Volker DIEKERT

La Theorie combinatoire de l'icosaèdre

Rapport pour un DES d'université de l'année 1977/78

Soutenance: 30 June 1978, Mention “bien”

Added in July 2021: Short CV of Volker Diekert

1978 Diploma in Mathematics (University Hamburg), Advisor: Helmut Brückner

1983 Dr. rer. nat. (University Regensburg), Advisor: Jürgen Neukirch
Title of the doctoral thesis:
Über die absolute Galoisgruppe zwei-adischer Zahlkörper

1989 Dr. rer. nat. habil. (Technical University Munich), Advisor: Wilfried Brauer
Title of the Habilitation:
Combinatorics on Traces with Applications to Petri Nets and Replacement Systems

1991 — present

Full Professor for Mathematics and Theoretical Computer Science (University Stuttgart)

Diekert

Soutenu

le 30. 6. 1978 14 Uhr

La Théorie combinatoire de l'icosaèdre

I.1 Déf Soient S un ensemble fini,
A une partie de $\mathcal{P}_2(S)$, mais A différent de $\mathcal{P}_2(S)$,
F une partie de $\mathcal{P}_3(S)$
satisfaisant les conditions suivantes :

I $\forall s \in S \quad \text{card}\{s' \in S \mid \{s,s'\} \in A\} = 5$

II $\forall a \in A \quad \text{card}\{f \in F \mid a \subset f\} = 2$

III soient $f \in F$, $s, s' \in f \Rightarrow \{s,s'\} \in A$

IV soient $s, s' \in S \Rightarrow \exists$ une suite $s_0 = s, s_1, \dots, s_n = s'$ dans S tq $\{s_i, s_{i-1}\} \in A \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Les relations d'incidence R, R', R'' soient définies par les relations d'inclusion.

On appelle $\Pi = (S, A, F, R, R', R'')$ un icosaèdre.

I.2 Prop

L'icosaèdre est un polyèdre combinatoire, connexe. [*]

Dém
1.) $\forall a \in A$ est $\text{card}\{s \in S \mid (s,a) \in R'\} = 2$ car $A \subset \mathcal{P}_2(S)$
2.) $\forall a \in A$ est $\text{card}\{f \in F \mid (a,f) \in R''\} = 2$ à cause de II
3.) $\forall (s,f) \in R$ est $\text{card}\{a \in A \mid (s,a) \in R' \text{ et } (a,f) \in R''\} = 2$ à cause de III
4.) Soit $f \in F$ alors $(S(f), A(f), R'(f))$ est un triangle donc un polygone combinatoire
5.) Soit $s \in S$ alors $(A(s), F(s), R''(s))$ à la structure d'un pentagone.

[*] Référence : Certificat de stage de Bernard Roger

I.3 <u>Théorème</u>

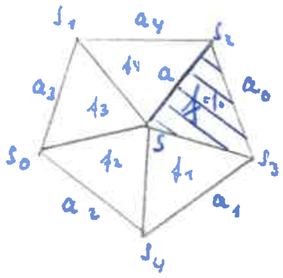
L'icosaèdre est un polyèdre combinatoire, régulier et tous les icosaèdres sont isomorphes.

<u>Dém</u>

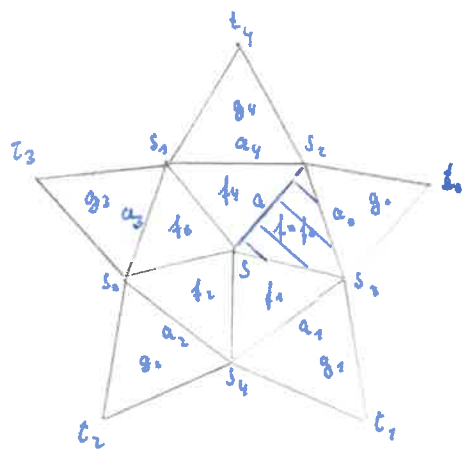
Soient Π, Π' deux icosaèdres, $r = (s,a,f) \in \mathrm{Rep}\,\Pi$, $r' = (s',a',f') \in \mathrm{Rep}(\Pi')$.
On va démontrer qu'il y a un unique isomorphisme g de polyèdres combinatoires de Π sur Π', tq $g(r) = r'$.
Ce qui montre que tous les icosaèdres sont isomorphes et pour $\Pi = \Pi'$ ça montre que Π est un polyèdre régulier. (i.e. le groupe $G = \mathrm{Aut}(\Pi)$ des automorphismes de Π opère transitivement sur $E = \mathrm{Rep}(\Pi)$.)

