Géométrie de l'icosaèdre

par

Alexander Grothendieck

Transcription by

CSG ISTITUTO GROTHENDIECK

Edited by Mateo Carmona
mateo.carmona@csg.igrothendieck.org
Centre for Grothendieckian Studies (CSG)
Grothendieck Institute
Corso Statuto 24, 12084 Mondovì, Italy

This transcription is derived from an unpublished scan provided by the Montpellier archive with the reference "Cote n° 75". This project was carried out by researchers and volunteers of the CSG under the supervision of Mateo Carmona. More details are available at:
https://csg.igrothendieck.org/transcriptions/

How to cite:

Alexander Grothendieck. *Géométrie de l'icosaèdre*. Unpublished, 1977/78. Transcription by M. Carmona et al., CSG, Grothendieck Institute. Draft, April 2024.

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DU LANGUEDOC
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
Place Eugène Bataillon
34060 MONTPELLIER CEDEX

COURS C4 1977–78 de A. GROTHENDIECK

Géométrie de l'icosaèdre.

Il est étrange que l'icosaèdre, étudié depuis plus de deux mille ans dans des contextes et des optiques très divers, ne semble jamais avoir été étudié systématiquement du point de vue combinatoire, ni de celui des réalisations géométriques sur des corps (voire des anneaux) généraux. Ce "cours" se voudrait une investigation commune sur ce thème, en partant de l'intuition combinatoire la plus naïve, exemplifiée sur des modèles en carton (avec un coloriage convenable des arêtes).

Nous aborderons donc la théorie de l'icosaèdre d'un point de vue combinatoire d'abord, en explicitant dans le détail le dictionnaire entre la géométrie combinatoire de l'icosaèdre orienté, et celle de l'ensemble "orienté" à cinq éléments (les cinq couleurs coloriant les arêtes !) — ce qui donnera en même temps une motivation et une inspiration géométrique pour étudier le groupe des automorphismes commun aux deux situations, savoir le groupe alterné G_5 (qui est aussi le plus petit groupe simple non abélien). La question de construire des “réalisations géométriques” de l’icosaèdre combinatoire, comme “polyèdre régulier” sur le corps des réels, ou sur tout autre corps, sera l’occasion à la fois d’approfondir la compréhension de la structure combinatoire, et de nous familiariser avec les notions de géométrie vectorielle et affine (voire de géométrie projective) sur des corps de caractéristique quelconque.

En relation avec l’icosaèdre, nous découvrirons que les corps de caractéristique deux et cinq jouent un rôle très particulier, tant pour l’étude des réalisations géométriques, que pour l’étude des réalisations géométriques, que pour l’étude combinatoire abstraite, qui peut s’expliciter par des notions de géométrie sur les corps $\mathbf{F}_4$ et $\mathbf{F}_5$ — ces deux dictionnaires étant subordonnés aux “isomorphismes exceptionnels” :

$$G_5 \simeq \mathrm{Sl}(2,\mathbf{F}_4) \quad (\simeq \mathrm{GP}(1,\mathbf{F}_4) \simeq \mathrm{SO}(3,\mathbf{F}_4))$$

$$G_5 \simeq \mathrm{GP}(1,\mathbf{F}_5) \quad (\simeq \mathrm{SO}(3,\mathbf{F}_5)).$$