Lieber Herr Faltings*,

Vielen Dank für ihre rasche Antwort und Übersendung der Separata! Ihr Kommentar zur sog. “Theorie der Motive” ist von der üblichen Art, die wohl grossenteils der in der Mathematik stark eingewurzelten Tradition entspringt, nur denjenigen mathematischen Situationen und Zusammenhängen eine (eventuell langatmige) Untersuchung und Aufmerksamkeit zuzuwenden, insofern sie die Hoffnung gewähren, nicht nur zu einem vorläufigen und möglicherweise z.T. mutmasslichen Verständnis eines bisher geheimnisvollen Gebietes zu kommen, wie es in den Naturwissenschaften ja gang und gäbe ist – sondern auch zugleich Aussicht auf die Möglichkeit einer laufenden Absicherung der gewonnenen Einsichten durch stichhaltige Beweise. Diese Einstellung scheint mir nun psychologisch ein ausserordentlich starkes Hindernis zur Entfaltung mathematischer Schauenkraft, und damit auch zum Fortschreiten mathematischer Einsicht im üblichen Sinn, nämlich der Einsicht, die durchdringend oder erschöpfend genug ist, um sich schliesslich “beweisen” zu können. Was meine Erfahrung in mathematischer Arbeit mich immer wieder lehrte, ist dass stets in erster Linie der Beweis aus der Einsicht entspringt, nicht im Gegenteil – und dass die Einsicht in erster Linie aus einem feinfühligen und hartnäckigen Aufspüren der relevanten Wesenheiten und Begriffen entsteht, und deren Wechselbeziehung. Der leitende Faden ist innere Kohärenz des allmählich sich aus dem Dunst lösenden Bildes, und Einklang auch mit der anderweilig Bekannten oder Erahntem – und er leitet um so sicherer, als die “exigence” der Kohärenz eine strengere und feinfühlendere ist.

Um auf Motive zurückzukommen, so existiert meines Wissens keinerlei “Theorie” der Motive, aus dem einfachen Grund, dass niemand sich die Mühe machte, eine solche Theorie auszuarbeiten. Das vorhandende Material an bekannten Tatsachen und an geahnten Zusammenhängen ist von beindruckender Reichhaltigkeit – unverhältnismässig viel mehr, will mir scheinen, als je zu Ausarbeitung einer physikalischen Theorie vorlag! Es existiert z.Z. eine Art “yoga des motifs”, das einer Handvoll Eingeweihter geläufig ist, und in manchen Situationen einen sicheren Anhalt gewährt zur Erratung gewisser Zusammenhänge, die sich dann auch bisweilen tatsächlich so oder so beweisen lassen (wie etwa in Ihren letzten Arbeit der Satz über Galois Aktion auf Tateschen Moduln abelscher Mannigfaltigkeiten). Es hat

* Editors’ note. This letter is dated June 27, 1983. We are grateful to G. Faltings for giving his permission to reproduce it here.

den Status scheint mir einer Art Geheimwissenschaft – Deligne scheint mir der, dem sie am geläufigsten ist. Seine erste [veröffentlichte] Arbeit, über die Entartung der Leray'schen Spektralfolge für eine glatte eigentliche Abbildung algebraischer Mannigfaltigkeiten über $\mathbb{C}$, entsprang einer einfachen
$\frac{1}{2}$ Überlegung über "Gewichte" von Kohomologiegruppen, die zu jener Zeit reine Heuristik ware, heute aber (seit dem Beweis der Weil'schen Vermutungen) sich wohl über beliebigem Grundschema durchführen liesse. Es ist mir auch klar, dass die Deligne'sche Erweiterung der Hodge Theorie weitgehend aus dem ungeschriebenen "Yoga" der Motive schöpfte – nämlich dem Bestreben entsprang, gewisse "Tatsachen" aus jenem Yoga, und ganz besonders die Existenz der Filtration der Kohomologie durch "Gewichte", und zudem die Halbeinfachheit gewisser Aktionen von Fundamentalgruppen, im Rahmen der transzendenten Hodge-Strukturen sicherzustellen.

