Châtenay le 13.2.1973

Cher Seydi,

Je viens de regarder votre travail sur les ombres, après une lecture plus approfondie ~~de~~ Illusie, dont je vous envoie ci-joint les commentaires détaillés. Comme lui, je pense que la théorie n'est pas tout à fait au point, et que la rédaction actuelle donne une impression parfois confuse, propre à décourager le lecteur. Une rédaction plus satisfaisante risque de vous demander pas mal de travail et de retarder votre soutenance inutilement. Comme vos résultats d'algèbre commutative sont parfaitement suffisants pour faire une thèse, je vous conseille donc de faire la soutenance en vous appuyant sur ceux-ci. Si vous en avez l'envie, vous rédigerez par la suite sans vous presser un article sur les ombres - peut-être en collaboration avec un autre mathématicien, au cas où cela vous inspirerait plus.

Pour qu'un travail sur les ombres soit commodément utilisable, il faudrait d'abord qu'il y ait un résumé des principaux résultats de la théorie, à quoi le lecteur peut se reporter, pour voir clairement de quoi il s'agit sans être troublé par les bizarreries de plan pouvant résulter de certaines nécessités de démonstration. De plus, il est possible que de poser dès le début quelle théorie on veut obtenir, vous permette de voir plus clair vous-même et de courtcircuiter notablement la construction effective de la théorie. En somme, il s'agit de poser d'emblée la question de trouver un foncteur

$$X \longmapsto \mathrm{Omb}(X)$$

des schémas formels noethériens vers les espaces localement annelés, et un homomorphisme fonctoriel

$$i_X : X \longrightarrow \mathrm{Omb}(X),$$

satisfaisant à un certain nombre de propriétés naturelles, dont on ferait la liste, et qu'on pourrait espérer caractéristiques (i.e. de nature à définir la théorie à isomorphisme unique près sur le foncteur Omb cherché). Ou encore, on peut dégager d'abord un ensemble de propriétés caractéristiques (caractérisation de la théorie) et énoncer ensuite des propriétés supplémentaires importantes. Pour contribuer à donner de l'ouverture à l'exposé, il faudrait également faire une liste de problèmes naturels qui devraient être résolus, et une liste de situations où la théorie développée s'introduit de façon naturelle (cf les exemples indiqués par Illusie; il y en a d'autres dans le travail d'Artin sur l'existence d'éclatements et de contractions, et dans un travail de Hironaka que j'ai oublié, mais que vous pourriez lui demander).

<u>Propriétés caractéristiques</u> On peut, pour les formuler, introduire la notion d'espace <u>annelé géométrique</u>: c'est un espace annelé qui est noethérien, sobre (toute partie fermée irréductible a exactement un point générique), avec $\underline{O}_S$ cohérent, ses fibres locaux et noethériens, tel que b) pour tout F cohérent et tout Idéal cohérent J tels que spp $F \subset \mathrm{supp}\, \underline{O}_S/J$, il existe un $n \geqslant 0$ tel que $J^n F = 0$, tel que a) pour toute partie fermée T de S il existe un Idéal cohérent J tel que $T = V(J) \overset{\mathrm{dfn}}{=} \mathrm{supp}\, \underline{O}_S/J$, et tel que c) pour tout ouvert U de S, toute section f de $\underline{O}_U$ et tout faisceau cohérent F sur S, et toute section h de F sur $U_f = U - V(f)$, il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $f^n h$ se prolonge en une section de F sur U. Il faudra demander de plus, soit que tout faisceau cohérent sur un ouvert de S se prolonge en un faisceau cohérent sur S (ou serait-ce conséquence du reste?), ou du moins que les conditions b) et c) restent valables quand on remplace S par un ouvert quelconque, car on veut que tout ouvert d'un espace géoémtrique soit géométrique. La propriété b) implique que $V(J) \subset V(J')$ implique (donc équivaut) à l'existence d'un n tel que $J'^n \subset J$, donc $V(J) = V(J')$ à l'existence d'un n tel que $J'^n \subset J$ et $J^n \subset J'$. Donc l'ensemble des parties fermées de S, avec sa relation d'ordre réticulée, s'identifie gr-

