Notice sur les travaux de Mr. Pierre Deligne

Parties I et II

par

Alexander Grothendieck

Transcription by

CSG ISTITUTO GROTHENDIECK

Edited by Mateo Carmona
mateo.carmona@csg.igrothendieck.org
Centre for Grothendieckian Studies (CSG)
Grothendieck Institute
Corso Statuto 24, 12084 Mondovì, Italy

This transcription is derived from unpublished scans provided jointly by the IHÉS archive and Pierre Deligne, with his authorization. This project was carried out by researchers and volunteers of the CSG under the supervision of Mateo Carmona. More details are available at:
https://csg.igrothendieck.org/transcriptions/

How to cite:

Alexander Grothendieck. *Notice sur les travaux de Mr. Pierre Deligne*. Parties I et II. Unpublished notes, 1968/69. Transcription by M. Carmona et al., CSG, Grothendieck Institute. Draft, April 2024.

NOTICE SUR LES TRAVAUX DE MR. PIERRE DELIGNE
par A. Grothendieck

1968

Les travaux qui suivent correspondent à environ deux années d'activité scientifique de Mr. Deligne à Bures (séparées par une année de service militaire, où cette activité a été quasi-interrompue). Le rapporteur ne mentionne que les résultats qui lui semblent les plus importants, et dont chacun pourrait constituer constituer au moins le résultat central d'une excellente thèse en doctorat. L'ordre suivi est plus ou moins l'ordre chronologique.

1) **Une suite spectrale de descente** en théorie de cohomologie des faisceaux, relative à une application continue surjective $f : X \longrightarrow Y$ (ou un morphisme surjectif de schémas, etc) satisfaisant à une hypothèse supplémentaire assez faible, vérifiée par exemple si f est *propre* : $\mathrm{H}(X,F) \Longleftarrow E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p$ $(s \mapsto \mathrm{H}^q((X/Y)^{s+1},F))$. Cette suite spectrale généralise celle de Leray pour un recouvrement ouvert ou fermé de Y (en prenant pour X la somme disjointe des objets du recouvrement). Elle s'insère dans une technique de localisation due à Deligne, qui semble fort commode en algèbre homologique. Elle sert par exemple à ramener certaines propriétés cohomologiques de variétés algébriques ou analytiques quelconques au cas non singulier, en utilisant la résolution des singularités.

2) **Divers résultats en théorie des topos** (i.e. en **topologie**, conçue dans le

point de vue de la théorie des faisceaux). Le plus frappant affirme qu'un topos "localement de type fini" a "assez de points" ; ce résultat s'applique à tous les topos (= espaces topologiques généralisés) qu'on a rencontrés jusqu'à présent en géométrie algébrique, et même à des topos qu'on rencontre en analyse p-adique. C'est ainsi que le résultat de Deligne implique que la structure d'espace "rigide-analytique" au sens de Tate, sur un corps valué complet non archimédien (notion qui a fait l'objet de travaux extensifs de Grauert, Remmert, Kiehl dans ces dernières années) peut-être réduite à la notion habituelle d'espace topologique localement annelé. Les nouveaux "points" des espaces rigide-analytiques, prédits par le théorème de Deligne, ont par la suite pu être déterminés explicitement par Kiehl. Ce résultat sur les espaces rigides-analytiques était entièrement inattendu.

Parmi d'autres résultats techniques intéressants, citons le fait que la notion de platitude d'un Module sur un topos annelé se conserve par images inverses.

3) **Nouvelle approche en théorie de dualité des faisceaux cohérents**, qui simplifie considérablement la structure de la théorie, telle qu'elle avait été développée dans le Séminaire Hartshorne en 1964 (cf. Springer, Lecture Notes N° 20) d'après des notes du rapporteur. L'idée nouvelle consiste en une définition très ingénieuse d'une "cohomologie à supports propre" (pour un morphisme séparé de type fini $f : X \longrightarrow Y$ de schémas noethériens), qui permet alors de transcrire dans le contexte donné des constructions de Verdier en topologie ordinaire, notamment du foncteur $f^!$ comme "adjoint" du foncteur $\mathrm{R}f_!$ "cohomologie à supports propre" ; cf. lettre de Deligne reproduite à la fin du Séminaire Hartshorne.

