

# GÉOMÉTRIE ALGÈBRE

Par JEAN-PIERRE SERRE

## 1. Introduction

Je voudrais exposer ici quelques uns des développements récents de la géométrie algébrique. Je dois préciser que je prends ce dernier terme au sens qui est devenu le sien depuis quelques années : celui de *théorie des schémas*.

Il n'est pas question de rappeler la définition précise d'un schéma; je renvoie pour cela à la conférence de Grothendieck au congrès précédent. Disons seulement que, alors qu'une variété algébrique se construit à partir d'algèbres de polynômes sur des corps, un *préschéma* se construit à partir d'anneaux commutatifs quelconques (et un schéma est un préschéma séparé)<sup>(1)</sup>. Bien entendu, certains théorèmes exigent des hypothèses de finitude (nous en verrons de nombreux exemples), mais ces hypothèses sont vérifiées par des anneaux que l'ancienne géométrie algébrique ne pouvait traiter qu'indirectement (et incomplètement), ne serait-ce que l'anneau  $\mathbf{Z}$  des entiers. (Et pourtant, on peut dire qu'une partie importante de l'arithmétique consiste justement en l'étude des schémas de type fini sur  $\mathbf{Z}$  — c'est là, par exemple, le cadre naturel de la théorie des fonctions zêta et  $L$ , à la Artin-Weil.) Un autre type d'anneaux qui intervient fréquemment est celui des *anneaux locaux* : lorsqu'on désire étudier un morphisme  $f: X \rightarrow Y$  au voisinage de  $f^{-1}(y)$ , avec  $y \in Y$ , on est amené à remplacer  $X$  par un schéma  $X'$  sur l'anneau local  $O_y$  de  $y$ , celui déduit de  $X$  par image réciproque au moyen du morphisme  $\text{Spec}(O_y) \rightarrow Y$ ; souvent même, pour localiser davantage, on remplace  $O_y$  par son complété  $\hat{O}_y$ .

Je n'essaierai pas de donner un aperçu complet des résultats obtenus ces dernières années en théorie des schémas, et je me limiterai aux deux thèmes suivants : *théorèmes d'existence*, et étude des *schémas sur un anneau local noethérien complet*. Pour le reste, on pourra se reporter aux exposés de Grothendieck au séminaire Bourbaki [7, 10] et au séminaire de l'I.H.E.S. [9], ainsi, bien entendu, qu'aux *Eléments* [8].

## 2. Théorèmes d'existence

Il s'agit chaque fois de construire un préschéma  $M$  de propriétés données; le plus souvent, comme Grothendieck l'a mis en évidence, ces propriétés s'expriment de la façon la plus commode en disant que  $M$  *représente* un certain foncteur. Rappelons ce que l'on entend par là :

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie, soit  $\mathcal{E}ns$  la catégorie des ensembles, et soit  $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}ns$  un foncteur contravariant. On dit qu'un couple  $(M, m)$ , où  $M \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,  $m \in F(M)$ , *représente*  $F$  si, pour tout  $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , l'application de  $\text{Hom}(T, M)$  dans  $F(T)$  qui associe à  $\varphi \in \text{Hom}(T, M)$  l'élément  $F\varphi(m)$  de  $F(T)$  est une

<sup>(1)</sup> D'après Grothendieck, il faudrait élargir cette définition, de telle sorte que l'on puisse parler de « préschémas au-dessus d'un espace annelé », cet espace pouvant être, par exemple, une variété différentiable ou analytique (comme dans les travaux de Kodaira-Spencer sur les variétés de modules).

bijection; si  $h_M: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}ns$  désigne le foncteur  $h_M(T) = \text{Hom}(M, T)$ , il revient au même de dire que  $m$  définit un isomorphisme de  $h_M$  sur  $F$ . Lorsqu'un tel couple  $(M, m)$  existe, il est unique (à isomorphisme unique près), et l'on dit que  $F$  est *représentable* (on dit aussi, par abus de langage, que  $M$  représente  $F$ ). En géométrie algébrique, on prend le plus souvent pour catégorie  $\mathcal{C}$  la catégorie  $Sch/S$  des préschémas au-dessus d'un préschéma de base  $S$  (i.e. munis d'un morphisme dans  $S$ ). On ne dispose pas de critères généraux maniables <sup>(1)</sup> permettant d'affirmer qu'un foncteur  $F$  donné est représentable. Il est en tout cas nécessaire que  $F$  transforme limites inductives (dans  $Sch/S$ ) en limites projectives (dans  $\mathcal{E}ns$ ); en particulier,  $F$  doit être un foncteur *local* : si  $U$  parcourt l'ensemble des ouverts d'un  $S$ -préschéma  $T$ , le préfaisceau des  $F(U)$  doit être un *faisceau*.

