C. R. Acad. Sci. Paris, t. 318, Série I, p. 743-746, 1994

Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Jacobienne locale, groupe de bivecteurs de Witt universel, et symbole modéré

Carlos CONTOU-CARRÈRE

Résumé – Soit $\mathcal{X} \to \mathrm{S}$ une courbe formelle au-dessus d'un schéma affine noethérien $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}\,(\mathrm{A})$, isomorphe à $\mathrm{Spf}\,(\mathcal{O}_{\mathrm{S}}\,[[\mathrm{T}]])$. On pose $\mathcal{U} = \mathrm{Spec}\,(\mathrm{A}\,[[\mathrm{T}]]\,[\mathrm{T}^{-1}])$. On construit un S-foncteur en groupes $\mathcal{F}$ extension du complété formel du S-groupe des vecteurs de Witt universel $\check{\mathrm{W}}$ (*cf.* [1]) par le produit $\mathcal{J}$ du S-groupe des unités $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}\,[[\mathrm{T}]]^*$ par $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathrm{S}}$, et pour tout S-schéma en groupes commutatif, lisse et séparé G une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}gr}}\,(\mathcal{F},\,\mathrm{G}) \simeq \mathrm{G}\,(\mathcal{U}).$$

La construction de la bijection passe par celle d'un morphisme d'Abel-Jacobi $f\,:\,\mathcal{U} \to \mathcal{F}_{\mathrm{omb}}$, où $\mathcal{F}_{\mathrm{omb}}$ désigne un S-foncteur associé à $\mathcal{F}$. Dans le cas particulier ou $\mathrm{G} = \underline{\mathbb{G}}_{m\,\mathrm{S}}$ cette bijection provient d'un S-bi-homomorpisme $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \underline{\mathbb{G}}_{m\,\mathrm{S}}$, que l'on explicite, et qui fait de $\mathcal{F}$ son propre dual de Cartier.

Local jacobian, universal Witt bivector group and the tame symbol

Abstract – *Let* $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}\,(\mathrm{A})$, *be a noetherian affine scheme,* $\mathcal{X} \to \mathrm{S}$ *an S-formal curve isomorphic to* $\mathrm{Spf}\,(\mathcal{O}_{\mathrm{S}}\,[[\mathrm{T}]])$. *and* $\mathcal{U} = \mathrm{Spec}\,(\mathrm{A}\,[[\mathrm{T}]]\,[\mathrm{T}^{-1}])$. *Let* G *be any commutative, smooth and separated* S-*group scheme. We construct an* S-*group extension* $\mathcal{F}$ *of the completion* $\check{\mathrm{W}}$, *of the universal* S-*Witt vector group* W, *by the group of units* $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}\,[[\mathrm{T}]]^*$, *we associate an* S-*functor* $\mathcal{F}_{\mathrm{omb}}$ *to* $\mathcal{F}$, *we define an Abel-Jacobi morphism* $f\,:\,\mathcal{U} \to \mathcal{F}_{\mathrm{omb}}$, *which sets up an isomorphism*

$$(\star) \qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}gr}}\,(\mathcal{F},\,\mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}\,(\mathcal{U}).$$

We define an S-bihomomorphism $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \underline{\mathbb{G}}_{m\,\mathrm{S}}$, *identifying* $\mathcal{F}$ *to its own dual group, and inducing the isomorphism* $(\star)$ *if* $\mathrm{G} = \underline{\mathbb{G}}_{m\,\mathrm{S}}$.