   Mr. Deligne a également des idées intéressants sur la façon dont cette théorie peut être généralisée, pour englober aussi les complexes dont les différentielles sont des opérateurs différentiels. Le rapporteur lui a conseillé de laisser le développement de ces idées à des futurs élèves, le travail qui reste à faire étant long mais en partie de nature routinière, et pouvant être fait par des chercheurs n'ayant pas les moyens de Deligne.

4) **Trivialité cohomologique d'un morphisme projectif et lisse** $f : X \longrightarrow Y$

de schémas (correspondant intuitivement à un fibration sur Y à fibres de variétés projectives non singulières). En d'autres termes la suite spectrale de Leray pour la cohomologie ℓ-adique — ou à coefficients réels dans le cas du corps de base **C** — dégénère. Ce théorème est prouvé par Deligne module le "Théorème de Lefschetz" pour la cohomologie des fibres. Sa démonstration s'applique également dans le contexte des variétés analytiques, pour une fibration analytique complexe à fibres compactes kähleriennes. Un cas très particulier de ce théorème, relatif au cas où le système local de la cohomologie des fibres était trivial, constituait le résultat principal de la thèse de Blanchard ; mais l'hypothèse de Blanchard n'est réalisée dans presque aucun cas intéressant en géométrie. La démonstration de Deligne est différente bien entendu de celle de Blanchard, que Deligne ne connaissait pas.

Déjà du point de vue transcendant, l'intérêt du résultat de Deligne pour la topologie des variétés analytiques est évident. Dans l'optique du rédacteur cependant, ce sont ses implications en géométrie algébrique abstraite, et à longue échéance, à la théorie des nombres, qui sont les plus intéressantes. Ce sont d'ailleurs des considérations arithmétiques qui avaient amené le reporteur à communiquer à Deligne l'énoncé précédent comme une conjecture. Grâce au théorème de Deligne, on peut voir par exemple que les hypothèses de Riemann-Weil en géométrie diophantine, interprétées en termes des propriétés d'un endomorphisme de frobénius sur la cohomologie ℓ-adique, impliquent des propriétés analogues dans le cas de coefficients tordus (pouvant avoir des singularités quelconques, de plus). Le théorème de Deligne sera un des nombreux ingrédients techniques indispensables pour développer la "théorie des motifs", qui sera une sorte de synthèse géométrico-arithmétique des nombreuses théories cohomologiques dont on dispose à présent pour les variétés algébriques, et des représentations linéaires de groupes de Galois arithmétiques auxquelles ces théories donnent naissance.

5) **Solution du problème d'introduction d'une –structure** (correspondant à la notion de puissance extérieure) **dans l'anneau** $\mathrm{K}^\bullet(X)$ (dit "de Grothendieck") d'un espace topologique localement annelé (par exemple une variété analytique, ou différentiable, ou un schéma), construit à l'aide