Exemples de schémas définis par ce procédé :

(i) *Schémas de Grassmann*. On se donne un schéma  $S$ , un  $O_S$ -Module quasi-cohérent  $\mathcal{E}$ , et un entier  $n \geq 0$ . Si  $T$  est un  $S$ -préschéma, notons  $\mathcal{E} \times_S T$  l'image réciproque de  $\mathcal{E}$  par le morphisme canonique de  $T$  dans  $S$ , et soit  $F_n(T)$  l'ensemble des *quotients du  $O_T$ -Module  $\mathcal{E} \times_S T$  qui sont localement libres de rang  $n$* ; c'est un foncteur contravariant de  $T$  (sur la catégorie  $Sch/S$ ). On démontre sans grandes difficultés (cf. Grothendieck [11], exposé 12, pour le cas analytique) que ce foncteur est représentable par un  $S$ -préschéma  $Grass_n(\mathcal{E})$  que l'on appelle la *grassmannienne* (d'indice  $n$ ) de  $\mathcal{E}$ ; si  $\mathcal{E}$  est de type fini,  $Grass_n(\mathcal{E})$  est projectif sur  $S$ ; si de plus  $\mathcal{E}$  est localement libre,  $Grass_n(\mathcal{E})$  est simple sur  $S$ . Pour  $n=1$ , on retrouve le *schéma projectif*  $P(\mathcal{E})$  associé à  $\mathcal{E}$  (cf. [8], II-4.1.1); on définit de même les *schémas de drapeaux* de  $\mathcal{E}$ .

(ii) *Schémas de Hilbert*. Soit  $S$  un schéma noethérien, et soit  $X$  un schéma projectif sur  $S$ ; soit  $\mathcal{C}$  la catégorie des  $S$ -préschémas localement noethériens. Si  $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , soit  $X_T = X \times_S T$ , et soit  $\bar{F}(T)$  l'ensemble des *sous-préschémas fermés de  $X_T$  qui sont plats sur  $T$* ; c'est un foncteur contravariant de  $T$ . Grothendieck a démontré que ce foncteur est représentable par un schéma  $\text{Hilb}_{X/S}$  qui est somme disjointe de  $S$ -schémas projectifs  $\text{Hilb}_{X/S}^P$ , indexés par certains polynômes à coefficients rationnels (cf. [10], exposé 221 — voir aussi [11], exposé 16, pour le cas analytique). Ces schémas jouent un rôle analogue à celui des classiques « coordonnées de Chow » (qui, elles, servent à paramétrer des *cycles*, et non des sous-schémas). Leur existence entraîne facilement celle d'autres schémas importants (schémas de morphismes, d'isomorphismes, etc. — voir [10], *loc. cit.*); elle intervient également dans la construction des schémas de Picard et des schémas de modules (voir ci-dessous).

(iii) *Schémas de Picard*. (Ici, la définition générale du foncteur  $F$  est délicate; je me limiterai à un cas particulier relativement simple.) Soit  $\pi: X \rightarrow S$  un morphisme de préschémas localement noethériens. On suppose que  $\pi$  est projectif, plat, admet une section, et que ses fibres sont géométriquement intègres. Posons

$$P_{X/S} = H^0(S, R^1\pi(O_X^*)).$$

Vu les hypothèses faites, ce groupe s'identifie à  $H^1(X, O_X^*)/H^1(S, O_S^*)$ . Si  $T$

<sup>(1)</sup> On trouvera toutefois dans Grothendieck ([11], exposé 11) des critères permettant de déduire la représentabilité d'un foncteur de celle d'autres foncteurs. Voir aussi [10], exposé 195, pour une caractérisation des foncteurs « proreprésentables ».