Le repère $r = (s,a,f)$ détermine un pentagone P_s autour du sommet s :

P_s



Pour chaque arête a_i, il y a une deuxième face g_i qui est incidente à a_i. Soit t_i le troisième sommet de g_i qui n'est pas incident à a_i

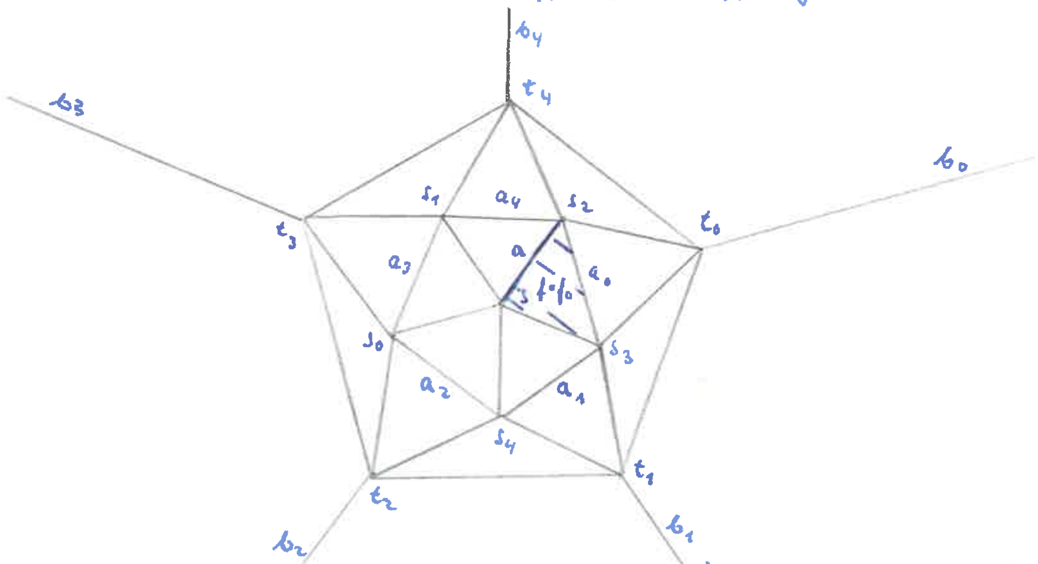


On trouve que $s_i \neq t_j$ $\forall\, (i,j)$,
car soit $s_i = t_j$ pour un (i,j) nescessairement $i = j$,
de plus on trouve que $s_i = t_i$ $\forall\, i \in \{1, \dots, 5\}$, mais dans ce cas là il y a $A \cdot P_2(S)$, ce qu'on a exclu.

Comme il y a une structure pentagonale autour de chaque sommet s_i, l'ensemble $\{t_j, t_{j-1}\}$ forme une arête $\forall\, j \in \{0, \dots, 4\}$ de même l'ensemble $\{t_0, t_4\}$ forme une arête.

Pour chaque t_i il y a encore une seule cinquième arête b_i qui est incidente à t_i. Donc tous les t_i sont differents l'un de l'autre et toutes les arêtes b_i sont incidentes au même sommet $\{\infty\}$.

À cause de la propriété de la connexité, les seuls sommets sont : $\{s, s_0, \dots, s_4, t_0, \dots, t_4, \infty\}$



Alors l'unique isomorphisme $g \in \mathrm{Isom}(\Pi, \Pi')$ qui transforme un repère $r \in \mathrm{Rep}(\Pi)$ en $r' \in \mathrm{Rep}(\Pi')$ est l'isomorphisme qui est defini par :

$$g : \begin{array}{ccc} \Pi & \xrightarrow{\sim} & \Pi' \\ s & \longmapsto & s' \\ s_i & \longmapsto & s_i' \\ t_i & \longmapsto & t_i' \\ \infty & \longmapsto & \infty' \end{array}$$

I.4. Proposition

Soit $\Pi = (S, A, F, R, R', R'')$ un icosaèdre alors

i.) $\operatorname{card} S = 12$

ii) $\operatorname{card} A = 30$

iii) $\operatorname{card} F = 20$

iv) $\operatorname{card} \operatorname{Rep}(\Pi) = \operatorname{card} \operatorname{Aut}(\Pi) = 120$

Dém

i.) trivial

ii) $\operatorname{card}(A(s)) = 5$ et $\operatorname{card} S(a) = 2$

iii) $\operatorname{card} F(a) = 2$ et $\operatorname{card} A(f) = 3$

iv) Π est regulier $\Rightarrow \operatorname{card} \operatorname{Rep}(\Pi) = \operatorname{card} \operatorname{Aut}(\Pi)$

Grace à la bijection canonique

$$\{(s, s', s'') \in S \times S \times S \mid \{s, s', s''\} \in F\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Rep} \Pi$$
$$(s, s, s'') \longmapsto (s, \{s, s'\}, \{s, s', s''\})$$

$\operatorname{card} \operatorname{Rep}(\Pi)$ est égal à 6 fois $\operatorname{card} F$

$\Rightarrow \operatorname{card} \operatorname{Rep}(\Pi) = 6 \cdot 20 = 120$

II Distance combinatoire

Soit $\Pi = (S, A, F, R, R', R'')$ un polyèdre combinatoire connexe.
On a les applications

$$\varphi : A \hookrightarrow \mathcal{P}_2(S)$$
$$\psi : A \hookrightarrow \mathcal{P}_2(F)$$

qui sont injectives.