de la catégorie des complexes “parfaits” sur X. Ce problème était signalé comme le plus important problème resté en suspens dans le Séminaire de Géométrie algébrique de l'IHES 1966/67, sur le théorème de Riemann–Roch. La nécessité de travailler avec le $\mathrm{K}^\bullet$ défini en termes de *complexes* parfaits, plutôt que de *fibrés* vectoriels seulement, est imposé par des impératifs techniques irrécusables, qui finiront certainement par s'imposer aussi en dehors de la géométrie algébrique. La solution de Deligne, comme prévu, passe par l'intermédiaire d'une construction de foncteurs puissances extérieures dans la catégorie dérivée $\mathrm{D}(X)$ (catégorie de complexes de modules sur X, — en fait, il faut se borner ici aux complexes de *chaînes*), en utilisant la théorie de Dold-Puppe. La difficulté sérieuse consistait à prouver que ces opérations dans $\mathrm{K}^\bullet(X)$ satisfont aux propriétés algébriques habituelles, permettant s'exprimer par exemple $\lambda^i(xy)$ comme polynôme universel à coefficients entiers en les $\lambda^j(x)$, $\lambda^k(y)$. Deligne procède par une voie très ingénieuse, en déterminant d'abord la structure du –anneau de toutes les “opérations tensorielles universelles” qu'on peut effectuer sur des fibrés vectoriels. Il n'a écrit sa théorie que lorsqu'on travaille au dessus d'un corps de base (de caractéristique arbitraire). Mais il est hors de doute pour le rapporteur qu'il n'y aura aucune difficulté essentielle pour étendre cette démonstration au cas général. Ici encore, la tâche de généralisation et d'une rédaction d'ensemble sera confiée sans doute à un futur élève de Deligne.

6) **Travaux sur la conjecture de Ramanuyan**. Il s'agit de la conjecture sur les coefficients $\tau(p)$ de la fonction de Ramanuyan, Δ

$$\tau(p) \leq 2\sqrt{p}, \quad \text{pour } p \text{ premier.}$$

Des idées récentes (Sato, Ihara) amenaient à penser que cette inégalité devait être une conséquence de l'hypothèse de Weil-Riemann sur les variétés algébriques sur les corps finis. D'autre part, dans un ordre d'idées proche, Serre conjecturait que la fonction $p \mapsto \tau(p)$ pouvait s'interpréter (pour $p \neq$ nombre premier fixé ℓ) en termes des traces des éléments de Frobenius associés à une représentation ℓ-adique convenable, de degré 2, du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, ou plus précisément du quotient de ce groupe qu'on peut interpréter comme groupe fondamental de Spec($\mathbf{Z}$) $-\{\ell\}$. Comme Serre a montré dans un exposé récent au Séminaire Pisot, on peut de sa conjecture déduire une quantité de conséquences fort intéressantes sur des propriétés de congruence et certaines propriétés asymptotiques de la fonction τ, expliquant et dépassant ainsi bon nombre de résultats épars obtenus par calcul.

Deligne donne une construction générale des représentations ℓ-adiques associées à des formes modulaires (pas seulement à Δ), et prouve par là à la fois la conjecture de Serre, et le fait que la conjecture de Ramanuyan est bien un cas particulier de celle de Riemann-Weil. Sa théorie (qu'il est en train de développer dans un séminaire à l'IHES) travaille systématiquement avec le "site modulaire" pour les courbes elliptiques (introduit par Mumford), et notamment avec la cohomologie ℓ-adique de celui-ci, qui fournit les représentations cherchées. D'ailleurs, sa construction via les sites modulaires donne une façon systématique de construire de nombreux "motifs" lisses au dessus de Spec($\mathbf{Z}$) tout entier, contrairement à une conjecture hâtive du rapporteur, qui pensait qu'il n'y avait d'autres motifs lisses sur Spec($\mathbf{Z}$) que les puissances tensorielles du motif dit "de Tate" (qui est de nature triviale). Le point est qu'on ne connaît aucun schéma lisse et propre sur tout Spec($\mathbf{Z}$) qui ne soit de nature triviale (telles les grassmaniennes et autres espaces homogènes rationnels, provenant de la théorie des groupes linéaires semi-simples), alors que les sites modulaires fournissent de nombreux exemples remarquables de "sites étales" (= schémas généralisés) lisses et propres sur Spec($\mathbf{Z}$), dont la cohomologie motivique fournit alors des motifs non triviaux lisses sur Spec($\mathbf{Z}$).

