Lettre à J.-P. Serre

12.8.1964

par

Alexander Grothendieck

Transcription by

Edited by Mateo Carmona
mateo.carmona@csg.igrothendieck.org
Centre for Grothendieckian Studies (CSG)
Grothendieck Institute
Corso Statuto 24, 12084 Mondovì, Italy

This transcription is derived from an unpublished scan provided by the Montpellier archive with the reference "Cote n° 44". This project was carried out by researchers and volunteers of the CSG under the supervision of Mateo Carmona. More details are available at:
https://csg.igrothendieck.org/transcriptions/.

How to cite:

A. Grothendieck. *Lettre à J.-P. Serre*. Unpublished letter, 12.8.1964. Transcription by M. Carmona et al., CSG, Grothendieck Institute. Draft, April 2024.

Bures le 12.8.1964

Mon cher Serre,

Je commence à avoir de faibles lumières sur la façon de faire des VA avec les cycles algébriques équivalentes à zéro d'une variété projective non singulière X (sur un corps alg clos k). Si X est connexe de dimension n, je sais associer à chaque entier i compris entre 1 et n une VA $J^i(X)$, jouant le rôle d'une "jacobienne intermédiaire" au sens de Weil, correspondant à des classes de cycles de codimension i (pour une relation d'équivalence que je ne sais pas bien identifier pour l'instant, mais qui mérite certainement d'être appelée "équivalence d'Albanese"). Je suis moralement sûr que ce sont "les bonnes", bien que je n'ai pas prouvé grand-chose dessus pour l'instant ; par contre, j'ai des conjectures en pagaille. Je te signale seulement que $J^1 = \mathrm{Pic}^\circ$ et $J^n = \mathrm{Alb}^\circ$, que J^i et J^{n+1-i} sont canoniquement duales l'une de l'autre, que $\dim J^i \leq \frac{1}{2}b_{2i-1}$ (nombre de Betti) — de façon plus précise $T_\ell(J^i)$ est un quotient d'un sous-module de $\mathrm{H}^{2i-1}(X, \mathbf{Z}_\ell(i))$ (et quand on sera plus savant, on saura prouver que c'est même un sous-module dudit), en caractéristique 0 on peut également remplacer la cohomologie de Weil par la cohomologie de Hodge $\mathrm{H}^i(X, \underline{\Omega}_X^{i-1})$…

Moyennant un certain nombre de choses non prouvées (qui risquent d'ailleurs d'être vaches) le théorème de positivité de Hodge se ramène à l'énonce suivant, que je ne sais pas prouver, et que j'ai envie de te communiquer car il est bien terre à terre. Moralement, il s'agit de prouver que dans le cas où $\dim X = 2m-1$, l'autodualité de J^m (qui s'exprime par une classe de correspondance divisorielle sur $J^m \times J^m$ *symétrique*, donc provenant — du moins modulo le facteur 2 — d'un élément du groupe de Néron Severi de J^m) est *positive* i.e. l'élément en question de Néron-Severi est ample, i.e. une polarisation. Pratiquement, cela s'explicite ainsi : Soit T une variété de paramètres connexe non singulière munie d'un point marqué a, z une classe de cycles de codimension m sur $T \times X$ (à équivalence linéaire près, mettons), telle que $z(a) = 0$ dans X, soient p et q les deux projections de $T \times T \times X$ sur $T \times X$, r sa projection sur $T \times T$, considérons

$$D = r_*(p^*(z)q^*(z))$$

qui est une classe de diviseurs sur $T \times T$, que nous considérons comme une classe de correspondance divisorielle sur $T \times T$. Si $A = \mathrm{Alb}^{\circ}(T)$ (NB si tu veux, tu peux supposer $T = A$ et a l'origine), elle provient donc d'une classe de correspondance sur $A \times A$, évidemment symétrique. Soit N le "noyau" de cette classe (i.e. le noyau de $A \longrightarrow$ (duale de A) qu'elle définit), on obtient alors une classe de correspondance symétrique sur $J \times J$, où $J = A/N$. A prouver que cette dernière est *positive* ! Je me demande si les spécialistes "abéliens" pourraient avoir une idée sur une telle question, peut-être Matsusaka ? Ou toi-même ? Notes d'ailleurs que cette question te dévoile pratiquement le méthode de construction des J^i généraux ; si tu veux, tu peux te borner aussi au cas où te disposes d'une sous-variété de codimension $m-1$ Y de X, non singulière si tu y tiens, où $T = \mathrm{Pic}^{\circ}(Y)$, considéré comme paramétrant les diviseurs alg équiv à zéro de Y, mais considérés comme classes de cycles de codimension m de X.

Merci pour la copie de la lettre à Ogg !

Bien à toi