1. DÉFINITIONS. – Soient $\mathrm{S} = \mathrm{Spec}\,(\mathrm{A})$ et $\mathcal{X} \to \mathrm{S}$ un S-schéma formel isomorphe à $\mathrm{Spf}\,(\mathcal{O}_{\mathrm{S}}\,[[\mathrm{T}]])$ donné par une A-algèbre adique augmentée B isomorphe à $\mathrm{A}\,[[\mathrm{T}]]$. Notons par I le noyau de l'augmentation $\mathrm{B} \to \mathrm{A}$ et par $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ l'idéal donné par I. On pose $\mathcal{X}_n = \mathrm{Spec}\,(\mathrm{B}/\mathrm{I}^{n+1}) = \mathrm{V}\,(\mathcal{I}^{n+1})\,(n \in \mathbb{N})$ et $\mathrm{D} = \mathcal{X}_0$, et pour tout S-schéma $\mathrm{S}'\,:\,\mathcal{I}_{\mathrm{S}'} = \mathcal{O}_{\mathrm{S}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}}} \mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{S}'}}$. On choisit un générateur T de $\mathcal{I}$. On désigne par $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{S}'}}\,[\mathcal{I}_{\mathrm{S}}^{-1}] = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{S}'}}\,[\mathrm{T}^{-1}]$ le faisceau en anneaux de fractions de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{S}'}}$ par rapport aux sections de $\mathcal{I}_{\mathrm{S}'}$ qui sont localement (en S′) des générateurs. On définit un S-faisceau de Zariski en groupes commutatifs par

$$(1.1) \qquad \begin{gathered} \mathcal{F}\,:\,\mathrm{S}' \mapsto \Gamma\,(\mathcal{X}_{\mathrm{S}'},\,\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{S}'}}\,[\mathcal{I}_{\mathrm{S}'}^{-1}]^*) = \Gamma\,(\mathcal{X}_{\mathrm{S}'},\,\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{S}'}}\,[\mathrm{T}^{-1}]^*) \\ [\text{resp.}\,\mathcal{J}^0\,:\,\mathrm{S}' \mapsto \Gamma\,(\mathcal{X}_{\mathrm{S}'},\,\mathcal{O}^*_{\mathcal{X}_{\mathrm{S}'}}),\ \mathcal{J}^0_n\,:\,\mathrm{S}' \mapsto \Gamma\,(\mathcal{X}_{n\,\mathrm{S}'},\,\mathcal{O}^*_{\mathcal{X}_{\mathrm{S}'}})] \end{gathered}$$

Soit $\mathcal{J}$ (resp. $\mathcal{J}_n$) le S-sous-faisceau en groupes de $\mathcal{F}$ engendré par $\mathcal{J}^0$ (resp. $\mathcal{J}^0_n$) et les sections qui sont localement des générateurs de $\mathcal{J}$.

On a la suite exacte scindée suivante :

$$(1.2) \qquad 1 \to \mathcal{J} \to \mathcal{F} \to \check{\mathrm{W}} \to 1 \qquad (\text{resp. une augmentation}\,\mathcal{F} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_{\mathrm{S}})$$

qui résulte du lemme suivant.

Note présentée par Jacques TITS.

0764-4442/94/03180743 $ 2.00 © Académie des Sciences

LEMME (1.3). – *Soit* C *une* A-*sous-algèbre de* A [[T]] *contenant* T *et telle que* A $\simeq$ C/TC. *Alors toute unité u de* C $[\mathrm{T}^{-1}]$ *s'écrit de façon unique sous la forme* $u = \mathrm{T}^{\underline{n}}\, u'\, u''$, *où* $\underline{n} \in \mathrm{T}\,\Gamma(\mathrm{Spec}(\mathrm{A}), \underline{\mathbb{Z}})$, $u' \in \mathrm{C}^*$, *et* $u'' = a_{-r}\,\mathrm{T}^{-r} + \ldots + a_{-1}\,\mathrm{T}^{-1} + 1$, *avec* $a_{-r}, \ldots, a_{-1}$ *des nilpotents de* A.

On pose $\mathcal{F}^{\underline{\nu}} = \epsilon^{-1}(\underline{\nu})$ si $\underline{\nu}$ est une section de $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathrm{S}}$.