Nun einige Worte zum "Yoga" der anabelschen Geometrie. Es geht dabei um "absolute" alg. Geometrie, nämlich über Grundkörper (etwa), die endlich erzeugt über dem Primkörper sind. Eine allgemeine Grundidee ist, dass für gewisse, sog. "anabelsche", Schemata X (von endlichem Typ) über K, die Geometrie von X vollständig durch die (profinite) Fundamentalgruppe $\pi_1(X, \xi)$ bestimmt ist (wo ξ ein "geometrischer Punkt" von X ist, etwa mit Wert in einer vorgeschriebenen alg. abg. Hülle $\overline{K}$ von K), zusammen mit der Extra-Struktur, die durch den Homomorphismus

$$\pi_1(X, \xi) \to \pi_1(K, \xi) = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \tag{1}$$

gegeben ist, deren Kern die "geometrische Fundamentalgruppe"

$$\pi_1(\overline{X}, \xi) \qquad (\overline{X} = X \otimes_K \overline{K}) \tag{2}$$

ist – also auch die profinite Kompaktifikation der transzendenten Fundamentalgruppe, wenn $\overline{K}$ als Teilkörper des Körpers $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen gegeben ist. Das Bild von (1) ist eine offene Teilgruppe der profinite Galoisgruppe, vom Index 1 dann, genau wenn $\overline{X}$ zusammenhängend ist.

Die erste Frage ist, welche Schemata X als "anabelsch" angesehen werden sollen. Dabei will ich mich jedenfalls auf glattes X beschränken. Völlige Klarheit habe ich nur im Fall $\dim X = 1$. Allenfalls soll die anabelsche Eigenschaft eine rein geometrische sein, nämlich sie hängt nur von $\overline{X}$ über dem alg. abg. Körper $\overline{K}$ (oder dem entsprechenden Schema über beliebiger alg. abg. Erweiterung von $\overline{K}$, etwa $\mathbb{C}$) ab. Zudem soll $\overline{X}$ anabelsch sein wenn und nur wenn die zusammenhängenden Komponente es sind. Schliesslich (im Fall der Dimension 1) ist eine (glatte zusammenhängende) Kurve über $\overline{K}$ anabelsch, wenn ihre EP-charakteristik < 0 ist, oder auch, wenn ihre Fundamentalgruppe nicht abelsch ich; diese letztere Formulierung

trifft jedenfalls in Charakteristik null zu, oder im Fall einer eigentlichen ("kompakten") Kurve – sonst muss die "prim-zu-p" Fundamentalgruppe genommen werden. Andere äquivalente Formulierungen: das Gruppen-
$\frac{2}{3}$ schema der Automorphismen soll der Dimension null sein, oder auch die Automorphismengruppe soll endlich sein. Ist die Kurve vom Typ (g, ν), wo g das Geschlecht, und ν die Anzahl der "Löcher" oder "Punkte im Unendlichen" ist, so sind die anabelsche Kurven genau die, für die der Typ verschieden ist von

$$(0,0), (0,1), (0,2) \text{ und } (1,0)$$

nämlich

$$2g + \nu > 2 \quad (\text{i.e. } -\chi = 2g - 2 + \nu > 0).$$

Wenn der Grundkörper $\mathbb{C}$ ist, so sind die anabelschen Kurven genau die, deren (transzendente) universelle Überlagerung "hyperbolisch" ist, nämlich isomorph zur Poincaré'schen Halbebene – also genau die, die "hyperbolisch" sind im Sinne von Thurston.

Andernteils sehe ich eine Mannigfaltigkeit jedenfalls dann als "anabelsch" (ich könnte sagen "elementar anabelsch") an, wenn sie sich durch successive glatte Faserungen aus anabelschen Kurven aufbauen lässt. Demnach (einer Bemerkung von M.Artin zufolge) hat jeder Punkt einer glatten Mannigfaltigkeit X/K ein Fundamentalsystem von (affinen) anabelschen Umgebungen.