On identifiera selon le cas A et $\varphi(A)$ ou A et $\psi(A)$

II.1. Déf :
On appelle l'application

$$d_S : S \times S \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(s,t) \longmapsto \min \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ suite } s = s_0, \dots, s_n = t \text{ dans } S \text{ tq } \{s_i, s_{i-1}\} \in A \text{ pour } 1 \leq i \leq n \}$$

la distance combinatoire sur S.

Dualement :
On appelle l'application

$$d_F : F \times F \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$(f,g) \longmapsto \min \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ suite } f = f_0, \dots, f_n = g \text{ dans } F \text{ tq } \{f_i, f_{i-1}\} \in A \text{ pour } 1 \leq i \leq n \}$$

la distance combinatoire sur F.

II.2. Prop
Les applications d_S et d_F définissent des métriques sur S et sur F.

Dém : i) $d_S(s,t) = 0 \iff s = t \quad \forall (s,t) \in S \times S$

ii) $d_S(s,t) = d(t,s)$

iii) $d_S(s,u) \leq d(s,t) + d(t,u) \quad \forall (s,t,u) \in S \times S \times S$

De même pour l'application d_F.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $s \in S$ (resp $f \in F$) on définit <u>les cercles de niveau</u> :

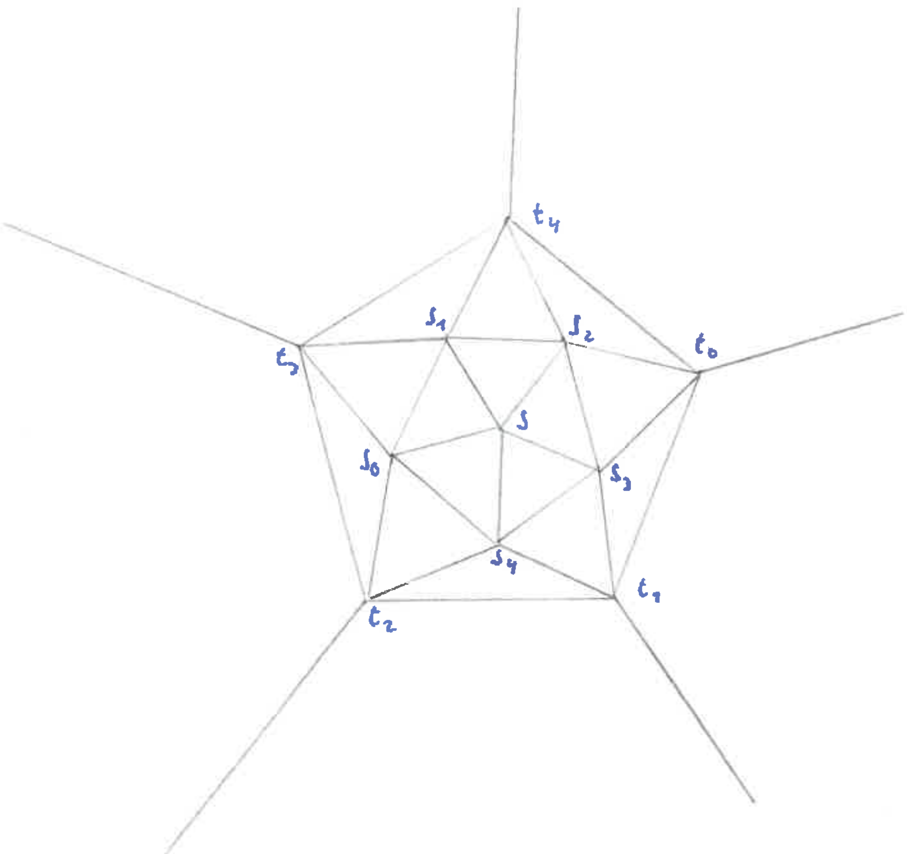
$$C_i(s) := \{ t \in S \mid d(s,t) = i \}$$
$$C_i(f) := \{ g \in F \mid d(f,g) = i \}$$

Dans le cas où Π est un icosaèdre on trouve, pour tout $s \in S$, les quatre cercles de niveau : $C_0(s), \ldots, C_3(s)$, qui ont les cardinaux suivants :