DÉFINITION (1.4). – Soit $\underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathcal{X}/\mathrm{S}}$ le S-foncteur en groupes abéliens défini par

$$\underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathcal{X}/\mathrm{S}}(\mathrm{S}') = \{\mathrm{K} | \mathrm{K} \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{S}'}}[\mathrm{T}^{-1}] \text{ avec } \mathrm{K} = u\,\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{S}'}} \text{ oú } u \in \Gamma(\mathcal{X}_{\mathrm{S}'}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{S}}}[\mathrm{T}^{-1}]^*)\},$$

c'est-à-dire que $\underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathcal{X}/\mathrm{S}}(\mathrm{S}')$ est égal à l'ensemble des idéaux fractionnaires inversibles (i.f.i.) de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{S}'}}[\mathrm{T}^{-1}]$.

Par définition de $\underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathcal{X}/\mathrm{S}}$ on a un épimorphisme

$$\mathcal{F} \to \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathcal{X}/\mathrm{S}} \tag{1.5}$$

envoyant une section u de $\mathcal{F}(\mathrm{S}')$ sur le i.f.i. $u\,\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{S}'}}$ de $u\,\mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathrm{S}'}}[\mathrm{T}^{-1}]$. Noter que l'augmentation (1.2) induit une augmentation $\epsilon : \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathcal{X}/\mathrm{S}} \to \underline{\mathbb{Z}}_{\mathrm{S}}$. On pose $\underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}^{\underline{\nu}}_{\mathcal{X}/\mathrm{S}} = \epsilon^{-1}(\underline{\nu})$ si $\underline{\nu}$ est une section de $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathrm{S}}$. On a alors une suite exacte de faisceaux

$$1 \to \mathcal{J}^0 \to \mathcal{F} \to \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathcal{X}/\mathrm{S}} \to 1 \tag{1.6}$$

$$[\text{resp. } 1 \to \mathcal{J} \to \mathcal{F} \to \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}^0_{\mathcal{X}/\mathrm{S}} \to 1 \text{ qui correspond à (1.2)}]$$

qui entraîne un isomorphisme canonique

$$\underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathcal{X}/\mathrm{S}} \simeq \check{\mathrm{W}} \times \underline{\mathbb{Z}}_{\mathrm{S}} \qquad (\text{resp. } \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}^0_{\mathcal{X}/\mathrm{S}} \simeq \check{\mathrm{W}}). \tag{1.7}$$

Soit $\mathcal{I}_\Delta \subset \mathcal{O}_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}$ l'idéal de définition du sous-schéma diagonal $\Delta \subset \mathcal{X} \times \mathcal{X}$. L'image de $\mathcal{I}_\Delta$ par le morphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}[\mathrm{T}^{-1}]$ est un i.f.i. de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}\times\mathcal{X}}[\mathrm{T}^{-1}]$ et donne lieu à une section γ^1 de $\underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}_{\mathcal{X}/\mathrm{S}}$ au-dessus de $\mathcal{X}$. On désigne par γ_0 la section de $\underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}^0_{\mathcal{X}/\mathrm{S}}$ définie à partir de γ^1 et de (1.6).

Le morphisme $\gamma^0 : \mathcal{X} \to \check{\mathrm{W}} \simeq \underline{\mathcal{P}\mathrm{ic}}^0_{\mathcal{X}/\mathrm{S}}$ induit pour tout entier $m \geqq 0$ un morphisme

$$\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathcal{X}) \to \check{\mathrm{W}} \tag{1.8}$$

de la i-ième puissance symétrique de $\mathcal{X}$ vers $\check{\mathrm{W}}$ qui nous permet d'identifier $\mathrm{Sym}^{(m)}(\mathcal{X})$ à un sous-schéma formel de $\check{\mathrm{W}}$. On vérifie facilement que

$$\check{\mathrm{W}} = \varinjlim_{m} \mathrm{Sym}^{(m)}(\chi), \tag{1.9}$$

la limite inductive étant prise dans la catégorie des S-faisceaux fppf. On désigne par ${}^{(m)}\mathcal{F}$ le $\mathcal{J}$-torseur au-dessus de $\mathrm{Sym}^{(m)}(\chi)$ défini à partir de (1.6) et de (1.8), et par ${}^{(m)}\mathcal{F}^{\underline{\nu}}$, pour toute section $\underline{\nu}$ de $\underline{\mathbb{Z}}_{\mathrm{S}}$, le $\mathcal{J}^0$-torseur donné par l'augmentation ${}^{(m)}\mathcal{F} \to \underline{\mathbb{Z}}_{\mathrm{S}}$ induite par ϵ.