7) **Connexité des variétés modulaires pour les courbes algébriques de genre** g. La question est de connecter deux courbes algébriques (projectives, connexes, non singulières, sur un corps algébriquement clos) de même genre g par une famille algébrique, paramétrée par une variété algébrique connexe. Sur le corps des complexes, cette question était déjà familière aux géomètres italiens, et aucune démonstration transcendante (la seule connue) résulte de la théorie de Teichmüller, qui implique que le revêtement universel des variétés modulaires "avec échelons" est même contractile. La rapporteur

avait suggéré il y a sept ou huit ans d'utiliser ce résultat transcendant, et le théorème de connexité en géométrie algébrique, pour prouver le même résultat en caractéristique quelconque par "spécialisation". Cela demandait cependant une définition géométrique et une étude soigneuse de la "compactification" des variétés modulaires, offrant des difficultés très sérieuses, qui avaient en particulier arrêté Mumford, qui s'intéresse à ce problème depuis longtemps. Ces difficultés viennent d'être surmontées par Deligne, toujours en s'inspirant de la technique des sites modulaires, donnant un langage plus souple qui celui des variétés (ou schémas) modulaires. (Simultanément, une démonstration a été également trouvée par Mumford, utilisant les mêmes ingrédients techniques essentiels, par une méthode en apparence moins "sophistiquée", mais qui à mon avis ne donne pas autant de "insight" que celle de Deligne). La démonstration de Deligne s'applique également aux diverses variétés modulaires "avec niveaux", correspondant aux structures supplémentaires de nature discrète (base d'homologie ou du groupe fondamental etc) qu'on peut imposer à une courbe algébrique pour éliminer ses automorphismes.

Ici, comme dans ses travaux sur la conjecture de Ramanuyan, le trait frappant est l'aisance et la conséquence avec laquelle Deligne arrive à appliquer aux "sites étales" les constructions familières en géométrie algébrique, telle le procédé de normalisation de Zariski, pour en tirer partie pour les problèmes qui l'intéressent. Après ces travaux, il ne fait plus de doute que les "sites étales" ont droit de cité en géométrie algébrique au même titre que les schémas et les "variétés" (à la Artin) qu'ils généralisent, et qu'on est là en présence d'un nouvel élargissement substantiel de la géométrie algébrique.

NOTICE SUR LES TRAVAUX DE DELIGNE (suite)
par A. Grothendieck (Avril 1969)

Bures, le 29 Avril 1969

8) **Catégories triangulées ℓ-adiques** (thèse de J. P. Jouanolou). En plus de la définition des faisceaux ℓ-adiques, il est nécessaire, pour avoir un formalisme maniable en cohomologie étale des schémas, de définir en termes de "pro-objets" convenables une catégorie triangulée au sens de Verdier, jouant le rôle d'une "catégorie dérivée" pour les faisceaux ℓ-adiques, et de définir dans ces catégories les opérations habituelles de l'algèbre homologique. J'avais proposé cette question comme travail de thèse à Mr. Jouanolou, qui a piétiné sur place pendant un au ou deux, jusqu'à ce que Deligne lui fournisse le maître d'oeuvre d'une théorie satisfaite, que Mr. Jouanolou est en train de développer de façon détaillée.

9) **Théorie globale du complexe cotangent relatif de André-Quillen** (thèse de L. Illusie). André et Quillen avaient développé, pour une algèbre commutative B sur un anneau A, une variante cohomologique du module des différentielles relatives, appelée complexe cotangent relatif de B sur A. Pour des questions globales de déformations de structure diverses, il était très désirable d'avoir une variante globale de cette construction pour un espace (ou un topos) annelé sur un autre. Le rapporteur avait développé une telle théorie globale pour le tronqué du degré 1 du complexe cotangent relatif. Une définition très simple dans le cas général du complexe cotangent tout entier a

été proposée par Deligne, qui est actuellement expoitée par L. Illusie. Dans le même ordre d'idées, signalons le résultat suivant obtenu par Deligne à l'aide du complexe cotangent relatif local (par un argument de nature essentiellement classique) : si X est un espace analytique compact tel que l'espace analytique réduit associé X_{red} soit algébrique, X est algébrique. Ce même argument s'applique également dans le cas relatif au-dessus d'un espace analytique quelconque S, ou dans le cadre de la géométrie rigide-analytique, ou dans le cadre de la géométrie formelle.