<u>Tableau I</u> :

$$\operatorname{card} C_0(s) = 1$$
$$\operatorname{card} C_1(s) = 5$$
$$\operatorname{card} C_2(s) = 5$$
$$\operatorname{card} C_3(s) = 1 .$$

Pour voir ceci on regarde l'icosaèdre Π dans la perspective par un sommet :



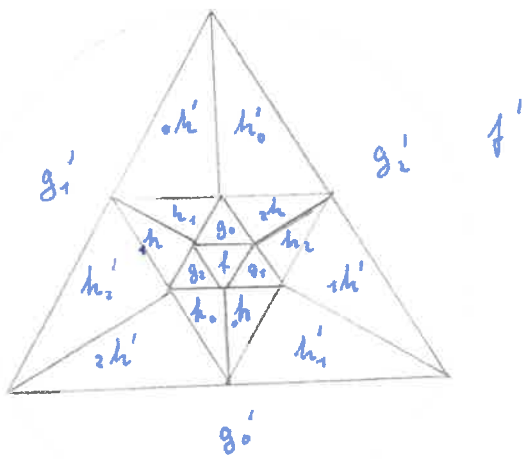
$$C_0(s) = \{s\}$$
$$C_1(s) = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$
$$C_2(s) = \{t_0, t_1, t_2, t_3, t_4\}$$
$$C_3(s) = \{\infty\}$$

Pour tout $f \in F$ on trouve les six cercles de niveau $C_0(f), \dots, C_5(f)$, qui ont les cardinaux suivants:

<u>Tableau II</u> :

$$\begin{aligned} \operatorname{card} C_0(f) &= 1 \\ \operatorname{card} C_1(f) &= 3 \\ \operatorname{card} C_2(f) &= 6 \\ \operatorname{card} C_3(f) &= 6 \\ \operatorname{card} C_4(f) &= 3 \\ \operatorname{card} C_5(f) &= 1 \end{aligned}$$

Pour voir ceci on regarde l'icosaèdre Π dans la perspective par une face:



$$\begin{aligned} C_0(f) &= \{f\} \\ C_1(f) &= \{g_0, g_1, g_2\} \\ C_2(f) &= \{{}_0h, h_0, {}_1h, h_1, {}_2h, h_2\} \\ C_3(f) &= \{{}_0h', h_0', {}_1h', h_1', {}_2h', h_2'\} \\ C_4(f) &= \{g_0', g_1', g_2'\} \\ C_5(f) &= \{f'\} \end{aligned}$$

On remarque que dans le cas d'un icosaèdre, il y a pour tout $s \in S$ (resp $f \in F$) exactement un point $s' \in S$ (resp $f' \in F$) tel que la distance $d(s,s')$ (resp $d(f,f')$) soit maximale. De plus, soit $d_S(s,s') = 3$ et $d_F(f,f') = 5$ alors $(s,f) \in R \Leftrightarrow (s',f') \in R$.

III l'antipodisme d'un polyèdre combinatoire

III.1. Déf : Soit $\Pi = (S, A, F, R, R', R'')$ un polyèdre combinatoire
$\Phi := S \sqcup A \sqcup F$, on définit pour $x, y \in \Phi$
$x < y \;:\Leftrightarrow\; x R' y$ ou $x R'' y$ ou $x R y$.

On dit que Π satisfait la <u>condition de sup</u>
$:\Leftrightarrow\; \forall A \subset \Phi$, $A \neq \emptyset$ A est majoré $\Rightarrow$ il existe un bon supérieur .

Soient $\Pi = (S, A, F, R, R', R'')$ un polyèdre connexe satisfaisant la condition de sup , $n, m \in \mathbb{N}$.

Supposons :

i.) $\forall s \in S \;\; \exists! \, s' \in S$ tq $d(s,s')$ est maximale et $d(s,s') = m$

ii) $\forall f \in F \;\; \exists! \, f' \in F$ tq $d(f,f')$ est maximale et $d(f,f') = n$

iii) Soient $d(s,s') = m$ et $d(f,f') = n$ alors $(s,f) \in R \Rightarrow (s', f') \in R$

On définit deux bijections

$\underline{a}_S : S \xrightarrow{\sim} S$, $s \mapsto s'$ tq $d(s,s') = m$

$\underline{a}_F : F \xrightarrow{\sim} F$, $f \mapsto f'$ tq $d(f,f') = n$.

Les applications sont donc <u>involutives</u> , i.e. $\underline{a}_S^2 = id_S$ et $\underline{a}_F^2 = id_F$.

III.2. <u>Proposition</u>

Il existe un automorphisme $\underline{a}$ de Π (necessairement unique) tq ses restrictions à S et à F soient $\underline{a}_S$ et $\underline{a}_F$.