2. OMBRE DE $\check{\mathrm{W}}$ ET $\mathcal{F}_{\mathrm{omb}}$. – Supposons maintenant S = Spec (A) nœthérien. Il existe un foncteur de la catégorie des S-schémas formels nœthériens vers celle des S-espaces localement annelés X $\mapsto$ omb (X) qui associe à tout S-schéma formel nœthérien X un S-espace localement annelé omb (X) tel que :

(i) si X = Spf (C), où C est une A-algèbre adique nœthérienne on a

$$\mathrm{omb}(\mathrm{X}) = \mathrm{Spec}(\mathrm{C});$$

(ii) il existe un homomorphisme fonctoriel $i_X : X \to \operatorname{omb}(X)$ tel que i_X est un homéomorphisme de X sur une partie fermée X′ de omb (X) de manière que l'on retrouve X comme le complété formel de omb (X) le long de X′;

(iii) i_X permet d'établir une équivalence des catégories entre la catégorie des modules cohérents sur le schéma formel X et celle des modules cohérents sur omb (X);

(iv) si τ est un G-torseur de Zariski sur X, avec G un S-schéma localement de présentation finie, alors il existe un G-torseur τ_{omb} au-dessus de omb (X) tel que les scindages de τ_{omb} sont en correspondance avec les scindages de τ sur X, et tel que l'on récupère τ comme l'image inverse $i_X^*(\tau_{\mathrm{omb}})$.

Notons par ${}^{(m)}\mathcal{F}_{\mathrm{omb}}$ le $\mathcal{J}$-torseur au-dessus de $\operatorname{omb}(\operatorname{Sym}^{(m)}(\mathcal{X}))$ associé à ${}^{(m)}\mathcal{F}$ selon (iv). On pose

$$\text{(2.1)} \qquad \operatorname{omb}(\check{\mathrm{W}}) = \varinjlim_{m} \operatorname{omb}(\operatorname{Sym}^{(m)}(\mathcal{X})) \qquad (\text{resp.}\ \mathcal{F}_{\mathrm{omb}} = \varinjlim_{m} {}^{(m)}\mathcal{F}_{\mathrm{omb}}),$$

où la limite est prise dans la catégorie des S-faisceaux fppf, et

$$\mathcal{U} = \operatorname{omb}(\mathcal{X}) - \mathrm{D} = \operatorname{Spec}\left(\mathrm{A}\,[[\mathrm{T}]]\,[\mathrm{T}^{-1}]\right).$$

On a que $\mathcal{F}_{\mathrm{omb}}$ est un $\mathcal{J}$-torseur au-dessus de $\operatorname{omb}(\check{\mathrm{W}})$. Noter que le $\mathcal{J}^0$-torseur $({}^{(m)}\mathcal{F}^{\nu})_{\mathrm{omb}}$ s'identifie au $\mathcal{J}^0$-torseur $\mathcal{F}^{\nu}_{\mathrm{omb}}$ que l'on définit à partir du prolongement de ϵ à $\mathcal{F}_{\mathrm{omb}}$.

