Actes, *Congrès intern. math.*, 1970. Tome 1, p. 313 à 317.

UTILISATION DES CATÉGORIES EN GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

par JEAN GIRAUD

En choisissant le titre de cette conférence, j'avais l'intention de montrer par des exemples comment les catégories fournissent un langage et, en même temps, une algèbre qui permettent de mettre de l'ordre dans des questions parfois fort touffues, de montrer aussi comment les applications que l'on a en vue servent de mentor au catégoricien, plus enclin qu'un autre, peut-être, aux digressions. Pour limiter les préréquisites, je me contenterai d'un exemple, déjà ancien, mais que l'on peut aborder (au § 3) en n'utilisant que la notion de champ sur un site (§ 1); au § 2, j'explique une construction permettant d'attacher un topos à un champ de groupoïdes et qui a son utilité pour l'étude des extensions de groupes (algébriques ou topologiques), mais je ne parlerai pas de ce dernier point.

§ 1. — On rappelle qu'un *champ* sur un topos (ou, plus généralement un site) X est une catégorie fibrée $p: C \to X$ satisfaisant à une condition supplémentaire qui exprime que les objets et les flèches se recollent. L'*image directe* de C par un morphisme de topos $f: X \to Y$ est, par définition, le produit fibré $C \times_X Y$, où Y est considéré comme une X-catégorie grâce au foncteur image inverse $f^*: Y \to X$; on la note $f_*(C)$. L'*image inverse* par f d'un champ D sur Y est un champ $f^*(D)$ sur X muni d'un morphisme $D \to f_*f^*(D)$ tel que, pour tout champ C sur X, le foncteur naturel

$$\mathrm{Cart}_X(f^*(D), C) \to \mathrm{Cart}_Y(D, f_*(C))$$

soit une équivalence, où $\mathrm{Cart}_X(A, B)$ désigne la catégorie des foncteurs cartésiens d'un X-champ A dans un autre B. En particulier, si S est un objet d'un topos X et si $x: X \mid S \to X$ est le morphisme naturel, on peut prendre pour image inverse d'un X-champ C celui qui s'en déduit par le changement de base $x_!: X \mid S \to X, x_!(T/S) = T$; de plus, si $q: G \to X \mid S$ est un champ sur $X \mid S$, le composé $x_! \circ q: G \to X$ est encore un champ noté $x_!(G)$ et, pour tout X-champ C, on a un isomorphisme

$$\mathrm{Cart}_X(x_!(G), C) \approx \mathrm{Cart}_{X|S}(G, x^*(C)).$$

THÉORÈME 1.1. — *Soit C un champ de groupoïdes sur un topos X. Il existe un objet S de X et une gerbe G sur le topos induit $X \mid S$ tels que $x_!(G)$ soit isomorphe à C.*

Un champ de groupoïdes est un champ dont les fibres sont des groupoïdes; on dit que c'est une gerbe s'il est localement équivalent au champ des torseurs (espaces principaux homogènes) sous un faisceau de groupes. On prend pour S l'objet de X qui représente le faisceau associé au préfaisceau qui, à tout objet T de X, associe l'ensemble des classes à isomorphisme près d'objet de la fibre C_T. On dit que S est le *faisceau des* *sous-gerbes maximales de C*, car il est facile de vérifier qu'une section $s \in S(T)$ de S au-dessus d'un objet T de X s'interprète comme une sous-gerbe de la restriction de C à $X \mid T$ qui est maximale en ce sens que toute sous-gerbe qui la contient lui est égale. On prend alors pour G la catégorie C elle-même, munie du foncteur $q: G \to X \mid S$ qui, à un objet c de C de projection T, associe la sous-gerbe maximale de $C \mid T$ qui contient c, considérée comme un morphisme $T \to S$, c'est-à-dire un objet de $X \mid S$. Le couple (C, q) est bien une gerbe G et l'on a $p = x_! \circ q$, d'où la conclusion. L'intérêt de cette construction tient à ce qu'elle est fonctorielle par rapport au site.

Corollaire 1.2. — *Soit encore $f: X' \to X$ un morphisme de topos. L'image inverse C' de C par f est un champ de groupoïdes, le faisceau S' des sous-gerbes maximales de C' est l'image inverse de S et la gerbe G' sur $X' \mid S'$ attachée à C' est l'image inverse de G par le morphisme induit $f \mid S: X' \mid S' \to X \mid S$.*

La démonstration repose sur l'étude du procédé général de construction de l'image inverse d'un champ.