Déf On appelle $\underline{a} : \Pi \to \Pi$ <u>l'antipodisme de Π</u> .

Dém :

Soit $A \subset \mathcal{P}_2(S)$. On définit

$$\underline{a}_A : A \longrightarrow A \ , \ \{s,t\} \longmapsto \{\underline{a}_S(s), \underline{a}_S(t)\}$$

$\{\underline{a}_S(s), \underline{a}_S(t)\}$ est une arête , car soient f et g les deux faces incidentes à $a = \{s,t\}$

$\Rightarrow$ l'ensemble $\{\underline{a}_S(s), \underline{a}_S(t)\}$ est majoré par $\underline{a}_F(f)$ et par $\underline{a}_F(g)$ $\underline{a}(f) \neq \underline{a}(g)$
le bon supérieur de $\{\underline{a}_S(s), \underline{a}_S(t)\}$ existe donc $\{\underline{a}_S(s), \underline{a}_S(t)\}$ est une arête .

Soit $A \subset \mathcal{P}_2(F)$. On définit

$$\underline{a}'_A : A \longrightarrow A \ , \{f,g\} \longmapsto \{ a_F(f), a_F(t)\}$$

évidemment les applications $\underline{a}_A$ et $\underline{a}'_A$ sont égales .

L'application $\underline{a} : \Pi \to \Pi$ est donc définie par $\underline{a}_S, \underline{a}_A, a_F$ et $\underline{a}$ est un automorphisme de Π . Ses restrictions à S et à F sont $\underline{a}_S$ et $\underline{a}_F$.

III.2.1. Corollaire

Soit $\underline{a}$ l'antipodisme de Π alors

i.) $\underline{a} \in Z(G) = \{ g \in Aut(\Pi) = G / \ h \circ g = g \circ h \quad \forall h \in G\}$ = centre du groupe G.
ii) $\underline{a}^2 = id$
iii) $\underline{a}$ opère sans points fixes sur S, A, F.

Dém :

i.) $\underline{a} \in Z(G)$ car un automorphisme conserve la distance combinatoire.
ii) trivial
iii) L'application $\underline{a}$ opère sans points fixes sur S et sur F.
Sur A : Soit $\exists$ $a \in A$ tq $\underline{a}_A(a) = a$, $a = \{s,t\}$, $s,t \in S$
$\Rightarrow$ $\{s,t\} = \{\underline{a}_S(s), a_S(t)\}$ $\Rightarrow$ $t = \underline{a}_S(s)$ et $d(s, \underline{a}_S(s)) = 1$
$\Rightarrow$ card $S = 2$, une contradiction car un polyèdre avec deux sommets n'existe pas.

III.3. Théorème

Soit $\Pi = (S, A, F, R, R', R'')$ un polyèdre combinatoire satisfant la condition de sup.
Soit $g \in G = \mathrm{Aut}(\Pi)$ un involution, i.e. $g^2 = id$, qui opère sans points fixes sur l'ensemble $S \sqcup A \sqcup F$.
Soit $\bar{\Pi} = (\bar{S}, \bar{A}, \bar{F}, \bar{R}, \bar{R}', \bar{R}'')$ avec :
$\bar{S} := S/g$, $\bar{A} := A/g$, $\bar{F} := F/g$, $\bar{R} := R/g$, $\bar{R}' := R'/g$, $\overline{R''} := R''/g$.
Alors $\bar{\Pi}$ est un polyèdre combinatoire.

Dém :

Lemme 1 : Soit $(s, f) \in R$ alors $(s, g(f)) \notin R$ et $(g(s), f) \notin R$.

Dém :

Soit $(g(s), f) \in R \Rightarrow (s, g(f)) = (gg(s), g(f)) \in R$
$\Rightarrow$ l'ensemble $\{s, g(s)\}$ est majoré par les faces f et $g(f)$.
le borne supérieur existe et $f \neq g(f) \Rightarrow \{s, g(s)\}$ est une arête.
l'automorphisme g invarie $\{s, g(s)\} \Rightarrow$ contradiction,
donc $(g(s), f) \notin R$
Dualement : $\{s, g(f)\} \notin R$.

Lemme 2 :

Soit $\bar{s} \in \bar{S} = S/g$ alors
$(A(\bar{s}), F(\bar{s}), R''(\bar{s}))$ forment un polygone combinatoire.
De même, soit $\bar{f} \in \bar{F} = F/g$ alors
$(S(\bar{f}), A(\bar{f}), R'(\bar{f}))$ forment un polygone combinatoire.