est un  $S$ -pré-schéma localement noethérien, posons  $F(T) = P_{X_T/T}$ , avec  $X_T = X \times_S T$ ; c'est un foncteur contravariant de  $T$ . Grothendieck a démontré qu'il est représentable par un  $S$ -pré-schéma en groupes abéliens  $\text{Pic}_{X/S}$ , appelé le *pré-schéma de Picard de  $X$  sur  $S$*  (cf. [10], exposés 232–236 — voir aussi [11], exposé 16, pour le cas analytique). En général,  $\text{Pic}_{X/S}$  n'est pas de type fini sur  $S$  : lorsque  $S$  est le spectre d'un corps, et que  $X$  est simple sur  $S$ , c'est une extension du « groupe de Néron-Severi » de  $X$  (considéré comme groupe discret) par la « variété de Picard » de  $X$ , au sens classique; toutefois Mumford a démontré qu'il est somme disjointe de schémas quasi-projectifs sur  $S$ .

Les hypothèses faites ci-dessus ne sont certainement pas nécessaires pour l'existence du pré-schéma de Picard; par exemple Murre a construit  $\text{Pic}_{X/k}$  pour tout schéma  $X$  propre sur un corps  $k$ .

(iv) *Schémas de modules* (courbes de genre donné). Si  $S$  est un pré-schéma, une *courbe de genre  $g$  sur  $S$*  est un  $S$ -pré-schéma  $X$  qui est simple, propre, et dont les fibres sont des courbes algébriques de genre  $g$ , au sens usuel. Pour  $S$  et  $g$  donnés, les classes (à isomorphisme près) de telles courbes forment un ensemble  $F_g(S)$ ; c'est un foncteur contravariant de  $S$ . Toutefois, pour  $g \geq 1$ , le foncteur  $F_g$  n'est pas représentable. Il est nécessaire de le modifier en remplaçant la notion de « courbe » par celle de « courbe rigidifiée » (c'est-à-dire, en gros, munie de points d'ordre fini de sa jacobienne); voir la définition précise (dans le cas analytique) dans Grothendieck [11], exposé 7. Mumford a démontré, grâce à un théorème convenable de passage au quotient, que les foncteurs ainsi définis sont représentables, et il en a déduit la construction du *schéma des modules* de courbes de genre  $g$  (au sens absolu, i.e. « sur  $\mathbf{Z}$  »); voir [14, 15]. Dans cette direction, on disposait déjà de nombreux résultats partiels : construction du schéma des modules sur  $\mathbf{Q}$  (Baily [1, 2]), étude détaillée des genres 1 et 2 (Igusa [12, 13]), cas analytique (cf. par exemple Bers [3] et Grothendieck [11], exposés 7 et 17). Dans le cas général, il manque encore une « bonne » compactification des schémas de modules sur  $\mathbf{Z}$  analogue à celle donnée pour le genre 1 par Igusa [12], et sur  $\mathbf{Q}$  par Baily [2].

### 3. Schémas sur un anneau local noethérien complet

Dans tout ce qui suit, on désigne par  $A$  un anneau local noethérien complet, par  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $A$ , et par  $k$  le corps résiduel  $A/\mathfrak{m}$ .

Si  $X$  est un schéma sur  $A$ , on lui associe la fibre  $X_0$  du point  $\mathfrak{m} \in \text{Spec}(A)$ , autrement dit le schéma  $X_0 = X \otimes_A A/\mathfrak{m}$ . Si  $X$  est de type fini sur  $A$ ,  $X_0$  est un *schéma algébrique sur  $k$* ; on dit que  $X_0$  se déduit de  $X$  par « réduction modulo  $\mathfrak{m}$  ». On essaie, autant que possible, de ramener l'étude de  $X$  à celle de  $X_0$  (muni éventuellement de structures supplémentaires).

Un premier pas dans cette direction consiste à réduire  $X$ , non pas seulement modulo  $\mathfrak{m}$ , mais modulo un idéal primaire pour  $\mathfrak{m}$ , par exemple une puissance de  $\mathfrak{m}$ . Les schémas  $X_n = X \otimes_A A/\mathfrak{m}^{n+1}$  ainsi obtenus ont même espace topologique sous-jacent que  $X_0$ ; leurs faisceaux structuraux forment un système projectif. L'espace  $X_0$ , muni de ce système projectif, est appelé le *complété formel* de  $X$ , et noté  $\hat{X}$ ; c'est un « schéma formel », au sens de [8], I – 10; il représente, en quelque sorte, les « voisinages infinitésimaux » de la fibre  $X_0$ ; c'est l'intermédiaire le plus naturel entre  $X_0$  et  $X$ .