ce à a) et b) à l'ensemble quotient de l'ensemble des Idéaux cohérents J par la relation d'équivalence précédente. Cet ensemble avec sa relation d'équivalence est connu d'ailleurs quand on connait (à équivalence près) la catégorie Coh(S) des Modules cohérents sur S, avec sa structure de produit tensoriel (et les isomorphismes d'associativité et de commutativité), car $\underline{O}_S$ est défini à isom unique près en termes de cette catégorie comme l'objet unité, pour ~~donc~~ l'ensemble des J est défini comme l'ensemble des sous-objets dudit objet unité, et le produit d'Idéaux JJ' est défini comme image de $J \otimes J'$ dans $\underline{1} \otimes \underline{1} \simeq \underline{1}$ par inj $\otimes$ inj', ce qui définit aussi les $J^n$. Ayant décrit l'ensemble ordonné F(S) ~~des parties~~ fermées de S en termes de la $\otimes$-catégorie Coh(S), on sait comment en déduire l'espace topologique sobre noethérien S (ces points correspondent aux éléments "irréductibles" de F(S), les fermés sont les réunions finies des ensembles Spéc(s), où pour tout point irréductible s de F(S), Spéc(s) désigne l'ensemble de ses spécialisations, i.e. l'ensemble des points qui sont $\prec$ s). Pour retrouver aussi la structure annelée en termes de la $\otimes$-catégorie Coh(S), il suffit de prouver la relation suivante (dans le cas où le Module cohérent F est $\underline{O}_S$)

$$\Gamma(S-V(\underline{J}),F) \xleftarrow{\ \sim\ } \varinjlim_n \mathrm{Hom}\,(J^n,F) \quad ,$$

fonctorielle en U = S-V(J) et en F, laquelle formule sauf erreur résulte des conditions a) b) c) (sinon, il faut les renforcer de façon idoine).

Si S,T sont des espaces annelés géométriques, les morphismes d'espaces localement annelés

$$f: S \longrightarrow T$$

correspondent exactement aux classes d'isomorphismes (compatibles aux isomorphismes $f^*(F \otimes G) \simeq f^*(F) \otimes f^*(G)$) de $\otimes$-foncteurs

$$f^*: \mathrm{Coh}(T) \longrightarrow \mathrm{Coh}(S) \quad .$$

Ainsi, avec le renversement de flèches habituel, un espace annelé géométrique "est" essentiellement la même chose qu'une $\otimes$-catégorie (associative et commutative) possédant des propriétés particulières (la catégorie des esp. ann. géom. est équivalente à une sous-catégorie pleine de la catégorie des $\otimes$-catégories ass. et comm.). On peut se poser la question d'expliciter les propriétés en question pour une $\otimes$-catégorie C(ass. et comm.). Ce doit d'abord être, évidemment, une catégorie noethérienne (tous ses objets sont noethériens), mais cela n'est pas suffisant. Il faut de plus que pour tout morphisme u: F ⟶ F' dans C tel que Hom(J,F) ⟶ Hom(J,F') soit bijectif pour tout $J \subset \underline{1}$, u soit un isomorphisme. Il me semble pas trop idiot d'espérer que l'ensemble de ces deux conditions soient suffisantes (et que la première soit suffisante pour que C ≃ Coh(S), où S est un <u>topos</u> annelé géométrique - en définissant cette notion de façon analogue à celle d'espace annelé géom, et qu'elle s'y réduise lorsque le topos provient d'un espace topologique). Ce n'est pas du tout essentiel pour la suite, de toutes façons. Par contre, il serait commode d'expliciter un peu le dictionnaire entre f: S ⟶ T et $f^*$: Coh(T) ⟶ Coh(S), par exemple que f plat équivaut à $f^*$ exact, [illegible] $f^*$ [illegible] de localisation, etc.

La propriété caractéristique du foncteur Omb et de l'homomorphisme fonctoriel $i_X$, qui donne une construction de Omb(X) en fonction de X, c'est que $i_X^*$ <u>soit une équivalence de catégories</u>

$$i_X^*: \mathrm{Coh}(\mathrm{Omb}(X)) \simeq \mathrm{Coh}(X)$$

et que Omb(X) soit un espace annelé géométrique: en effet, ce sera alors "l'unique" espace annelé géométrique S tel que Coh(S) soit (comme $\otimes$-catégorie) équivalente à Coh(X). En même temps, la nature fonctorielle de Omb(X) en X est évidente sur cette construction, de même que le fait que pour X affine ≃ Spf(A), Omb(X) est can. isomorphe à Sp(A). <u>On voit de même que</u> f: X ⟶ Y <u>plat implique que</u> Omb(f): Omb(X) ⟶ Omb(Y) <u>plat</u>.

