xrightarrow{\gamma}$ *soit égal à* γ_0.

(*b*) *Si* $T\xrightarrow{\alpha}T'$ *est un* S-*morphisme et si* $T_0\xrightarrow{\gamma_0}G$ *se factorise en* $\gamma_0=\gamma'_0\circ\alpha_0$ *on a* $\mathcal{T}_{T_0}\simeq\alpha_0^*(\mathcal{T}_{T'_0})$.

(*c*) *Soient* T *un* S-*schéma en groupes et* $T_0\xrightarrow{\gamma_0}G$ *un* S-*homomorphisme. Alors* $\mathcal{T}_{T_0}$ *est muni d'une structure de* S_0-*groupe qui est une extension* (*Zariski*) *de* T_0 *par* L^G_I *dont les scindages correspondent aux* S-*homomorphismes* $T\xrightarrow{\gamma}G$ *qui prolongent* γ_0 (cf. [2]).

Preuve de (3.2) Comme $\mathcal{T}_{X_0}\simeq(\varphi_n)_0^*(\mathcal{T}_{(J^{\bullet}_n)_0})$ par (3.5), (*b*) et au morphisme $X\xrightarrow{\psi}G$ correspond une section $\psi' : X_0\to\mathcal{T}_{X_0}$, il existe une flèche

$$\psi'' :\ X_0\to\mathcal{T}_{(J^{\bullet}_n)_0}\qquad\text{avec}\quad(\varphi_n)_0=\pi_n\circ\psi''(\mathcal{T}_{(J^{\bullet}_n)_0}\xrightarrow{\pi_n}(J^{\bullet}_n)_0).$$

En vertu des remarques (2.2) et (3.4) et de l'hypothèse de (3.2) il existe un entier $m \geqq n$ et un S_0-homomorphisme $(J^{\bullet}_m)_0 \xrightarrow{\overline{\psi}''_m} \mathcal{T}_{(J^{\bullet}_n)_0}$ tel que $\psi'' = \overline{\psi}''_m \circ (\varphi_m)_0$. On a donc un diagramme commutatif :

(3.6)
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_{X_0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{T}_{(J^{\bullet}_m)_0} \arrow[d, "\pi_m"] \\
X_0 \arrow[r, "(\varphi_m)_0"'] \arrow[ur, "\psi''"] & (J^{\bullet}_m)_0 \arrow[u, bend right=60, "\overline{\psi}''_m"']
\end{tikzcd}$$

On conclut que $\mathcal{T}_{(J^{\bullet}_m)_0}$ est une extension scindée de $(J^{\bullet}_m)_0$ ce qui entraîne l'existence d'un S-homomorphisme $\overline{\psi}_m$ qui prolonge $(\overline{\psi}_m)_0$ et factorise ψ.

C.Q.F.D.

(*) Remise le 18 juin 1979, acceptée le 2 juillet 1979.

[1] C. Contou-Carrère, *Sur l'existence de certaines sommes amalgamées* (à paraître).
[2] C. Contou-Carrère, *Prolongements infinitésimaux d'homomorphismes* (à paraître).
[3] A. Grothendieck, E.G.A. IV, deuxième partie, *publications I.H.E.S.*, 24.
[4] A. Grothendieck, E.G.A. IV, troisième partie, *publications I.H.E.S.*, 28.
[5] A. Grothendieck, *Fondements de la géométrie algébrique* (*Extraits du Sém. Bourbaki*, Exposés n° V et VI).
[6] A. Grothendieck et M. Demazure, *Schémas en groupes*, I et II.
[7] J.-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes*.
[8] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, chap. 3 et 4, p. 136.

Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
Institut de Mathématiques, place Eugène-Bataillon, 34060 *Montpellier Cedex.*