10) **Solution d'une question soulevée par F. M. ATIYAH et L. GARDING sur la cohomologie de De Rham des variétés algébriques non compactes sur le corps C des complexes**. Si X est une telle variété, lisse sur **C**, et si Y est un diviseur à croisements normaux dans X, alors Deligne prouve que la cohomologie de De Rham de $X - Y$ peut se calculer comme l'hypercohomologie de X à valeurs dans le complexe des formes sur X qui sont régulières sur $X - Y$ et qui ont des *pôles simples au plus* le long de Y, ainsi que leur différentielle extérieure. Dans le cas $X - Y$ affine qui intéressait Atiyah et Garding, cela signifie qu'il suffit de prendre le complexe de De Rham ordinaire de $X - Y$, mais en se bornant aux formes différentielles algébriques sur $X - Y$ qui ont, ainsi que leur différentielle, des pôles simples au plus le long de Y. En même temps, Deligne montre que la cohomologie complexe d'une partie algébrique (i.e. fermée au sens de Zariski) Y d'un X lisse (Y pas nécessairement à croisements normaux) peut se calculer comme la limite projective des cohomologies de De Rham des voisinages infinitésimaux de Y dans X (cohomologies qu'on peut au choix interpréter du point de vue purement algébrique, ou du point de vue des faisceaux analytiques).

11) **Théorie des types pour la cohomologie complexe des schémas algébriques sur le corps C des complexes, application à la "conjecture de Tate complexe analytique" et à la semi-simplicité des groupes de monodromie**. Deligne arrive à définir sur la cohomologie complexe d'un schéma algébrique X sur **C** une structure remarquable, qu'il appelle "structure de Hodge mixte", généralisant la structure de Hodge bien connue dans le cas où X est projective (bigraduation plus réseau entier). Il y parvient en utilisant

à fond la résolution des singularités, sa théorie de descente cohomologique (cf. 1)), et les idées qu'il a développées à propos de 10). Ces structures de Hodge mixtes apparaissent dès maintenant comme un outil extrêmement puissant, dont l'importance pour les schémas généraux sur le corps des complexes semble tout à fait comparable à celle de la théorie de Hodge ordinaire dans le cas des schémas projectifs lisses. Dans un certain sens, ces structures constituent l'équivalent, pour le corps $\mathbf{C}$, de la structure sur la cohomologie ℓ-adique obtenue par action des groupes de Galois (et plus particulièrement, des "éléments de Frobenius" dans iceaux), lorsque le corps de base est de type fini au sens absolu, structures qu'on n'arrive à exploiter le plus souvent que lorsqu'on admet certaines conjectures non démontrées à l'heure actuelle, telles les conjectures de Weil. À l'aide de sa théorie, certains arguments heuristiques utilisant les conjectures de Weil peuvent être utilisés en caractéristique zéro sans aucune conjecture. C'est ainsi que Deligne démontre la dégénérescence de diverses suites spectrales (conjecturées par le rapporteur), et arrive à établir de façon extraordinairement simple, en le débarrassant d'hypothèses superflues fort gênantes, des résultats récents de P. A. Griffiths sur une variante analytique complexe des conjectures de Tate (suggérée par le rapporteur il y a quelques années). Si $f : X \longrightarrow S$ est un morphisme propre et lisse de schémas algébriques sur le corps $\mathbf{C}$, définissant donc une famille de variétés algébriques propres et lisses paramétrées par le schéma S, alors toute section du système local sur S des cohomologies des fibres, qui est de "filtration de Hodge" $\geq k$ en un point, est de filtration de Hodge $\geq k$ en tout point de S (supposé connexe). (Ceci, plus la conjecture de Hodge, impliquerait la variante analytique de la conjecture de Tate, savoir : si la section envisagée est "algébrique" en un point — i.e. provient d'un cycle algébrique sur la fibre — alors il en est de même en tout point de S. Comme on dispose de la conjecture de Hodge pour les classes de cohomologie de dimension 2, cela prouve donc la "conjecture de Tate analytique" pour cette dimension). En fait, Deligne prouve un résultat plus fort, savoir que le sous-système local de la cohomologie des fibres engendré par les sections globales (qu'on peut appeler la "partie fixe" dudit système local) est en tout point de