géométriques

Bien sûr, il y a à prouver un théorème d'<u>existence</u> de Omb(X) (donc d'existence de la théorie cherchée), tel que Coh(Omb(X)) soit ⊗-équivalent à Coh(X). La caractérisation des Coh(S) proposée plus haut serait bien commode pour cela. De plus, pour définir $X \to$ Omb(X), il faudrait dans le sorite général montrer que si S est un espace annelé géométrique, et X un espace locament annelé quelconque, alors Hom(X,S) correspond aux classes d'isomorphisme de ⊗-foncteurs ~~x~~ $\mathrm{Coh}(S) \to \mathrm{Coh}(X)$ (c'est donc essentiellement ~~e~~ ce qu'on a dit plus haut pour S et T, mais sans plus supposer S géométrique).(C'est tout à fait analogue à l'énoncé correspondant pour S affine, où les ⊗-foncteurs sont remplacés par les homomorphismes d'anneaux $\Gamma(S,\underline{O}_S) \to \Gamma(X,\underline{O}_X)$ . ) Le critère de platitude pour f devrait se généraliser à ce cas.

<u>Propriétés supplémentaires</u>. Il y a d'abord les propriétés qui relient de façon plus géométrique X et Omb(X), qui n'ont guère été dégagés, sauf le fait que $i_X$ est un homéomorphisme de X sur une partie fermée de Omb(X), provenant du fait plus précis que pour tout n, $i_X$ induit ~~xxxisxxxxphisxxx~~ sur $X_n$ une immersion fermée. D'ailleurs, la connaissance de l'espace annelé S et de sa partie fermée $S_o$ permet de retrouver X à isomorphisme unique près comme le "complété formel" de S le long de $S_o$. On peut se demander de trouver les propriétés sur un couple $(S,S_o)$ qui assurent qu'il provient bien d'un schéma formel comme ci-dessus. Il faut évidemment que S soit géométrique, et que si $S_o$ est défini par l'Idéal J, alors $(S_o,\underline{O}_S/J\,|\,S_o)$ soit un schéma - mais ce n'est évidemment pas suffisant. Mais définissant alors $\hat{S}$ de façon évidente, ~~xxxxcxxditixx~~ ainsi que $\hat{S} \xrightarrow{j} S$, une condition néc et suff est évidemment que $j^*: \mathrm{Coh}(S) \to \mathrm{Coh}(\hat{S})$ soit une équivalence de catégories.

~~Sixxxxxx~~ Il devrait être vrai que pour tout espace géométrique S, s ∈ S, il y a un ~~xxxixxxxxxx~~ isomorphisme canonique de $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{S,s})$ avec le sous-espace annelé de S formé des générisations de s (topologie induite par S et Anneau induit par S), et que cela s'applique donc au cas de S = Omb(X). Utilisant cela et la platitude de $i_X$ , on en déduira pour tout $x \in X$ un morphisme canonique

$$i_x : \mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x}) \longrightarrow S = \mathrm{Omb}(X)$$

dont l'image est formée des générisation de x dans S. S se trouve être la réunion des images des $i_x$ , pour $x \in X$, ~~xxxExxxixxxxxxiix~~ Sauf erreur, l'application ensembliste sous-jacente à $i_x$ est injective, si y ∈ $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x})$ correspond à l'idéal premier $\underline{p}$ de $\underline{O}_{X,x}$, induisant l'idéal premier $\underline{q}$ de $\underline{O}_{S,x}$ (qui définit $i_x(y)$ identifié à un élément de $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{S,x})$), alors on devrait avoir $\underline{p} = \underline{q}\,\underline{O}_{X,x}$ (à tirer absolument au clair). Mais bien sûr $i_x$ n'est pas un monomorphisme.

Par descente plate, il faudrait énoncer que si X est réduit (resp. normal, resp. régulier, resp. $(S_k)$, resp. $(R_k)$, resp. Coh. Mac. etc) il en est de même de S = Omb(X), et donner des réciproques sous des hypothèses d'excellence convenables. Moduler.