La situation est particulièrement favorable lorsque  $X$  est *propre* sur  $A$ ;

dans ce cas, en effet, on peut dire que la connaissance de  $\hat{X}$  équivaut à celle de  $X$  (cf. [8], III-5). De façon plus précise, on a les résultats suivants :

(i) Soit  $\mathcal{E}$  un  $O_X$ -Module cohérent, soit  $\mathcal{E}_n = \mathcal{E} \times_{\mathcal{E}x_X} X_n = \mathcal{E}/\mathfrak{m}^{n+1}\mathcal{E}$ , et soit  $\hat{\mathcal{E}}$  le système projectif des  $\mathcal{E}_n$ . On a alors des isomorphismes canoniques :

$$H^q(X, \mathcal{E}) = \lim_{\leftarrow} H^q(X_n, \mathcal{E}_n) = H^q(\hat{X}, \hat{\mathcal{E}}) \quad (q \geq 0).$$

(C'est un cas particulier du « théorème des fonctions holomorphes », cf. Grothendieck [8], III-4.)

(ii) Appelons « Module cohérent sur  $\hat{X}$  » un système projectif  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)$  de  $O_{X_n}$ -Modules cohérents tels que  $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_m \times_{x_m} X_n$  si  $m \geq n$ , et soit  $\hat{C}$  la catégorie abélienne formée par ces systèmes. Soit d'autre part  $C$  la catégorie des  $O_X$ -Modules cohérents. Alors le foncteur  $\mathcal{E} \rightarrow \hat{\mathcal{E}}$  défini dans (i) est une équivalence de  $C$  avec  $\hat{C}$ . En particulier, tout Module cohérent sur  $\hat{X}$  est isomorphe au complété formel  $\hat{\mathcal{E}}$  d'un  $O_X$ -Module cohérent  $\mathcal{E}$  (défini à isomorphisme unique près). [C'est le « théorème d'existence en géométrie formelle », cf. [8], III-5 — noter son analogie avec celui qui permet de passer de la géométrie analytique à la géométrie algébrique (sur  $\mathbb{C}$ ).]

Ces résultats ont de nombreuses applications. Citons par exemple :

(iii) (cf. [7], p. 182-11) Supposons que  $X$  soit propre et plat sur  $A$ , et que  $H^2(X_0, O_{X_0}) = 0$ . Alors pour tout  $O_{X_0}$ -Module inversible  $\mathcal{E}_0$  sur  $X_0$ , il existe un  $O_X$ -Module inversible  $\mathcal{E}$  sur  $X$  tel que  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \times_X X_0$ . En particulier, si  $X_0$  est projectif sur  $k$ ,  $X$  est projectif sur  $A$  (prendre pour  $\mathcal{E}_0$  un Module ample).

[On prolonge  $\mathcal{E}_0$  aux  $X_n$  de proche en proche; l'obstruction pour passer de  $X_{n-1}$  à  $X_n$  se trouve dans  $H^2(X_0, O_{X_0}) \otimes \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ , qui est nul par hypothèse; on obtient ainsi un Module inversible  $\hat{\mathcal{E}}$  sur  $\hat{X}$ , qui est "algébrique" d'après (ii).]

(iv) (Cf. [7], p. 182-24, ainsi que [9].) Supposons encore que  $X$  soit propre et plat sur  $A$ . L'application canonique  $\pi_1(X_0) \rightarrow \pi_1(X)$  est alors un isomorphisme.

[Il faut démontrer que les catégories formées par les revêtements étales de  $X_0$  et de  $X$  sont équivalentes; or un revêtement étale de  $X_0$  est défini par une  $O_{X_0}$ -Algèbre cohérente  $\mathcal{A}_0$  d'un certain type; on montre qu'on peut lui associer, de façon essentiellement unique, un système projectif  $\hat{\mathcal{A}} = (\mathcal{A}_n)$  de  $O_{X_n}$ -Algèbres cohérentes  $\mathcal{A}_n$  du même type; on applique ensuite (ii) comme ci-dessus.]

