A. Grothendieck
(Attaché de Recherches)
33 rue du Maréchal Gérard
Nancy (M et M)

Nancy le 20.11.1950

Cher Monsieur Dieudonné,

Je me permets de vous écrire à propos d'un problème sur lequel je m'achoppe pendant un certain temps sans obtenir de résultat définitif. Très probablement, vous devez avoir rencontré la question sous une forme ou sous une autre, car elle est voisine de l'ordre d'idées mises dans vos "moyennes invariantes". Voilà de quoi il s'agit:

Soit E un espace localement convexe dans lequel opère un groupe équicontinu G de transformations linéaires (il suffit que G soit équicontinu de E faible dans E faible, ou, ce qui revient au même: que le transposé ${}^tG$ transforme ~~tout~~ point $x' \in E'$ en une partie de E' dont l'enveloppe convexe fermée est faiblement compacte); soit K une partie convexe faiblement compacte invariante par G. Existe-t-il un point fixe dans K?

Par les techniques standard, on voit que ce problème est équivalent au suivant: considérons l'espace de Banach $C^\infty(G)$ des fonctions bornées sur G, ~~[illegible]~~ considérons l'ensemble $\mathcal{E}(G)$ des $f \in C^\infty(G)$ telles que leurs trajectoires sous G opérant par translations à gauche soit relativement faiblement compacte ("fonctions faiblement presque-périodiques"; on montre d'ailleurs qu'elles forment une sous-algèbre invariante fermée de $C^\infty(G)$). Est-ce que dans l'enveloppe convexe fermée $K(f)$ d'une telle f existe forcément une fonction constante? Si oui, on peut montrer aisément que cette constante est unique ("moyenne de f"), et réciproquement, on peut montrer que dans $K(f)$ existe ~~au plus~~ une constante, il est possible de décider qu'il en existe qu'une (à ce propos, il est bon de savoir que les fonctions faiblement p.pér. à droite ou à gauche sont les mêmes). Il revient aussi au même de dire que ~~toute~~ $\mathcal{E}(G)$ admette une moyenne invariante. – Dans ce cas, on se ramène aisément au cas où G est à un nombre fini de générateurs (et à fortiori, au cas où il est libre en même temps!).

On aurait, si l'assertion était vraie, des conséquences fort agréables. Bien entendu, dans l'énoncé général des distributions, l'unicité du point fixe dans des ensembles convexes fermés, supposés faiblement compacts, le fermé convexe de la trajectoire d'un $x \in E$ sous G serait assuré, d'où notion de valeur moyenne d'un $x \in E$ faiblement presque périodique sous un groupe équicontinu de transformations linéaires. – L'espace $\mathcal{E}(G)$

réduit à un point, et là dedans comme une partie invariante (faiblement complète) d'un ensemble (ou "gamme") minimal X, G opérerait dans X comme groupe (d'homéomorphismes) relativement compact dans $C(X,X)$ pour la convergence simple (la limite simple de ces homéomorphismes est continue) mais, pour $f \in X$ arbitraire, et un voisinage V de f, il existerait un homéomorphisme de G qui transforme V en un ensemble rencontrant telle partie finie de X qu'on voudrait ! Ce qui montre, d'autre part, que $f \in X$ aurait une trajectoire sous G partout dense dans X.

— Traduisant ceci en termes explicites, on obtiendrait, pour une $f \in X$ donnée : pour tout $\varepsilon > 0$, $s_1 - s_n$, $x_1 - x_n$ éléments de G, il existe $t \in G$ tel que

$$|f(s_i t x_j) - f(x_j)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tous } i, j$$

d'où un filtre de valeurs de t (ou une suite si G est dénombrable) tel que

$$\lim_t f(s t x) = f(x) \quad \text{pour tous } s \in G, x \in G$$

ce qui met en évidence d'ailleurs que parmi les limites faibles de translatées à droite de la fonction f (par exemple même si on ne prend que des moyennes) se trouvent toutes ces constantes $f(x)$. — L'existence du filtre en t ci-dessus permet aussi de considérer un opérateur induit du groupe G (opérant par translations à droite) sur l'algèbre uniformément fermée invariante ~~[illegible]~~ à droite, respectivement l'invariante, engendrée par f.

pourrait munir d'une structure préhilbertienne canonique, $\langle f, g \rangle = M(f\bar{g})$, ce qui permettrait d'étudier parfaitement les développements en Fourier des fonctions p.p. : en cas — en d'autres termes, on peut plonger $E(G)$ dans l'espace L^2 construit sur le groupe compact attaché à G (cf. Eberlein, Almost Periodic Functions on Abelian Groups, dans les Transactions de 1950 ou un autre), — bien entendu, des fonctions $f \in E(G)$ non nulles pouvant pourtant être "négligeables", c'est à dire $M(f\bar{f})$ peut être nul.) — On aurait des théorèmes d'existence de mesures invariantes sur des espaces compacts, sous certains groupes de transformations. — On aurait aussi une généralité : tout groupe borné de transformations linéaires bornées d'un espace de Hilbert, est semblable à un groupe de transformations unitaires.

Peut-être avez vous des idées sur ce sujet, soit positives, auquel cas vous pourriez peut-être tester à ~~[illegible]~~ en [illegible] un travail sur le sujet, soit négatives, ce qui m'étonnerait pourtant. Car on arriverait à des résultats d'ailleurs fortement ~~[illegible]~~ pathologiques. Ainsi, considérant dans $E(G)$ une partie [illegible] fermée compacte minimale [illegible].

De toutes façons, il y a lieu de considérer les groupes (ou semi-groupes, mais pour ceux-ci, on sait qu'il conviennent) tels que sur $\mathcal{E}(G)$ existe une moyenne invariante (qui alors est forcément unique etc etc). On peut aussi introduire une topologie sur G, et se borner aux fonctions faiblement presque-périodiques continues, etc. ou [illegible] aux [illegible]. On montre aisément qu'un quotient d'un groupe "sympathique" par un sous-groupe invariant, un sous-groupe d'un groupe sympathique discret, une réunion filtrante de sous-groupes sympathiques, un produit topologique de groupes sympathiques, est sympathique; d'ailleurs ces énoncés valent aussi bien pour les semi-groupes. Malheureusement, ces remarques ne semblent pas d'un grand secours pour le problème si tout groupe est "sympathique".

Il n'est peut-être pas superflu de signaler que les fonctions continues nulles à l'infini sur G, et les fonctions continues de type positif sur G, sont faiblement presque périodiques, comme on vérifie aussitôt. Un critère général de faible presque-périodicité de la fonction continue uniforme sur G est le suivant: on ne peut avoir $\lim_i \lim_j f(x_i y_j) \neq \lim_j \lim_i f(x_i y_j)$ lorsque ces deux membres existent, pour deux suites (x_n) et (y_n)

extraite de G. Cl. permet de construire un grand nombre de fonctions plt. p.p.

Je m'excuse pour la longueur de la lettre, mais peut-être vaut-il mieux en mettre trop que pas assez, si cela peut vous éviter des difficultés déjà résolues, au cas où vous regarderiez de plus près le problème.

Dans l'espoir que vous aurez l'esprit libre à faire avancer la question, je vous prie de recevoir l'expression de tout mon respect

A. Grothendieck

P.S. Si vous avez des tirages à part de votre article sur les moyennes invariantes, je vous serais très reconnaissant de m'en envoyer un. Ci-joint mes deux premières notes aux C.R. - je n'ai pas encore eu de tirage à part de la dernière.