Schliesslich wurde letztlich meine Aufmerksamkeit immer stärker durch die Modulmannigfaltigkeiten (oder vielmehr die Modulmultiplizitäten) $M_{g,\nu}$ für algebraische Kurven beansprucht, und ich bin so ziemlich überzeugt, dass auch diese als "anabelsch" angesprochen werden dürfen, nämlich dass ihre Beziehung zur Fundamentalgruppe eine ebenso enge ist, wie im Fall von anabelschen Kurven. Ich würde annehmen, dass dasselbe auch für die Modulmultiplizitäten polarisierter abelscher Mannigfaltigkeiten gelten dürfte.

Ein grosser Teil meiner Überlegungen vor zwei Jahren beschränkte sich auf den Fall der Char. Null, den ich nun vorsichtshalber voraussetzen will. Da ich mich seit über einem Jahr nicht mehr mit diesem Fragenkomplexe beschäftigt habe, verlasse ich mich auf meine Gedächtnis, das jedenfalls rascher zugänglig ist als Stapel von Auszeichnungen – ich hoffe, ich webe nicht zuviel Irrtürmer mit hinein! Ein Ausgangspunkt unter anderem war die bekannte Tatsache für Mannigfaltigkeiten X, Y über einem alg. abg. Körper K, wenn Y sich in eine [quasi-]abelsche Mannigfaltigkeit A einbetten lässt, dass eine Abbildung $X \to Y$ bis auf Translation von A bekannt ist, wenn die entsprechende Abbildung für H_1 (etwa ℓ-adisch) bekannt ist. Daraus folgt in manchen Situationen (etwa, wenn Y "elementar anabelsch"

ist) dass bei dominierendem f (nämlich $f(X)$ dicht in Y), f genau bekannt
$\frac{3}{4}$ ist, wenn $H_1(f)$ bekannt ist. Doch der Fall von konstanten Abbildungen lässt sich offensichtlich nicht einordnen. Aber gerade der Fall, wo X sich auf einen Punkt reduziert, ist von besonderem Interesse, falls man es auf eine "Bestimmung" der Punkte von Y absieht.

Geht man nun zum Fall eines Körpers K vom endlichen Typ über, und ersetzt man H_1 (nämlich die "abelianisierte" Fundamentalgruppe) durch die volle Fundamentalgruppe, so ergibt sich, falls Y "elementar anabelsch" ist, dass f bekannt ist, wenn $\pi_1(f)$ bekannt ist "bis auf inneren Automorphismus". Wenn ich recht ersinne, genügt es hier, statt der vollen Fundamentalgruppen, mit deren Quotienten zu arbeiten, die sich ergeben, wenn man (2) durch die entsprechenden abelianisierten Gruppen $H_1(\overline{X}, \hat{\mathbb{Z}})$ ersetzt. Der Beweis ergibt sich ziemlich einfach aus dem Mordell-Weilschen Satz, dass die Gruppe $A(K)$ ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul ist, wo A die "jacobienne généralisée" von Y ist, die der "universellen" Einbettung von Y in einen Torsor unter einer quasi-abelschen Mannigfaltigkeit entspricht. Der springende Punkt ist hier, dass ein Punkt von A über K nämlich ein "Schnitt" von A über K, völlig bestimmt ist durch die entsprechende Spaltung der exakten Sequenz

$$1 \to H_1(\overline{A}) \to \pi_1(A) \to \pi_1(K) \to 1 \tag{3}$$

(bis auf inneren Automorphismus), nämlich durch die entsprechende Kohomologieklasse in

$$H^1(K, \pi_1(\overline{A})),$$

wobei $\pi_1(\overline{A})$ auch durch die ℓ-adische Komponente, nämlich den Tate'sche Moduln $T_\ell(\overline{A})$ ersetzt werden kann.

Aus diesem Ergebnis folgt nun leicht das Folgende, das mich vor zwei ein halb Jahren einigermassen verblüffte: es seien K, L zwei Körper vom endlichen Typus (kurz "absolute Körper" genannt), dann ist ein Homomorphismus

$$K \to L$$

völlig bestimmt, wenn man die entsprechende Abbildung

$$\pi_1(K) \to \pi_1(L) \tag{4}$$

der entstprechenden "äusseren Fundamentalgruppen" kennt (nämlich, wenn jene bis auf inneren Automorphismus bekannt ist). Dies klingt stark an die topologische Intuition des Zusammenhanges zwischen $K(\pi, 1)$ Räumen, und deren Fundamentalgruppen – nämlich, Homotopieklassen von Abbildungen der Räume entsprechen eindeutig den entsprechenden Abbildungen