Du point de vue où nous nous sommes placés, il est naturel d'essayer de reconstruire <sup>(1)</sup> le schéma formel  $\hat{X}$ , ou même le schéma  $X$ , à partir de  $X_0$  (en exigeant toujours que  $\hat{X}$  soit plat sur  $A$ ). Supposons, pour simplifier, que  $X_0$  soit simple sur  $k$ , autrement dit, que  $X_0$  soit une « variété algébrique non singulière ». La construction de  $X_n$  à partir de  $X_{n-1}$  se heurte alors à une obstruction qui appartient à  $H^2(X_0, \mathcal{J}_0) \otimes \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ , où  $\mathcal{J}_0$  désigne le  $O_{X_0}$ -Module des  $k$ -dérivations de  $O_{X_0}$  (celui qui correspond au fibré tangent à  $X_0$ ). Si  $H^2(X_0, \mathcal{J}_0)$  est nul, cette obstruction est nulle, et l'on peut construire le système des  $X_n$ , d'où un schéma formel  $\hat{X}$ ; si en outre  $X_0$  est projectif et si  $H^2(X_0, O_{X_0})$  est nul, la méthode employée dans (iii) ci-dessus montre que  $\hat{X}$  est le complété formel d'un schéma  $X$  qui est projectif et plat sur  $A$ ; c'est le schéma cherché.

<sup>(1)</sup> La classification des schémas formels ainsi obtenus conduit à la notion de « schéma formel des modules », cf. Grothendieck [7], p. 182-16, ainsi que [10], exposé 195.

Lorsque  $k$  est de caractéristique  $p > 0$ , il est intéressant de prendre pour  $A$  un anneau de valuation discrète de caractéristique 0 (par exemple l'anneau  $W(k)$  des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$ , si  $k$  est parfait); on « remonte » ainsi  $X_0$  de la caractéristique  $p$  à la caractéristique 0 (toujours en supposant la nullité de  $H^2(X_0, \mathcal{J}_0)$  et de  $H^2(X_0, \mathcal{O}_{X_0})$ ). En particulier, toute courbe algébrique se remonte; de ce résultat, joint à (iv), Grothendieck a déduit la détermination de la partie « première à  $p$  » du groupe fondamental d'une courbe en caractéristique  $p$  (cf. [7], p. 182–27, ainsi que [9]). En dimension supérieure, il existe par contre des schémas projectifs et simples qui ne se remontent pas en caractéristique 0 (même comme schémas formels); on en trouvera des exemples dans [21] (ces exemples sont de dimension  $\geq 3$ , mais Mumford m'a fait observer qu'on peut en construire d'analogues en dimension 2). Ce genre de question mériterait une étude plus approfondie. Peut-on par exemple définir directement (par des arguments de géométrie différentielle) les obstructions mentionnées ci-dessus ? Elles ont sans doute des relations avec la cohomologie de  $X_0$  à valeurs dans les vecteurs de Witt (cf. [18]). Que peut-on dire du relèvement des morphismes (et en particulier des morphismes « de Frobenius ») ? Le seul cas où l'on sache quelque chose est celui des courbes elliptiques (Deuring [4]).

Les méthodes précédentes font intervenir de façon essentielle des schémas sur des anneaux artiniens. D'après Greenberg [6], ces derniers peuvent être eux-mêmes ramenés — dans une certaine mesure — à des schémas algébriques. De façon plus précise, supposons que le corps résiduel  $k$  soit parfait, et que l'anneau local  $A$  soit de longueur finie  $N$ ; si  $k$  est de caractéristique 0, choisissons un relèvement de  $k$  dans  $A$ . On peut alors décrire les éléments de  $A$  au moyen de  $N$  coordonnées à valeurs dans  $k$ , les lois de composition étant polynomiales par rapport à ces coordonnées (c'est clair si  $k$  est de caractéristique 0, car  $A$  est une  $k$ -algèbre — en caractéristique  $p$ , on utilise le fait que  $A$  est une algèbre sur l'anneau  $W(k)$  des vecteurs de Witt); ces lois polynomiales définissent un schéma en anneaux  $\Lambda$  sur  $k$ , et l'on a  $\Lambda_k = A$ . Soit maintenant  $C_k$  (resp.  $C_A$ ) la catégorie des  $k$ -pré-schémas (resp. des  $A$ -pré-schémas) de type fini. Si  $Y \in \text{Ob}(C_k)$ , soit  $GY$  le  $A$ -schéma obtenu en munissant  $Y$  du faisceau des germes de  $k$ -morphisms de  $Y$  dans  $\Lambda$ . On définit ainsi un foncteur  $G: C_k \rightarrow C_A$  qui a un adjoint  $F: C_A \rightarrow C_k$ ; c'est cet adjoint que l'on appelle le foncteur de Greenberg. Par définition, on a

