Nancy le 2.5.1952

Cher Dixmier,

Je n'ai jamais prouvé ni prétendu avoir prouvé le théorème dont tu parles, et qui d'ailleurs est faux. Il est en effet immédiat qu'il équivaudrait à l'énoncé suivant: Si K est un espace compact muni d'une mesure μ, M l'espace des fonctions sur K qui sont mesurables pour μ, muni de la topologie de la convergence *simple*, F un sous-espace de M contenant une suite partout dense, alors il existe pour tout $\epsilon > 0$ un compact $K_1 \subset K$ avec $|\mu|(K \cap (??)K_1) < \epsilon$, les $f \in F$ ayant toutes une restriction à K continue. Or, prends $K = (0, 1)$ avec la mesure de Lebesgue, il est (je pense) connu, et facile à démontrer (excellent exercice Bourbaki) qu'il existe une suite de fonctions mesurables sur K à laquelle toute fonction numérique définie sur K soit adhérente, ce qui prouve en particulier que M lui-même est déjà séparable, or M est loin d'avoir la propriété voulue!

Néanmoins, ton théorème sous sa forme initiale est vrai si F est métrisable, comme tu t'en es sans doute convaincu tout seul, car on se ramène alors au cas où la fonction faiblement mesurable donnée prend ses valeurs dans une partie *équicontinue* de F', cas où l'énoncé est trivial et figure déjà dans une rédaction antérieure. Comme le théorème est vrai encore lorsque F est le dual faible d'un espace métrisable séparable F (puisque alors $t \to \lambda_t$ est *fortement* mes.), ou le dual d'un espace de Banach F' (comme par exemple ℓ^∞) pour lequel la boule unité du dual faible F de F' admet une suite partout dense (même méthode que pour F du type (f)), il rest que dans les cas usuels, le théorème envisagé est valable. On pourrait même remarquer (re-exercice?) que la catégorie d'espaces localement convexes séparables F pour lesquels l'énoncé envisagé est vrai, est stable pour le produit topologique ou la somme directe d'un ensemble dénombrable d'espaces facteurs, et par l'opération de prendre un quotient ou une topologie moins fine – donc aussi pour les limites inductives dénombrables etc – en fait, on attrape tous les espaces raisonnables de l'Analyse.

Bien à toi

A. Grothendieck