zwischen den äusseren Gruppen. Im Rahmen jedoch absoluten alg. Geometrie (nämlich über "absoluten" Körpern) bestimmt die Homotopieklasse
4/5 einer Abbildung schon die Abbildung. Der Grund dafür scheint mir in der ausserordentlichen Rigidität der vollen Fundamentalgruppe, die wiederum daraus entspringt, dass die [(äussere)] Aktion des "arithmetischen Teils" jener Gruppe, nämlich $\pi_1(K) = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$, auf dem "geometrischen Teil" $\pi_1(X_{\overline{K}})$, so ausserordentlich stark ist (was sich insbesondere ja auch in den Weil-Deligne'schen Aussagen ausdrückt).

Letztere Aussage ("Der Grund dafür...") kam mir rasch in die Schreibmaschine – ich erinnere jetzt nämlich, dass für die vorangehende Aussage über Homomorphismen von Körpern keineswegs notwendig ist, dass diese "absolut" seien – es genügt, dass beide vom endlichen Typ über einem gemeinsamen Grundkörper k seien, sofern wir uns auf k-Homomorphismen beschränken. Dabei genügt es offensichtlich, sich auf den Fall k alg. abg. zu beschränken. Die erwähnte "Rigidität" hingegen spielt entscheidend ein, wenn wir es darauf absehen, diejenigen Abbildungen (4) zu kennzeichnen, die einem Homomorphismus $K \to L$ entsprechen. In dieser Hinsicht ist folgende Vermutung naheliegend: wenn der Grundkörper k "absolut" ist, dann sind genau die äusseren Homomorphismen (4) "geometrisch", die mit den "Augmentationhomomorphismen" zu $\pi_1(K)$ verträglich sind. [siehe Berichtigung im PS: die Bildgruppe muss darin von endlichen Index sein!] Bei dieser Aussage kann man sich offensichtlich auf den Fall beschränken wenn k der Primkörper ist, also $\mathbb{Q}$ (in der Char. Null). Das "Grundobjekt" der anabelschen alg. Geometrie der Char. Null, dass für den Primkörper $\mathbb{Q}$ steht, ist demnach die Gruppe

$$\Gamma = \pi_1(\mathbb{Q}) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}), \tag{5}$$

wo $\overline{\mathbb{Q}}$ die alg. abg. Hülle von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$ sein soll.

Die obige Vermutung kann als die Hauptvermutung der "birationellen" anabelschen alg. Geometrie angesehen werden – sie sagt aus, dass die Kategorie der "absoluten birationellen alg. Mannigfaltigkeiten" in Char. Null sich voll einbetten lässt in die Kategorie der nach Γ augmentierten proendlichen Gruppen. Weiterhin besteht dann noch die Aufgabe, zu einer ("rein algebraischen") Beschreibung der Gruppe Γ zu gelangen, und zudem, zu einem Verständnis, welche Γ-augmentierten proendlichen Gruppen zu einem $\pi_1(K)$ isomorph sind. Ich will vorerst nicht auf diese Fragen eingehen, möchte hingegen eine verwandte und beträchtlich schärfere Vermutung für anabelsche Kurven formulieren, aus der die voherige folgt. Ich sehe da zwei verschieden erscheinende, aber äquivalente Formulierungen:

1) Es seien X, Y zwei (zusammenhängende, das sei stets vorausgesetzt) anabelsche Kurven über dem absoluten Körper der Char. Null, man betra-

5/6 chtet die Abbildung

$$\text{(6)} \qquad \mathrm{Hom}_K(X, Y) \to \mathrm{Hom\ ext}_{\pi_1(K)}(\pi_1(X), \pi_1(Y)),$$

wo Hom ext die Menge der äusseren Homomorphismen proendlicher Gruppen bezeichnet, und der Index $\pi_1(K)$ Kompatibilität mit den Augmentationen nach $\pi_1(K)$ bedeutet. Nach dem Vorangehenden ist bekannt, dass diese Abbildung injektiv ist. Ich vermute dass sie bijektiv ist. [siehe Berichtigung im P.S.]