Soit $\operatorname{omb}(\mathcal{I}_\Delta)$ le $\mathcal{O}_{\operatorname{omb}(\mathcal{X}\times\mathcal{X})}$-module inversible donné par $\mathcal{I}_\Delta$ [*cf.* (iii)], et notons par $\operatorname{omb}(\mathcal{I}_\Delta)'$ le $\mathcal{O}_{\mathcal{X}\times\operatorname{omb}(\mathcal{X})}$-module inversible induit par restriction de $\operatorname{omb}(\mathcal{I}_\Delta)$ à $\mathcal{X}\times\operatorname{omb}(\mathcal{X}) \to \operatorname{omb}(\mathcal{X}\times\mathcal{X})$. On désigne par $\operatorname{omb}(\mathcal{I}_\Delta)^*$ le fibré principal associé à $\operatorname{omb}(\mathcal{I}_\Delta)'$, et par $\mathrm{pr}_*(\operatorname{omb}(\mathcal{I}_\Delta)^*)$ le faisceau image directe de $\operatorname{omb}(\mathcal{I}_\Delta)^*$ par $\mathrm{pr} : \mathcal{X}\times\operatorname{omb}(\mathcal{X}) \to \operatorname{omb}(\mathcal{X})$.

Il est clair que $\mathrm{pr}_*(\operatorname{omb}(\mathcal{I}_\Delta)^*)$ est un $\mathcal{J}^0$-torseur. On vérifie qu'il existe un isomorphisme

$${}^{(1)}\mathcal{F}^1_{\mathrm{omb}} \simeq \mathrm{pr}_*(\operatorname{omb}(\mathcal{I}_\Delta)^*),$$

et qu'un générateur de $\mathcal{I}_\Delta$ donne lieu à un générateur de $\operatorname{omb}(\mathcal{I}_\Delta)$ dont la restriction à $\mathcal{X}\times\mathcal{U} \to \mathcal{X}\times\operatorname{omb}(\mathcal{X})$ est inversible, donc $\underline{1} \in \Gamma(\mathcal{X}\times\mathcal{U}, \operatorname{omb}(\mathcal{I}_\Delta)^*)$. On a ainsi un S-morphisme $\mathcal{U} \to {}^{(1)}\mathcal{F}^1_{\mathrm{omb}}$, et l'on désigne par $f : \mathcal{U} \to \mathcal{F}_{\mathrm{omb}}$ sa composition avec ${}^{(1)}\mathcal{F}^1_{\mathrm{omb}} \to \mathcal{F}_{\mathrm{omb}}$ (morphisme d'Abel-Jacobi).

On a $\mathcal{F}(\mathcal{X}) = (\mathrm{B}\hat{\otimes}_{\mathrm{A}}\mathrm{B})[\mathrm{T}^{-1}]$, où l'on pose $\mathrm{T} = \mathrm{T}\otimes 1$ et $t = 1\otimes\mathrm{T}$. La section $\gamma^0_{\mathrm{T}} = 1 - t\,\mathrm{T}^{-1}$ est un relèvement de γ^0 (et donne lieu à un scindage de ${}^{(1)}\mathcal{F}$) lequel induit un scindage ${}^{(1)}\mathcal{F}_{\mathrm{omb}} \simeq \operatorname{omb}(\mathcal{X})\times\mathcal{J}$ [*cf.* (iv)]. Alors f correspond à la section de $\mathcal{J}$ au-dessus de $\mathcal{U}$ donnée par $-\varphi^1_{\mathrm{T}} = -\mathrm{T}\,(t-\mathrm{T})^{-1}$.

3. Énoncé du théorème principal et autodualité de $\mathcal{F}$. – Soient S comme au 2, et G un S-schéma en groupes commutatif, lisse et séparé. Un S-homomorphisme $h : \mathcal{F} \to \mathrm{G}$ donne lieu à un unique S-morphisme $h_{\mathrm{omb}} : \mathcal{F}_{\mathrm{omb}} \to \mathrm{G}$. On a ainsi une application injective

$$i : \quad \operatorname{Hom}_{\text{S-gr}}(\mathcal{F}, \mathrm{G}) \to \operatorname{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_{\mathrm{omb}}, \mathrm{G}).$$

Théorème (3.1). – *Soient* S *et* G *comme ci-dessus. Le morphisme d'Abel-Jacobi* $f : \mathcal{U} \to \mathcal{F}_{\mathrm{omb}}$ *donne une flèche* $\operatorname{Hom}_{\mathrm{S}}(\mathcal{F}_{\mathrm{omb}}, \mathrm{G}) \to \mathrm{G}(\mathcal{U})$ *dont la restriction à l'image de i induit une bijection*

$$\operatorname{Hom}_{\text{S-gr}}(\mathcal{F}, \mathrm{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{G}(\mathcal{U}).$$