$$\text{Hom}_A(GY, X) = \text{Hom}_k(Y, FX) \quad (Y \in \text{Ob}(C_k), X \in \text{Ob}(C_A)),$$

d'où, en prenant  $Y = \text{Spec}(k)$ , la formule  $X_A = (FX)_k$ .

Revenons maintenant au cas d'un anneau local noethérien complet  $A$ , à corps résiduel parfait  $k$ , et soit  $X$  un schéma de type fini sur  $A$  (ou plus généralement un schéma formel de type fini). Pour tout  $n \geq 0$ , on peut appliquer le foncteur de Greenberg au  $A/\mathfrak{m}^{n+1}$ -schéma  $X_n$  défini plus haut; on associe ainsi à  $X$  un système projectif  $FX = (FX_n)$  de schémas algébriques sur  $k$ ; on a encore  $X_A = (FX)_k = \lim_{\leftarrow} (FX_n)_k$ . On trouvera dans [6] une liste des propriétés élémentaires du foncteur  $F$ . Il conviendrait de la compléter sur plusieurs points. Par exemple, si  $X$  est simple sur  $A$ , Greenberg a montré que chaque  $FX_n$  est un espace fibré sur le précédent, et il en a déterminé le groupe structural; lorsque  $A$  est un anneau de valuation discrète, de corps des fractions  $K$ , un résultat analogue doit être valable (pour  $n$  assez grand) lorsqu'on suppose seulement que  $X \otimes_A K$  est simple sur  $K$

(cf. Néron [17], ainsi que Bourbaki, *Alg. comm.*, Chap. III, § 4, n°5). Il serait également intéressant (mais sans doute plus difficile) d'« enrichir » le système des  $FX_n$  de structures supplémentaires permettant de reconstruire le schéma formel de départ.

Lorsqu'on suppose que  $X$  est un schéma en groupes sur  $A$ , les  $FX_n$  forment un système projectif de groupes algébriques. C'est ainsi que s'introduisent les groupes proalgébriques, limites projectives de groupes algébriques. Dans le cas commutatif, ces groupes forment une catégorie abélienne  $\mathcal{D}$ , contenant la sous-catégorie  $\mathcal{D}_i$  des groupes proalgébriques « infinitésimaux » (i.e. limites projectives de groupes réduits à l'élément neutre). La catégorie quotient  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_i$  a été étudiée en détail dans [19] (en supposant  $k$  algébriquement clos). Quant à la catégorie  $\mathcal{D}_i$ , elle constitue le cadre naturel de la théorie des « groupes formels » commutatifs de Dieudonné (cf. Gabriel [5] et Cartier — non publié).

Le groupe multiplicatif  $G_m$  fournit un exemple simple de ce qui précède : on lui associe un groupe proalgébrique  $U$ , et les points de  $U$  rationnels sur  $k$  correspondent bijectivement aux unités de  $A$ . Lorsque  $A$  est un anneau de valuation discrète, de corps des fractions  $K$ , et de corps résiduel algébriquement clos, le groupe  $U$  ainsi obtenu détermine les extensions abéliennes de  $K$  : le groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de  $K$  est isomorphe au groupe fondamental  $\pi_1(U)$  du groupe proalgébrique  $U$  (cf. [20]).