2) Diese zweite Form kann als Reformulierung von 1) angesehen werden, im Fall von konstanten Abbildungen von X zu Y. Es sei $\Gamma(X/K)$ die Menge aller K-wertigen Punkte (also "Schnitte") von X über K, man betrachtet die Abbildung

$$\text{(7)} \qquad \Gamma(X/K) \to \mathrm{Hom\ ext}_{\pi_1(K)}(\pi_1(K), \pi_1(X)),$$

wo die zweite Menge also die Menge aller "Spaltungen" der Gruppenerweiterunge (3) ist (wo A durch X ersetzt wurde – $\pi_1(X) \to \pi_1(K)$ ist in der Tat surjektif, sofern nur X überhaupt einen K-wertigen Punkt besitzt und deshalb X auch "geometrisch zummanenhängend" ist), oder vielmehr die Menge der üblichen Konjugationklassen solcher Spaltungen via Aktion der Gruppe $\pi_1(\overline{X})$. Es ist bekannt, dass (7) injektiv ist, und die Hauptvermutung sagt aus, dass sie bijektiv ist. [siehe unten Berichtigung]

Fassung 1) folgt aus 2), indem man K durch den Funktionenkörper von X ersetzt. Dabei ist es übrigens gleichgültig, ob X anabelsch ist, und wenn ich nicht irre, folgt die Aussage 1) sogar für beliebiges glattes X (ohne $\dim X = 1$ Voraussetzung). Was Y anbelangt, so folgt aus der Vermutung, dass Aussage 1) gültig bleibt, sofern nur Y "elementar anabelsch" ist [siehe Berichtigung im PS], und entsprechend natürlich für Aussage 2). Dies gibt nun im Prinzip, unter Verwendung der Artin'schen Bemerkung, die Möglichkeit einer vollständigen Beschreibung der Kategorie der Schemata vom endlichen Typus über K, "en termes de" $\Gamma(K)$ und Systemen von proendlichen Gruppen. Hier wiederum habe ich etwas rasch in die Schreibmaschine gehauen, da die Hauptvermutung erst noch ausgearbeitet und vervollständigt werden muss, zu einer Aussage darüber, welche nun (bis auf Isomorphismus) die $\Gamma(K)$-augmentierten proendlichen vollständigen Gruppen sind, die von anabelschen Kurven über K stammen. Wenn es nur auf eine Aussage der "pleine fidélité" wie in obigen Formulierungen 1) und 2) ankommt, so dürfte sich folgendes ohne besondere Schwierigkeit aus diesen ableiten lassen, und sogar schon (wenn ich nicht irre) aus der vorangehenden beträchtlich schwächeren birationellen Variante. Es seien nämlich X und Y zwei Schemata, die "wesentlich vom endlichen Typ über $\mathbb{Q}$" sind,

z.B. jedes eine vom endlichen Typ über einem (unbestimmt bleibenden)
$\frac{6}{7}$ absoluten Körper der Char. Null. X und Y brauchen weder glatt noch zusammenhängend sein, ebensowenig "normal" oder dergleichen – hingegen sollen sie reduziert vorausgesetzt werden. Ich betrachte die entsprechenden etalen Topoi X_{et} und Y_{et}, und die Abbildung

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \to \mathrm{Iskl}\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{top}}(X_{\mathrm{et}},Y_{\mathrm{et}}), \tag{8}$$