§ 2. — Puisque les topos forment une 2-catégorie, pour tout topos X, les X-topos (topos munis d'un morphisme de topos $f: X' \to X$) forment une 2-catégorie ; si X' et X'' sont deux X-topos, on notera $\mathrm{Mor}_X(X', X'')$ la catégorie des X-morphismes de X' dans X''. On a en fait une catégorie fibrée $\underline{\mathrm{MOR}}_X(X', X'')$ sur X, dont la fibre en $S \in Ob(X)$ est $\mathrm{Mor}_{X \mid S}(X' \mid S', X'' \mid S'')$, où S' et S'' sont les images inverses de S sur X' et X''. D'après M. Hakim, cette catégorie fibrée est *un champ*, ce qui exprime que les morphismes de topos se recollent.

Théorème 2.1. — *Soit $p: C \to X$ un champ de groupoïdes sur un topos X. Il existe un X-topos $\tau_C(X): B_C(X) \to X$ et une section c de l'image inverse de C par $\tau_C(X)$ tels que, pour tout X-topos $f: X' \to X$, le foncteur*

$$\mathrm{Mor}_X(X', B_C(X)) \to f^*(C)(X'), \qquad m \mapsto m^*(c), \tag{1}$$

soit une équivalence de catégories.

2.1.1. Le *topos classifiant* $B_C(X)$, aussi noté B_C, est donc défini par sa « propriété universelle », mais il n'est connu qu'à équivalence près, comme il arrive souvent dans ce genre de questions. Lorsque les fibres de C sont discrètes, C admet un scindage, donc est défini par un faisceau d'ensemble S, à savoir $S(T) = Ob(C_T)$, qui est d'ailleurs celui de (1.1). Dans ce cas, il est clair que le topos induit $X \mid S$ est un classifiant. Par ailleurs, si C est la gerbe des torseurs sous un groupe A de X, on prend pour classifiant le topos $B_A(X)$ des objets de X munis d'opérations à gauche de A, le morphisme $\tau_A(X): B_A(X) \to X$ étant défini par son foncteur image inverse qui, à $E \in Ob(X)$, associe l'objet E^τ obtenu en faisant opérer A trivialement. D'après une remarque de Grothendieck, le topos $B_A(X)$ jouit de la propriété universelle voulue : à un $f^*(G)$-torseur P sur un X-topos $f: X' \to X$, on associe le X-morphisme de topos $\omega_P: X' \to B_G(X)$ dont le foncteur image inverse est $\omega_P^*(E) = P^{f^*(G)}f^*(E)$.

2.1.2. Indiquons maintenant comment le cas général se déduit des deux cas particuliers précédents. On définit d'abord $B_C(X)$ en considérant la catégorie $FL(X)$ des flèches de X munie de son foncteur but : c'est un champ dont les fibres sont des topos et les foncteurs image inverse des morphismes de topos (en bref, un champ de topos).

On pose $B_C(X) = \mathrm{Cart}_X(C, FL(X))$. On vérifie que cette définition est en accord avec les précédentes lorsque C est à fibres discrètes ou bien est un champ de groupoïdes. Grâce à (1.1), on montre ensuite que l'on a une équivalence de catégories $B_C(X) \approx B_G(X \mid S)$, avec les notations de (1.1). Pour voir que $B_C(X)$ est un topos, on peut donc supposer que C est une gerbe, il reste à trouver un procédé de localisation; or il est clair que $B_C(X)$ est la fibre en l'objet final d'une X-catégorie fibrée, laquelle est localement un champ de topos puisque C est localement équivalente à une gerbe de torseurs et que ce cas a été traité; d'où la conclusion, car, jointe à une condition supplémentaire que nous n'expliciterons pas, la condition d'être un champ de topos est de nature locale. On définit le morphisme $\tau_C(X)$ par son foncteur image inverse, lequel associe, à un objet T de X, le foncteur cartésien constant $t\colon C \to FL(X)$, $t(a) = p(a) \times T$. Par le même procédé de réduction au cas d'une gerbe de torseurs, on vérifie que c'est bien un morphisme de topos. Il reste à prouver la propriété universelle. Par dévissage et localisation, on montre qu'elle est satisfaite pour les X-topos de la forme $X \mid T$, $T \in Ob(X)$. On montre ensuite que si $f\colon X' \to X$ est un morphisme de topos et si $C' = f^*(C)$, on a un carré commutatif à isomorphisme près

$$\begin{array}{ccc} B_{C'}(X') & \to & B_C(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \to & X \end{array}$$

et que celui-ci est 2-cartésien dans la 2-catégorie des X-topos.