S stable par la décomposition en types (p, q) de la fibre.

Utilisant ce dernier résultat, Deligne arrive à prouver également que l'action du groupe fondamental ordinaire de S sur la cohomologie d'une fibre de S est semi-simple. (Griffiths avait travaillé sur ce problème avec ses méthodes, purement analytiques et topologiques, sans arriver jusqu'à présent à le résoudre).

Dans tout ceci, il n'était question que de coefficients constants. Il est clair qu'il sera nécessaire tôt ou tard de développer la théorie pour des coefficients "quelconques" (une partie du travail consistant d'ailleurs à préciser ce qu'il faut entendre par là...) Deligne a commencé à faire ce travail dans le cas d'une base qui est une variété kählerienne compacte, et d'un système de coefficients locaux, muni d'une "structure de Hodge polarisée", soumise à diverses conditions (notamment à une condition de transversalité à la Griffiths), inspirées par le cas du système local des cohomologies complexes d'une famille algébrique de variétés projectives complexes paramétrées par S. Il développe dans ce cadre une théorie de Hodge de comparaison des formes harmoniques avec la cohomologie usuelle de X à coefficients dans ce système local. Il arrive à obtenir à nouveau dans ce cadre certains des théorèmes dont il a été question précédemment, notamment ceux sur la partie fixe et sur la semi-simplicité de l'action de monodromie.

Les résultats qui précèdent semblent au rapporteur d'une portée très grande, supérieurs encore en importance aux travaux cités dans 6) et 7). Il est clair d'ailleurs qu'il ne s'agit là que du démarrage d'une vaste théorie, qui jouerait le rôle d'une contrepartie "analytique" de la théorie conjecturale des "motifs" entrevue par le rapporteur, — avec le grand avantage sur cette dernière de n'être nullement conjecturale, et qu'on y dispose dès maintenant des premiers résultats saillants.

12) **Résultats sur les modules stratifiés**. Ce sont pour la plupart des résultats marginaux relativement aux travaux dans 11), car les "coefficients" généraux qu'il convient de prendre dans cette théorie devront comprendre notamment des modules stratifiés munis de structures supplémentaires. Parmi les

résultats les plus saillants, signalons les suivants :

a) Si X est un schéma algébrique sur $\mathbf{C}$, alors le foncteur $M \mapsto M^{\mathrm{an}}$ de la catégorie des modules cohérents stratifiés sur X (NB ils sont nécessairement localement libres) dans la catégorie des modules analytiques cohérents stratifiés sur X^{an} (qui se classifient par les représentations linéaires complexes du groupe fondamental de X^{an}), induit une équivalence lorsqu'on se borne aux M qui satisfont à une certaine condition de "croissance lente à l'infini" relativement à la stratification (condition qui a d'ailleurs un sens purement algébrique). Ce théorème implique une analyse locale de la situation "à l'infini", lorsque $X = \overline{X} - Y$, $\overline{X}$ étant lisse et Y un diviseur à croisements normaux sur $\overline{X}$, et utilise les théorèmes de triangulabilité semi-analytique de Lojaciewicz.