wo $\mathrm{Hom}_{\mathrm{top}}$ die (Menge der) Homomorphismen der Topoi X_{et} in Y_{et} bezeichnet, und Iskl Übergang zu (der Menge der) Isomorphieklassen bedeutet. (Es sei dazu bemerkt, dass die Kategorie $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{top}}(X_{\mathrm{et}},Y_{\mathrm{et}})$ rigid ist, nämlich dass es stets nur einen Isomorphismus zwischen zwei Homomorphismen $X_{\mathrm{et}} \to Y_{\mathrm{et}}$ geben kann. Wenn X und Y Multiplizitäten und nicht Schemata sind, muss folgende Aussage durch eine entsprechend feinere, nämlich eine Äquivalenz von Kategorien $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)$ mit $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{top}}(X_{\mathrm{et}},Y_{\mathrm{et}})$ ersetzt werden.) Wesentlich ist dabei, dass X_{et} und Y_{et} lediglich als topologische Gebilde, also mit Ausschluss der Strukturgarben, betrachtet werden, während ja das erste Glied von (8) als Iskl $\mathrm{Hom}_{\mathrm{top.ann.}}(X_{\mathrm{et}},Y_{\mathrm{et}})$ aufgefasst werden kann. Zuerst sei bemerkt, dass aus dem vorhergehendem "Bekannten" ohne Schwierigkeit folgen dürfte, dass (8) injektiv ist. Dazu fällt mir nun allerdings ein, dass ich bei der Beschreibung des zweiten Glieds von (8) ein wichtiges Strukturelement vergass, nämlich X_{et} und Y_{et} sollen als Topoi über der absoluten Basis $\mathbb{Q}_{\mathrm{et}}$ aufgefasst werden, die durch die proendliche Gruppe $\Gamma = \pi_1(K)$ (5) völlig beschrieben ist. Also $\mathrm{Hom}_{\mathrm{top}}$ soll als $\mathrm{Hom}_{\mathrm{top}/\mathbb{Q}_{\mathrm{et}}}$ gelesen werden. Mit dieser Berichtigung wäre nun die naheliegende Vermutung, dass (8) bijektiv sei. Das kann nun aber aus dem Grund nicht [ganz] zutreffen, weil es ja endliche radizielle Morphismen $Y \to X$ geben kann (sogenannte "universelle Homomorphismen"), die nämlich eine topologische Äquivalenz $Y_{\mathrm{et}} \xrightarrow{\sim} X_{\mathrm{et}}$ zeitigen, ohne Isomorphismen zu sein, so dass also keine Umkehrung $X \to Y$ existiert, während sie doch für die etalen Topoi existiert. Setzt man X als normal voraus, so vermute ich, dass (8) bijektiv ist. Im allgemeine Fall sollte es zutreffen, dass für jedes ϕ im zweiten Glied sich ein Diagram bilden lässt

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & Y
\end{tikzcd}$$

(wo g ein "universeller Homomorphismus" ist), aus dem ϕ im naheliegenden Sinn entspringt. Ich vermute sogar, dass dasselbe gültig bleibt ohne Char.

Null Voraussetzung , nämlich wenn $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{Z}$ ersetzt wird – was damit zusammenhängt, dass die “birationelle” Hauptvermutung auch in beliebiger
$\frac{7}{8}$ Charakteristik gültig sein dürfte, sofern wir nur die “absoluten” Körper durch deren “perfekte Hüllen” $K^{p^{-\infty}}$ ersetzen, die ja dasselbe π_1 haben.

Ich fürchte, ich wurde etwas ausschweifig mit jenem Abstecher bezüglich beliebiger Schemata vom endlichen Typus und deren etalen Topoi – interessanter für Sie dürfte eine dritte Formulierung der Hauptvermutung sein, die jene noch leicht verschärft, und die zudem einen besonders “geometrischen” Beiklang hat. Es ist auch die, die ich vor etwa zwei Jahren Deligne mitteilte, und von der er mir sagte, dass aus ihr die Mordell’sche Vermutung folge. Es sei wiederum X eine anabelsche geometrische zusammenhängende Kurve über dem absoluten Körper K der Char. Null, $\widetilde{X}$ ihr universell Überdeckung, aufgefasst als ein Schema (aber nicht vom endlichen Typ) über $\overline{K}$, nämlich als universelle Überdeckung der “geometrischen” Kurve $\overline{X}$. Sie steht hier als eine Art algebraisches Analogon zur transzendenten Konstruktion, wo die Überdeckung der Poincaré’schen Halbebene isomorph ist. Ich betrachte aber zudem die Komplettierung $X^\wedge$ von X (die also eine projektive Kurve ist, nicht unbedingt anabelsch, da ja X vom Geschlecht 0 oder 1 sein kann), und deren Normalisierung $\widetilde{X}^\wedge$ bezüglich $\widetilde{X}$, die eine Art Kompaktifizierung von $\widetilde{X}$ darstellt. (Wenn es Ihnen lieber ist, können Sie gerne vorerst X eigentlich, also $X = X^\wedge$ voraussetzen, also $\widetilde{X} = \widetilde{X}^\wedge$.) Die Gruppe $\pi_1(X)$ kann aufgefasst werden als die Gruppe der X-Automorphismen von $\widetilde{X}$, und sie agiert zugleich auf die “Kompaktifizierung” $\widetilde{X}^\wedge$. Diese Aktion ist verträglich mit der Aktion auf $\overline{K}$ via $\pi_1(K)$. Ich interessiere mich nun für die entsprechende Aktion