Dém

Soit $p : \Pi \to \bar{\Pi}$, la projection de $\Pi = (S, A, F, R, R', R'')$ sur $\bar{\Pi} = (\bar{S}, \bar{A}, \bar{F}, \bar{R}, \bar{R}', \bar{R}'')$
Soient $\bar{s} \in \bar{S}$, $s \in S$ et $p(s) = \bar{s}$.
Alors $p|_{(A(s), F(s), R''(s))} : (A(s), F(s), R''(s)) \xrightarrow{\sim} (A(\bar{s}), F(\bar{s}), R''(\bar{s}))$

est un isomorphisme de polygones combinatoires.
Donc $(A(\bar{s}), F(\bar{s}), R''(\bar{s}))$ a la même structure polygonale que $(A(s), F(s), R''(s))$.
De même pour $(S(\bar{f}), A(\bar{f}), R'(\bar{f}))$.

<u>Dém. de théorème</u>

1.) $\forall\, \bar a \in \bar A \quad \text{card}\{\bar s \in \bar S \mid \bar s \bar R' \bar a\} = 2$,
car soit $\bar a \in \bar A \Rightarrow \exists\, a \in A$ tq $p(a) = \bar a$.
Soit $a = \{s, s'\}$; $s, s' \in S$. On a $g(a) \neq a$ donc $s' \neq g(s)$ donc $\bar s' \neq \bar s$.

2.) Dualement : $\forall\, \bar a \in \bar A \quad \text{card}\{\bar f \in \bar F \mid \bar a \bar R'' \bar f\} = 2$

3.) $\forall\, (\bar s, \bar f) \in \bar R \quad \text{card}\{\bar a \in \bar A \mid \bar s \bar R' \bar a$ et $\bar a \bar R'' \bar f\} = 2$
Car soit $(s, f) \in R$ tq $p(s) = \bar s$ et $p(f) = \bar f$.
$\Rightarrow \exists\, a, a' \in A, a \neq a'$ tq $(s, a, f), (s, a', f) \in \text{Rep}(\Pi)$.
On a $g(a) \neq a'$ donc $\bar a \neq \bar a'$.
Grace à lemme 1 on a $\text{card}\{\bar a \in \bar A \mid \bar s \bar R' \bar a$ et $\bar a \bar R'' \bar f\} = \text{card}\{a, a'\} = 2$.

4.) Grace à lemme 2, les ensembles $(A(\bar s), F(\bar s), R''(\bar s))$ et $(S(\bar f), A(\bar f), R'(\bar f))$ forment des polygones combinatoires.

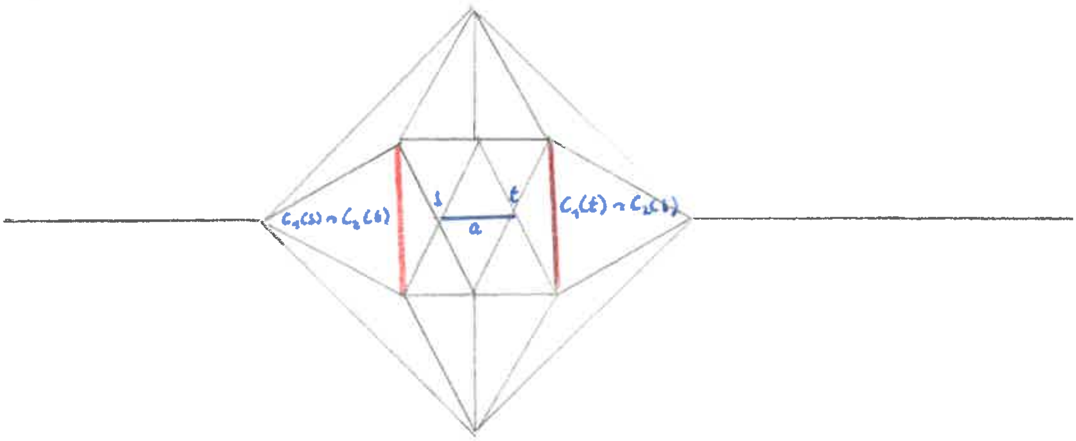
III.4. <u>Déf</u> : Soit $\Pi = (S, A, F, R, R', R'')$ un polyedre combinatoire satisfaisant les conditions de la proposition III.2.
Soit $\underline{a} : \Pi \Rightarrow \Pi$ l'antipodisme.
On appelle $\bar\Pi = (\bar S, \bar A, \bar F, \bar R, \bar R', \bar R'') = (S/\underline{a}, A/\underline{a}, F/\underline{a}, R/\underline{a}, R'/\underline{a}, R''/\underline{a})$
<u>le polyedre gauche</u>.

III.5. <u>Prop</u> : Soit $\Pi = (S, A, F, R, R', R'')$ un icosaèdre,
alors Π satisfait les conditions de la proposition III.2.
Donc on peut définir l'antipodisme d'icosaedre $\underline{a} : \Pi \Rightarrow \Pi$
et on peut définir l'icosaedre gauche $\bar\Pi = (\bar S, \bar A, \bar F, \bar R, \bar R', \bar R'')$.