b) Si $f : X \longrightarrow S$ est un morphisme de schémas algébriques sur $\mathbf{C}$, alors à condition de remplacer au besoin S par un ouvert dense, la cohomologie de De Rham relative de X sur S est un Module stratifié sur S "à croissance lente à l'infini". Lorsque f est propre et lisse, il est inutile dans cet énoncé de rapetisser S.

c) Soit X un schéma plat et localement de type fini sur un schéma S localement noethérien, tel que X soit un sous-schéma fermé d'un S-schéma X', X' étant un voisinage infinitésimal de X. Alors le foncteur restriction de X' à X induit une équivalence de la catégorie des modules stratifiés sur X' relativement à S, avec la catégorie analogue sur X. Cet énoncé avait été proposé par le rapporteur à P. BERTHELOT (qui avait cherché à le prouver pendant quelque temps), et est bien utile malgré son apparence technique. Il devrait permettre par exemple de prouver que la "cohomologie stratifiante" de X relativement à S est isomorphe à la "cohomologie infinitésimale" (la première n'étant autre que la cohomologie du complexe de De Rham relatif de X sur S, lorsque X est lisse sur S et S de caractéristique nulle). Il est utile également pour faire la théorie de la descente propre pour les modules stratifiés (pour des schémas algébriques sur un corps de base, disons).

13) **Théorie de Lefschetz-Picard des cycles évanescents en car. $p > 0$, et généralisation du théorème de Lefschetz-Noether**. (Ces résultats, développés par Deligne il y a déjà un an ou deux, avaient été oubliés par le rapporteur dans son premier rapport sur les travaux de Deligne ; ils seront exposés dans le Séminaire de Géométrie Algébrique à l'IHES 1968/69.) Utilisant une technique de spécialisation de la caractéristique zéro à la caractéristique $p > 0$ (essentiellement connue), Deligne établit en car. $p > 0$, par voie transcendante, la formule fondamentale de Picard-Lefschetz pour l'action du groupe de monodromie locale sur la cohomologie d'une fibre singulière n'ayant qu'un seul point singulier, lequel est supposé quadratique ordinaire. Il arrive à expliciter aussi l'action du groupe de monodromie locale sur le groupe fondamental de la fibre générale de système fibré (le seul cas intéressant est alors celui des fibres de dimension 1). Utilisant la formule de Picard-Lefschetz, et sans doute moyennant pas mal de travail supplémentaire, Deligne adapte à la caractéristique p l'argument de Lefschetz qui établit que pour une surface projective non singulière "assez générale" de degré au moins égal à 4, le groupe de Picard est engendré par les sections hyperplanes (donc isomorphe à $\mathbf{Z}$). Il ne peut évidement pas s'empêcher de démontrer des généralisations de ce résultat à des dimensions supérieures...

Dans le même ordre d'idées, je signale que Deligne avait trouvé au début de 1968 une démonstration d'une conjecture de Milnor (prouvée aussi indépendamment par BRIESKORN et par LÊ D$\tilde{U}$NG TRANG, par essentiellement la même méthode de "petites déformations"), déterminant le nombre de Betti en dimension critique pour la cohomologie locale d'une hypersurface dans $\mathbf{C}^n$ admettant l'origine comme point singulier isolé, en termes de l'idéal engendré par f et ses dérivées partielles dans l'anneau local de l'origine (f étant une équation locale de l'hypersurface) : on trouve le rang sur $\mathbf{C}$ de l'anneau artinien quotient par cet idéal. Plus récemment, Deligne est allé plus loin, en arrivant à formuler une variante plausible de cet énoncé en géométrie algébrique, qui devrait être valable en car. $p > 0$ et même en inégales caractéristiques ; cette variante est assez subtile même dans le cas d'égales caractéristiques, car elle doit tenir compte des phénomènes de "ramification sauvage", et faire intervenir par suite des représentations d'Artin (ou plutôt de Swan), comme dans le cas des caractéristiques d'Euler-Poincaré à coefficients singuliers des courbes algébriques en caractéristiques $p > 0$. Il arrive à prouver cette formule par voie globale dans le cas d'égales caractéristiques.