$$\text{Aktion von } \pi_1(X) \text{ auf } \widetilde{X}^\wedge(\overline{K}),$$

(die [Menge der] $\overline{K}$-wertigen Punkte, oder was aufs selbe herauskommt, der vom generischen Punkt verschiedenen Punkte von $X^\wedge$), und insbesondere, für eine gegebene Spaltung von (3)

$$\pi_1(K) \to \pi_1(X),$$

für die entsprechende Aktion von der Galois-Gruppe $\pi_1(K)$. Die Vermutung ist nun, dass letztere Aktion (genau) einen Fixpunkt besitzt.

Dass es höchstens einen Fixpunkt geben kann, folgt aus der Injektivität in (7), oder lässt sich jedenfalls auf dem selben Weg mittels dem Mordell-Weilschen Satz beweisen. Unbewiesen ist die Existenz des Fixpunktes, die mehr oder weniger der Surjektivität von (7) äquivalent ist. Dabei geht es mir nun aber auf, dass die Formulierung von der Hauptvermutung via (7), die ich vorhin gab, nur im Fall wo X eigentlich ist eine korrekte ist – und in diesem Fall ist sie mit der dritten (soeben gegebenen) Formulierung tatsächlich äquivalent. Im Falle hingegen, wo X nicht eigentlich ist, also “undendlich

$\frac{8}{9}$ ferne Punkte" besitzt, so liefert jeder eine dieser Punkte auf naheliegende Weise ein erkleckliches Paket von Spaltungsklassen (deren Mächtigkeit das des Kontinuums ist), die sich nicht durch im endlichen liegende Punkte erhalten lassen. Diese entsprechen dem Fall eines Fixpunktes in $\widetilde{X}^\wedge$, der nicht in $\widetilde{X}$ liegt. Die Einzigkeit des Fixpunktes besagt unter anderen, ausser der Injektivität von (7), dass die "Pakete", die verschiedenen Punkten im Unendlichen entsprechen, leeren Durchschnitt haben, also dass jede Spaltungsklasse, die keinem endlichen Punkt entspricht, einem eindeutig bestimmten Punkt im Unendlichen entspringt.

Anstoss für diese dritte Formulierung der Hauptvermutung waren gewisse transzendenten Überlegungen über Aktion endlicher Gruppen auf algebraischen komplexen Kurven und deren (transzendent definierten) universellen Überlagerungen, die in meinen Überlegungen (in der ersten Hälfte des Jahres 1981, also vor zwei Jahren etwa), über die Aktion von Γ auf gewisse proendliche anabelsche Fundamentalgruppen (insbesondere die von $\mathbb{P}^1 - (0, 1, \infty)$), ein entscheidende Rolle spielten. (Diese Rolle war vor allem die eines Leitfadens ins vorerst völlig Unbekannte, da die entsprechenden Aussagen in Char $p > 0$ unbewiesen blieben, und auch heute noch sind.) Um auf die Aktion von Galoisgruppen wie $\pi_1(K)$ zurückzukommen, so erscheint diese in mancher Hinsicht Analog zur Aktion endlicher Gruppen, was sich z.B. auf besonders frappante und präzise Art in der vorherigen Vermutung äussert.