<u>Dém.</u> On regarde les tableaux I et II du chapitre II.

IV Définition de l'application ρ pour l'icosaèdre

Soient $\Pi = (S, A, F, R, R', R'')$ un icosaèdre, $A \subset \mathcal{P}_2(S)$.
Soient $C_i(s)$ les cercles de niveau.
Soient $a \in A$, $a = \{s,t\}$, $s,t \in S$.
On trouve que $\operatorname{card}(C_1(s) \cap C_2(t)) = 2$ et
si on note $\{u,v\} = C_1(s) \cap C_2(t)$, on trouve que $d(u,v) = 1$
donc $b := C_1(s) \cap C_2(t) \in A$
et de plus $b = C_1(s) \cap C_2(t) = \underline{a}(C_1(t) \cap C_2(s))$



On peut donc définir une application :

$$\rho_A : A \to \bar{A}$$
$$\{s,t\} \mapsto C_1(s) \cap C_2(t) \pmod{\underline{a}}$$

IV.1. Prop L'application ρ_A se factorise en $\rho_{\bar{A}}$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\rho_A} & \bar{A} \\ \downarrow & /// & \nearrow \\ \bar{A} & \overset{\rho_{\bar{A}}}{\cdots\cdots} & \end{array}$$

Dém.

$$\rho(\underline{a}_A\{s,t\}) = \rho(\{\underline{a}_S(s), \underline{a}_S(t)\})$$
$$= C_1(\underline{a}(s)) \cap C_2(\underline{a}(t))$$
$$= C_2(s) \cap C_1(t)$$
$$= \rho(\{s,t\})$$

alors $\rho(a) = \rho(\underline{a}_A(a)) \quad \forall a \in A$.

IV.2. Proposition

Soient Π un icosaèdre, $\rho : \bar{A} \to \bar{A}$ l'application definie ci dessus alors les orbits de ρ dans $\bar{A}$ sont de cardinal 3.

Dém :

Soient $a = \{s,t\} \in A$, $s,t \in S$

$\{u,v\} := C_1(s) \cap C_2(t)$ evidemment $s,t \notin \{u,v\}$ et $s,t \notin \{\underline{a}(u), \underline{a}(v)\}$

$\{r,w\} := C_1(u) \cap C_2(v)$

On a $s \notin \{r,w\} = C_1(u) \cap C_2(v)$ car $v \in C_1(s)$,

$t \notin \{r,w\}$ car $u \in C_2(t)$

et $s \notin \{\underline{a}(r), \underline{a}(w)\} = C_2(u) \cap C_1(v)$ car $u \in C_1(s)$

$t \notin \{\underline{a}(r), \underline{a}(w)\}$ car $v \in C_2(t)$

Soit $a = \{s,t\} \in A$ On a

$$\rho(a) = \{u,v\} \pmod{\underline{a}}$$

$$\rho^2(a) = \{r,w\} \pmod{\underline{a}}$$

$\operatorname{card} \bar{S} = 6$ et $u,v,r,w \pmod{\underline{a}} \notin \rho^3(a)$

$\Rightarrow \quad \rho^3(a) = a \pmod{\underline{a}}$

IV.3. Déf

On appelle un élément de $\bar{A}$ une <u>direction d'arête</u>.
On appelle une orbite de ρ dans $\bar{A}$ <u>une couleur associée à l'icosaèdre</u>.
On note

$$T := \bar{A}/\rho$$

On dit que deux directions d'arêtes sont <u>orthogonales</u>, si elles sont différentes et si elles appartient à la même orbite.
On note

$$a \perp b :\Leftrightarrow \rho(a) = b \quad \text{ou} \quad a = \rho(b)$$

V Orientation d'un ensemble fini

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, T un ensemble fini de cardinal n.
$I_n = \{1, .., n\}$; $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de I_n
$\varepsilon : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le morphisme de signature.
$Alt_n = \ker \varepsilon$

On a la suite exacte

$$1 \to Alt_n \to \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_2 \to 1$$

On note

$$Rep(T) := Bij(I_n, T) \text{ l'ensemble des bijections de } I_n \text{ sur } T.$$

L'ensemble $Rep(T)$ est un torseur à droite sous $\mathfrak{S}_n$ grace de l'application

$$\begin{array}{ccc} Rep(T) \times \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & Rep(T) \\ (\varphi : I_n \to T, \sigma) & \longmapsto & \varphi \circ \sigma \end{array}$$

V.1. Déf On appelle

$$Or(T) := Rep(T) \wedge_{\mathfrak{S}_n} \mathfrak{S}_2 \quad (\text{produit contracté})$$