2.2. La construction de $B_C(X)$ à partir de X fournit un (« vrai ») 2-foncteur de la 2-catégorie des champs de groupoïdes dans celle des X-topos, qui est pleinement fidèle, c'est-à-dire que l'on a la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2. — *Soient C et C' deux champs de groupoïdes sur un topos X. Le foncteur naturel*

(1) $$\mathrm{Cart}_X(C, C')^0 \to \mathrm{Mor}_X(B_C(X), B_{C'}(X))$$

est une équivalence de catégories.

Il nous faut expliquer le retournement des flèches. Un morphisme de champs $m\colon C \to C'$ induit par composition un foncteur $B_m^*\colon B_{C'} \to B_C$ qui est le foncteur image inverse d'un morphisme de topos $B_m\colon B_C \to B_{C'}$, et un morphisme de morphismes de champs $u\colon m \to m'$ induit, par composition un morphisme de foncteurs $B_u\colon B_m^* \to B_{m'}^*$, d'où, d'après les conventions habituelles, un morphisme de morphismes de topos en sens inverse $B_u\colon B_{m'} \to B_m$.

§ 3. — Nous allons maintenant montrer comment on peut, en utilisant seulement la notion d'image directe et inverse de champs, formuler et démontrer les variantes non commutatives du théorème de changement de base pour un morphisme propre en cohomologie étale; nous indiquerons en gros la marche de la démonstration.

THÉORÈME 3.1. — *Soit un carré cartésien de schémas*

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{g'} & X_0 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_0} \\ Y & \xleftarrow[g]{} & Y_0 \end{array}$$

tel que f soit propre et Y localement noethérien. Pour tout champ ind-fini C sur le site étale $X_{\acute{e}t}$ de X, le morphisme naturel $u: g^*f_*(C) \rightarrow f_{0*}g'^*(C)$ est une équivalence de catégories.

On dit qu'un champ C est ind-fini (resp. constructible) si, pour tout objet c de C de projection $S \in Ob(X_{\acute{e}t})$, le faisceau $Aut_S(c)$ des S-automorphismes de c est ind-fini (resp. constructible) [1]. Qu'un morphisme de champs soit une équivalence, se voit fibre par fibre, la fibre en un point $x: (U\text{-ens}) \rightarrow Y_{0\acute{e}t}$ du site étale $Y_{0\acute{e}t}$ de Y_0 étant l'image inverse de u par x. On réduit ainsi l'énoncé au suivant.

PROPOSITION 3.2. — *Si, de plus, Y est le spectre d'un anneau local hensélien et noethérien et si Y_0 est le spectre du corps résiduel, le foncteur restriction $v: C(X) \rightarrow C_0(X_0)$ est une équivalence.*

Si Z, ou F, ou C, est un schéma, ou un faisceau, ou un champ sur X, on note Z_0, ou F_0, ou C_0 son image inverse sur X_0. Lorsque C est la gerbe des torseurs sous un faisceau de groupes F (resp. le champ à fibres discrètes attaché à un faisceau d'ensembles F), la conclusion de l'énoncé signifie que l'application $H^i(X, F) \rightarrow H^i(X_0, F_0)$ est bijective pour $i \leqslant 1$ (resp. $i = 0$). En particulier, la condition (A) ci-dessous n'est autre que le théorème de spécialisation du groupe fondamental; on la démontre (ainsi que (B)) en utilisant le théorème d'approximation de M. Artin, qui permet de supposer que Y est le spectre d'un anneau local complet, auquel cas le résultat est dû à Grothendieck [2]. Du point de vue de la géométrie algébrique, ceci est évidemment l'ingrédient essentiel de la démonstration.

(A) Pour tout X-schéma fini X', le foncteur restriction $C(X') \rightarrow C(X'_0)$ est une équivalence de catégories.

(B) Pour tout faisceau d'ensembles F sur X, l'application $F(X) \rightarrow F_0(X_0)$ est bijective.

(C) Pour tout champ ind-fini C sur X, le foncteur $v: C(X) \rightarrow C_0(X_0)$ est une équivalence.