La preuve de (3.1) résulte de la commutativité du diagramme naturel

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}gr}}(\tilde{\mathrm{W}}, \mathrm{G}) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}gr}}(\mathcal{F}, \mathrm{G}) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}gr}}(\mathcal{J}, \mathrm{G}) & \to 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 \to \mathrm{G}(\mathrm{omb}(\chi))^{+} & \to & \mathrm{G}(\mathcal{U}) & \to & \mathrm{G}(\mathcal{U})/\mathrm{G}(\mathrm{omb}(\chi))^{+} & \to 1, \end{array}$$

où l'on pose $\mathrm{G}(\mathrm{omb}(\mathcal{X}))^{+} = \mathrm{Ker}(\mathrm{G}(\mathrm{omb}(\mathcal{X})) \to \mathrm{G}(\mathrm{S}))$, dont la ligne supérieure (resp. inférieure) est scindée [*cf.* (1.2)] (resp. exacte car G est séparé), et la première flèche verticale est induite par γ_{T}^{0} (*cf.* [1]) et la troisième par $-\varphi_{\mathrm{T}}^{1}$ (*cf.* [2]).

Si l'on pose $\mathrm{G} = \underline{\mathbb{G}}_{m\,\mathrm{S}}$ le théorème (3.1) donne

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{S\text{-}gr}}(\mathcal{F}, \underline{\mathbb{G}}_{m\,\mathrm{S}}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathcal{U}, \underline{\mathbb{G}}_{m\,\mathrm{S}}) = \mathcal{F}(\mathrm{S}),$$

où l'égalité résulte de la définition de $\mathcal{F}$.

Or cet isomorphisme est induit par un accouplement $\mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \underline{\mathbb{G}}_{m}$ que l'on explicite comme suit dans le cas où A a toutes ses caractéristiques résiduelles nulles.

Supposons $\mathrm{B} = \mathrm{A}[[\mathrm{T}]]$ et

$$u = \mathrm{T}^{\epsilon(u)}\left(1 + \frac{a_{-1}}{\mathrm{T}} + \ldots + \frac{a_{-n}}{\mathrm{T}^{n}}\right)(a_0 + a_1\,\mathrm{T} + \ldots)$$

$$v = \mathrm{T}^{\epsilon(v)}\left(1 + \frac{\alpha_{-1}}{\mathrm{T}} + \ldots + \frac{\alpha_{-n}}{\mathrm{T}^{n}}\right)(\alpha_0 + \alpha_1\,\mathrm{T} + \ldots)$$

On pose $\partial_m w = \mathrm{Res}\,(\mathrm{T}^{m}\,(dw/w))\ (m \in \mathbb{Z})$ si $w \in \mathrm{A}[[\mathrm{A}]]\,[\mathrm{T}^{-1}]$. Alors on a la formule :

$$\langle u, v\rangle = (-1)^{\epsilon(u)\,\epsilon(v)} \left(\frac{a_0^{\epsilon(v)}}{\alpha_0^{\epsilon(u)}}\right) \frac{\exp\left(\sum_{m>0} (\partial_m u\, \partial_{-m} v)/m\right)}{\exp\left(\sum_{m>0} (\partial_m v\, \partial_{-m} u)/m\right)}$$

On arrive à la situation générale par la transformation de Witt universelle.

Note remise le 29 novembre 1993, acceptée le 9 février 1994.

Références bibliographiques

[1] P. Cartier, Groupes formels associés aux anneaux de Witt généralisés, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 265, série A, 1967, p. 49.

[2] C. Contou-Carrère, Corps de classes local géométrique relatif, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 292, série I, 1981, p. 000.

Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
Laboratoire de Physique Mathématique et Théorique,
place Eugène-Bataillon, 34060 Montpellier Cedex, France.