A cet ordre d'idées se rattachent également des résultats extrêmement intéressants de Néron (on les trouvera résumés dans [16] et [17]). Ici, l'on part d'une variété abélienne  $C$  sur le corps des fractions  $K$  de  $A$ , et l'on cherche un schéma en groupes  $\Gamma$  simple sur  $A$  tel que  $\Gamma \otimes_A K = C$ ; de façon plus précise, Néron montre<sup>(1)</sup> que l'on peut choisir  $\Gamma$  de telle sorte que, pour tout schéma  $X$  simple sur  $A$ , l'application canonique :

$$\mathrm{Hom}_A(X, \Gamma) \rightarrow \mathrm{Hom}_K(X \otimes_A K, C)$$

soit une bijection (en d'autres termes,  $\Gamma$  représente le foncteur  $\mathrm{Hom}_K(X \otimes_A K, C)$  dans la catégorie des schémas simples sur  $A$ ). En prenant  $X = \mathrm{Spec}(A)$ , on voit en particulier que  $C_K$  s'identifie à  $\Gamma_A$ ; grâce au foncteur de Greenberg, ce dernier groupe s'identifie lui-même au groupe  $(F\Gamma)_k$  des points rationnels sur  $k$  d'un groupe proalgébrique commutatif  $F\Gamma$ . Ce résultat a été utilisé par Šafarevič et Ogg dans l'étude de la cohomologie galoisienne de  $C$  (le corps  $k$  étant algébriquement clos). Ce n'est là qu'un début; d'après Grothendieck, il doit exister un « théorème de dualité » qui englobe ces résultats, ceux de Tate (lorsque  $k$  est fini), et ceux de la théorie du corps de classes local (au sens classique — et aussi au sens de [20]).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1]. BAILY, W., On the moduli of Jacobian varieties and curves. *Inter. Coll. Function Theory*, 51–62. Bombay, 1960.
- [2]. — On the theory of  $\theta$ -functions, the moduli of abelian varieties, and the moduli of curves. *Ann. Math.*, 75 (1962), 342–381.
- [3]. BERS, L., Uniformization and moduli. *Inter. Coll. Function Theory*, 41–49. Bombay, 1960.

(1) Lorsque  $C$  est de dimension 1, Néron démontre un théorème plus précis: il plonge  $\Gamma$  dans un schéma  $\bar{\Gamma}$  projectif sur  $A$  et régulier, jouissant en outre d'une certaine propriété de minimalité (cf. [16, 17]).

- [4]. DEURING, M., Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionen-körper. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 14 (1941), 197–272.
- [5]. GABRIEL, P., Sur les catégories abéliennes localement noethériennes et leurs applications aux algèbres étudiées par Dieudonné. *Séminaire d'algèbre et géométrie*. Collège de France, 1960.
- [6]. GREENBERG, M., Schemata over local rings. *Ann. Math.*, 73 (1961), 624–648.
- [7]. GROTHENDIECK, A., Géométrie formelle et géométrie algébrique. *Séminaire Bourbaki*, 1958–59, exposé 182.
- [8]. ——— Eléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ), *Publ. Math. (I.H.E.S.)*, Paris, 1960–61–62–...
- [9]. ——— *Séminaire de géométrie algébrique (I.H.E.S.)*, Paris, 1960–62.
- [10]. ——— Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. *Séminaire Bourbaki*, 1959–62, exposés 190, 195, 212, 221, 232, 236.
- [11]. ——— Techniques de construction en géométrie analytique. *Séminaire H. Cartan*, 1960–61, exposés 7 à 17.
- [12]. IGUSA, J., Kroneckerian model of fields of elliptic modular functions. *Amer. J. Math.*, 81 (1959), 561–577.
- [13]. ——— Arithmetic variety of moduli for genus 2. *Ann. Math.*, 72 (1960), 612–649.
- [14]. MUMFORD, D., An elementary theorem in geometric invariant theory. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67 (1961), 483–486.
- [15]. ——— *Geometric invariant theory* (en preparation).
- [16]. NÉRON, A., Réduction des variétés abéliennes. *J. reine angew. Math.*, 209 (1962), 29–35.
- [17]. ——— Modèles  $p$ -minimaux des variétés abéliennes. *Séminaire Bourbaki*, 1961–62, exposé 227.
- [18]. SERRE, J.-P., Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique  $p$ . *Symp. de top. alg.*, Mexico, 1956, 24–53.
- [19]. ——— Groupes proalgébriques. *Publ. Math. (I.H.E.S.)*, Paris, 7, 1960.
- [20]. ——— Sur les corps locaux à corps résiduel algébriquement clos. *Bull. Soc. Math. France*, 89 (1961), 105–154.
- [21]. ——— Exemples de variétés projectives en caractéristique  $p$  non relevables en caractéristique 0. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 47, (1961), 108–109