On montre que v est toujours pleinement fidèle en appliquant (B) au faisceau des morphismes entre deux sections quelconques de C. Soit alors $c_0 \in Ob(C_0(X_0))$; la sous-gerbe de C_0 engendrée par c_0 s'interprète comme une section de l'image inverse sur X_0 du faisceau des sous-gerbes maximales de C (1.2), elle provient donc d'après (B) d'une sous-gerbe de C, ce qui permet de supposer que C est une gerbe. Introduisons la catégorie fibrée sur SCH/X qui, à un X-schéma $z: Z \rightarrow X$ associe la catégorie $C(Z)$ des sections de l'image inverse $z^*(C)$ de C. Il se trouve que c'est un champ pour une topologie qui est plus fine que la topologie étale et pour laquelle sont couvrants les morphismes surjectifs qui sont de plus entiers, ou propres, ou plat et localement de présentation finie. De plus, on prouve que les conditions (A) et (B) sont stables si l'on remplace X par un X-schéma entier X' et X_0 par $X'_0 = X' \times_X X_0$ (ou même par $X'_1 = X' \times_X X_1$, où X_1 est un fermé de X qui contient X_0). L'on en déduit par descente que v est une équivalence s'il en est ainsi de $C(X') \rightarrow C(X'_0)$. Il est alors facile de voir que l'on peut supposer que X est intègre et, par récurrence noethérienne, il suffit de prouver qu'il existe un fermé $X_1 \supset X_0$ tel que $C(X) \rightarrow C(X_1)$ soit une équivalence. On construit X' et X_1 grace au lemme suivant.

LEMME 3.3. — *Soit X un schéma intègre, quasi-compact et quasi-séparé et soit C une gerbe constructible (resp. ind-finie) sur X. Il existe un morphisme entier $s: X' \rightarrow X$,* *un faisceau de groupes fini et constant (resp. ind-fini) F sur X', un ouvert dense U de X et un morphisme de gerbes $r: s^*(C) \to T$, où T est la gerbe des F-torseurs, tels que la restriction de r à $s^{-1}(U)$ soit une équivalence.*

On note K' une clôture séparable du corps des fonctions K de X et l'on prouve le lemme en utilisant le fait que le site zariskien de X' est équivalent à son site étale. Prenant pour X_1 un fermé contenant X_0 et tel que $U \supset (X - X_1)$, il reste à prouver que $C'(X') \to C'(X'_1)$ est une équivalence, où $C' = s^*(C)$. Soit c_1 une section de C' sur X'_1 et soit K la catégorie fibrée sur $X'_{1\,\text{ét}}$ dont les objets de projection S sont les (c, i), où $c \in Ob(C'_S)$ et où $i: (c \mid S_1) \to (c_1 \mid S_1)$ est un S_1-isomorphisme. C'est une gerbe car X'_1 est fermé dans X', et pour que c_1 provienne d'un $c \in Ob(C(X'))$, il faut et il suffit que K ait une section ; soit K' la gerbe construite de façon analogue en remplaçant C par T et c_1 par $d_1 = r(c_1)$. On a un morphisme naturel $K \to K'$, qui est une équivalence comme on voit fibre par fibre : aux points de X'_1, ces fibres sont équivalentes à la catégorie finale, aux points de U, le morphisme r est une équivalence. Il suffit donc de prouver que d_1 provient d'une section de T. Puisque nous avons vu que le couple (X', X'_1) satisfait à la condition (A), cela est vrai lorsque C est constructible car alors F est constant. D'où la condition (C) pour un champ constructible, donc aussi, par passage à la limite pour la gerbe des torseurs sous un groupe ind-fini, d'où le cas général, en reprenant le même raisonnement et en invoquant cette fois la partie respée de (3.3).

Par un raisonnement tout analogue mais plus simple, car on peut ici se contenter de localiser pour la topologie étale, on démontre les variantes non commutatives du *théorème de changement de base lisse.* On doit à Mme Raynaud l'énoncé suivant qui est la variante non commutative du *théorème de finitude* des images directes supérieures par un morphisme propre.

THÉORÈME 3.4. — *Soit $f: X \to S$ un morphisme propre de type fini, S étant localement noethérien et soit C un champ sur X. Si X et son faisceau des sous-gerbes maximales sont constructibles, il en est de même de $f_*(C)$ et de son faisceau des sous-gerbes maximales.*

RÉFÉRENCES

[1] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER. — Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I. H. E. S., 1963-1964, Cohomologie Étale des schémas.
[2] A. GROTHENDIECK. — Séminaire de Géométrie Algébrique de l'I. H. E. S., 1960.

École normale supérieure
de Saint-Cloud
92-Saint-Cloud (France)