Soit maintenant $f: X' \to X$ un morphisme <u>propre</u> de schémas formels, tel que f soit "algébrique" i.e. tel que X' provienne d'un schéma relatif propre X' sur l'espace annelé X (cf Mme Hakim pour cette notion). Soient U un ouvert de S= Omb(X), $\underline{J}$ un idéal cohérent sur X qui définit le fermé complémentaire de U, U' l'image inverse de U dans S' = Omb(X'). Il faut absolument montrer l'équivalence des propriétés suivantes:

a) $U' \to U$ induit par Omb(f) est un isomorphisme.

b) Pour tout $x \in X$, si $X'_x \longrightarrow \mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x})$ est le morphisme canonique défini par le schéma relatif $X'^a$ sur X, ce dernier induit un isomorphisme

[illegible]

$X'_x \mid U'_x \to U_x$, où $U_x = \mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x}) - V(J_x)$ est le "trou" de U sur $\mathrm{Spec}(\underline{O}_{X,x})$.
Enfin, si $S' = \overline{U'}$ et $\underline{O}_{S'} \to$ (image $\underline{O}_{U'}$) $\to$ injectif, et X' projectif sur X, on propriétés

équivalent à

c) Il existe un Idéal cohérent $\underline{I}$ de $\underline{O}_X$ contenant une puissance de $\underline{J}$, tel que $X'_a$ soit isomorphe à l'éclaté de X rélativement à I.

(Cet énoncé doit en principe permettre de faire le joint avec la théorie rigide-analytique de Raynaud.)

Dans le même esprit, et sous réserve peut-être dans certaines implications de faire des hypothèses du genre excellence, il faudrait prouver ceci, pour X,U,$\underline{J}$ comme dessus (pas de X' ici): Pour que U soit régulier (resp. normal, resp. réduit, resp. $(S_k)$, resp. Coh Mac etc) il faut et il suffit que pour tout x X, $U_x$ le soit (à bloquer avec le cas U=X déjà signalé plus haut).

Autres questions à traiter ou à signaler.

1) La catégorie des Algèbres de présentation finie sur X et sur Omb(X) est "la même" : devrait être facile, en termes d'une caractérisation de la catégorie des Alg de prés finie sur un Y en termes de Coh(Y), comme les objets de Ind(Coh(Y)) munis d'une multiplication A⊗A ayant certaines propriétés ... ~~qui devrait~~ être valable pour des Y tels que X (schéma formel noethérien) et S (ombre d'un tel) ... (Il faudrait donner bien sûr des conditions générales sympa sur Y qui soient manifestement vérifiées pour X,S)

2) Le foncteur image inverse par $i_X$ allant des schémas relatifs propres sur S=Omb(X) vers les schémas relatifs propres sur X, est une équivalence de catégories. (NB dans le cas relatif projectif cela devrait se ramener à 1) dans le cas d'Algèbres graduées ...) NB si on prend des schémas de présentation finie sans plus, le foncteur n'est même pas fidèle, comme on voit en prenant des schémas relatifs sur $S-X_o$ !

3) Un schéma relatif de présentation finie sur X en définit-il un sur S = Omb(X) ? D'après 1) et 2) cela devrait être vrai tout au moins dans le cas affine relatif ou propre relatif. Le cas X affine est déjà intéressant à régarder !

4) Pour tout faisceau cohérent F sur S= Omb(X), l'homomorphisme canonique induit par $i_X$

$$H^1(S,F) \qquad H^1(S,i_X^*(F))$$

est-il un isomorphisme ? (Si oui, cela impliquerait l'énoncé analogue pour les $Ext^1$ globaux de Modules cohérents) Cela résulterait d'un théorème d'effacement de classes de cohomologie de faisceaux cohérents par immersion dans un cohérent (ou dans un ind-cohérent), sur des espaces tels que X (schéma formel) et S (ombre d'un tel).

5) Bien entendu, des questions analogues se posent en cohomologie étale - mais ce n'est sans doute pas le lieu dans un premier exposé de fondements !

6) Application de la théorie pour associer fonctoriellement ~~un espace annelé~~ géométrique à tout espace rigide-analytique quasi-compacts ~~sur le corps~~ des quotients d'un anneau de valuation ~~discrète complet~~, en utilisant la théorie de Raynaud, de telle façon qu'à la "fibre générique" d' ~~un schéma formel de type~~ X fini sur V soit associé $Omb(X)-X_o$. C'est évident modulo la théorie de Raynaud - mais il resterait à étudier les propriétés de fidélité du foncteur obtenu. Serait-il pleinement fidèle (C'est lié à la question suivante: soient X, X' schémas formels de type fini sur X, S=Omb(X), S' = Omb(X'), u: S → S' un K-morphisme d'espaces localement annelés (K étant le corps des fractions de V), existe-t-il un éclatement $\overline{X}$ de X le long d'un sous-schéma concentré sur la fibre spéciale, et un morphisme f: $\overline{X} \longrightarrow$ X' qui induise u ?) Relations entre propriétés locales sur l'espace rigide-analytique et son ombre ...