14) **Théorie des modules henséliens pour les singularités isolées des variétés algébriques**. Il s'agit d'un by-product du Séminaire Deligne-Grothendieck sur la théorie des cycles évanescents, mentionné dans 13). Le problème posé par Deligne est celui de raffiner la théorie de la variété formelle des modules de Schlessinger pour la déformation d'une singularité isolée, de façon à remplacer l'anneau local complet (tel un anneau quotient d'un anneau de séries formelles sur un corps de base) dont le spectre est censé représenter la variété des modules locale, par un anneau hensélien essentiellement de type fini sur la base, qui serait donc obtenu par localisation étale ordinaire d'un point d'une variété algébrique sur le corps de base. Deligne précise convenablement ce problème, de façon qu'une solution, si elle existe, soit nécessairement unique à isomorphisme près, et il donne une solution affirmative à ce problème dans le cas d'une singularité du type particulier "intersection complète". L'outil principal utilisé par Deligne, et qui restera manifestement un outil clef pour traiter le cas général, est le "théorème d'approximation du formel par l'algébrique" prouvé par M. Artin il y a deux ans. Même le cas des singularités quadratiques ordinaires, qui jouera un rôle important dans le Séminaire, est d'ailleurs non trivial.

    Dans le même ordre d'idées, signalons des conjectures intéressantes de P. Deligne sur la théorie des déformations des singularités quelconques de courbes algébriques, qui sont énoncées à la fin de Exp. 7 du Séminaire cité. Un certain nombre de calculs de cas particuliers, faits ces derniers jours par D. S. RIM, corroborent ces conjectures. Comme le rapporteur n'a pas compris les motivations de ces conjectures, il ne se sent pas en mesure de faire à leur sujet d'autres commentaires.

15) **Théorie des "vraies catégories triangulées"**. Depuis l'introduction des

catégories dérivées des catégories abéliennes de VERDIER, et malgré les services très grands rendus par cette notion, on prévoyait que celle-ci n'était qu'une première approximation de structures plus complètes qui restaient à dégager en algèbre homologique. La question était devenue aiguë en 1968 pour la théorie des traces et des determinants, après que FERRAND se fût apperçu que l'additivité des traces (où la multiplicativité des déterminants) pour des endomorphismes de triangles exacts (au sens de Verdier) de complexes parfaits, affirmé et "démontrée" par le rapporteur et divers élèves, était fausse. Pour qu'elle devienne vraie, il était clair qu'il serait nécessaire de travailler dans une catégorie plus fine que celle des triangles ordinaires de Verdier, ce qui conduisant automatiquement à remettre en chantier le formalisme des catégories dérivées. Dans une rédaction d'une soixante de pages manuscrites for denses, Deligne pose les grandes lignes d'une telle extension, et d'une hyperstructure (la "vraie catégorie triangulée") correspondante à la notion de catégorie triangulée. Ce travail figurera probablement en appendice au livre de Verdier sur les catégories dérivées. Ces notes ne font d'ailleurs qu'esquisser une des directions possibles dans laquelle on peut songer à perfectionner le formalisme de Verdier pour l'adapter aux besoins croissants des utilisateurs, et il est prématuré de se prononcer sur le sort que l'avenir réservera à cette approche. Une autre approche, développée ultérieurement par ILLUSIE, mais qui ne précise pas la notion axiomatique qui devrait tenir lieu de celle de catégorie triangulée, aurait pour le moment les préférences du rapporteur. D'ailleurs, la catégorie des "vrais triangles" introduite par Illusie est équivalente à celle de Deligne, et restera sans doute ne varietur. Signalons que, fort heureusement, tous ces développements sur le thème inauguré par Verder utilisent de façon essentielle le formalisme développé par Verdier lui-même, et complètent celui-ci sans aucunement le remplacer.