Ich nahm die anabelschen Überlegungen zwischen Dezember 81 und April 82 wieder auf, diesmal aber mit einem verschiedenem Schwergewicht – nämlich dem Bestreben nach einem Verständnis der mannigfaltigen Struktur der [Teichmüllerschen] Fundamentalgruppen $T_{g,\nu}$ (besser, der Fundamentalgroupoids) der Modulmultiplizitäten $\overline{M}_{g,\nu}$, und der Aktion von Γ auf deren proendliche Komplettierung. (An diese Untersuchung möchte ich diesen Herbst wieder anknüpfen, wenn ich mich in diesem Sommer des Aufschreibens von davon etwas sehr entlegenden Überlegungen über Grundlagen kohomologischer bezw homotopischer Algebra entledigen kann, das mich seit vier Monaten schon beschäftigt.) Ich bitte um Nachsicht um die etwas chaotische Darstellung eines Ideenkreises, der mir zwar sechs Monate lang intensiv im Atem hielt, mit dem ich aber seit zwei Jahren nur sehr flüchtigen Kontakt hatte, wenn überhaupt. Sollte es Sie interessieren, und sich die Gelegenheit ergeben, dass Sie sich in Südfrankreich befinden, wäre es mir ein Vergnügen, mit Ihnen auf diese oder andere Aspekte des "anabelschen Yogas" einzugehen. Es wäre sicherlich auch möglich, Sie für eine Ihnen genehme Zeitspanne zur Universität Montpellier einzuladen, nur fürchte ich, dass die Prozedur bei der heutigen Konjunktur eine etwas lang-
$\frac{9}{10}$ wierige ist, da die Universität selbst für derlei Einladungen z.Z. keine Fonds

hat, eine Einladung also von Paris aus beschlossen bzw. genehmigt werden muss – was wohl heissen dürfte, dass entsprechende Vorschläge ungefähr ein Jahr im voraus gemacht werden müssen.

Mit diesen ermunternden Worten will ich nun aber diesen unmässig lang gewordenen Brief beenden, und Ihnen nur noch erfreuliche Ferien wünschen! Herzliche Grüsse

Ihr Alexander Grothendieck

PS Beim Nachlesen dieses Briefes fällt mir auf, dass, zugleich wie die zweite Fassung der Hauptvermutung, auch die Verallgemeinerung auf "elementar anabelsche" Mannigfaltigkeiten berichtigt werden muss, sorry! Übrigens sehe ich jetzt, dass die erste Fassung im selben Sinne berichtigt werden muss – nämlich im Fall wo Y nicht eigentlich ist, ist es notwendig, sich im ersten Glied von (6) auf nicht-konstante Homomorphismen zu beschränken, und im zweiten auf Homomorphismen $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$, deren Bild von endlichem Index (nämlich offen) ist. Im Falle, wo Y durch eine elementar anabelsche Mannigfaltigkeit ersetzt wird, gilt die Bijektivität von (6), sofern man sich im ersten Glied auf <u>dominierenden</u> Homomorphismen beschränkt, und im zweiten dieselbe Beschränkung (Bildgruppe von endlichem Index) beibehält. Ähnlich muss auch die "birationelle" Fassung berichtigt werden – nämlich man muss sich auf solche Homomorphismen (4) beschränken, deren Bildgruppe von endlichem Index ist.

Komme ich nun auf die Abbildung (7) zurück im Fall einer anabelschen Kurve, so lässt es sich genau angeben, welches die Spaltungsklassen im zweiten Glied sind, die keinem "endliche" Punkt also keinem Element des ersten Gliedes entsprechen; und wenn ich recht entsinne, lässt sich eine solche einfache Kennzeichnung des Bildes von (7) auch auf die allgemeinere Situation eines "elementar-anabelschen" X ausdehnen. Sofern ich mich nun entsinne, ist die Kennzeichnung (die natürlich gleichfalls mutmasslich ist und zwar in beiden Richtungen, "hinreichend" und "genügend") die folgende. Es sei

$$\pi_1(K)^o = \text{Kern von } \pi_1(K) \to \widehat{\mathbb{Z}}^* \text{ (der zyklotomische Charakter)}$$

Gegeben sei eine Spaltung $\pi_1(K) \to \pi_1(X)$, also $\pi_1(K)$ und deshalb auch $\pi_1(K)^o$ operiert auf $\pi_1(\overline{X})$, der geometrischen Fundamentalgruppe. Die Bedingung ist nun, dass die Fixpunktgruppe dieser Aktion nur aus 1 bestehen soll!