<u>l'ensemble des orientations de T.</u>

V.1.1. <u>Remarques</u>

i) l'application
$$\begin{array}{ccc} Rep(T) & \longrightarrow & Rep(T) \wedge_{\mathfrak{S}_n} \mathfrak{S}_2 \\ \varphi & \longmapsto & (\varphi \wedge 1) \end{array}$$

se factorise à une bijection $Rep(T)/Alt_n \xrightarrow{\sim} Or(T)$.

ii) $\operatorname{card} Or(T) = 2$

V.2. <u>Déf</u> On appelle un <u>ordre circulaire sur T</u> un élément u de $\mathfrak{S}_T$ tq T soit une orbite sous u.
On note
$\mathrm{Circ}(T)$ l'ensemble des ordres circulaires sur T.

V.2.1. <u>Remarques</u>:

i) On a une bijection
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Rep}\, T & \xrightarrow{\sim} & T \times \mathrm{Circ}\, T \\ f & \longmapsto & (f(1),\ f \circ a_n \circ f^{-1}) \end{array}$$

où a_n est la permutation circulaire type :
$$\begin{array}{rcll} a_n : I_n & \xrightarrow{\sim} & I_n & \\ i & \longmapsto & i+1 & \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ n & \longmapsto & 1 & \end{array}$$

ii) $\mathrm{card}\ \mathrm{Circ}(T) = \dfrac{n!}{n} = (n-1)!$

iii) Soit C_n le sousgroupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par a_n.
L'application
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Rep}(T) & \longrightarrow & \mathrm{Circ}(T) \\ f & \longmapsto & f \circ a_n \circ f^{-1} \end{array}$$

se factorise à une bijection canonique :
$$\mathrm{Rep}(T)/C_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Circ}(T)$$

iv) Si $C_n \subset \mathrm{Alt}_n$ on a les applications canoniques :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rep}(T)/C_n \arrow[r, two heads] \arrow[d, phantom, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "///"] & \mathrm{Rep}(T)/\mathrm{Alt}_n \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ \mathrm{Circ}(T) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Or}(T) \end{tikzcd}$$

V.3. Proposition

$$C_n \subset \mathcal{A}lt_n \iff n \text{ est impair}$$

Dém : $C_n \subset \mathcal{A}lt_n \iff a_n$ est une permutation paire

or $a_n = \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, n-1, n \\ 2, 3, \ldots, n, 1 \end{pmatrix}$ est le produit de $n-1$ transpositions.

V.4. Proposition

On suppose T de cardinal n impair.

Soit $\{u, \bar{u}^1\}$ une structure polygonale de T, i.e. un pair de deux ordres circulaires l'inverse l'un de l'autre.

Donc u, $\bar{u}^1$ définissent une orientation de T, $\omega(u)$ et $\omega(\bar{u}^1)$.

Pour qu'il soit $\omega(u) = \omega(\bar{u}^1)$ il faut et il suffit que

$$n \equiv 1 \pmod 4).$$

Dém : Soit $n = 2m+1, m \in \mathbb{N}$. On considère

$Circ(T) = Rep(T)/C_n$ et $Or(T) = Rep(T)/\mathcal{A}lt_n$

Soient $u = (a_1, \ldots, a_{2m+1})$ et $\bar{u}^1 = (a_{2m+1}, \ldots, a_1)$

$\exists\, \sigma \in \mathfrak{S}_n$ tq $\bar{u}^1 = u \circ \sigma$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & m, & m+1, & m+2, & \ldots, & 2m+1 \\ 2m+1, & 2m, & \ldots, & m+2, & m+1, & m, & \ldots, & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \sigma$ est le produit de m transpositions.

alors $\omega(u) = \omega(\bar{u}^1) \iff m$ est un nombre impair.

V.5. Déf   Soit card $T \equiv 1 \mod 4$
on dit qu'une structure polygonale $\{u, u^{-1}\}$ de T
est compatible avec une orientation ω de T
si $\omega = \omega(u) = \omega(u^{-1})$

V.5.1. Notation

Soit T un ensemble fini, card $T \equiv 1 \pmod 4$, on suppose que T est muni d'une orientation ω.
On note

$$\mathrm{Pol}(T,\omega) := \text{l'ensemble des structures polygonales compatibles avec l'orientation } \omega .$$

V.5.2. Remarques

i) $\operatorname{card} \mathrm{Pol}(T,\omega) = \frac{(n-1)!}{4}$

ii) $\mathrm{Pol}(T,\omega)$ est un espace homogène sous Alt_T

Dém. i) $\operatorname{card} \mathrm{Pol}(T,\omega) = \frac{\operatorname{card} \mathrm{Pol}(T)}{2}$

et $\operatorname{card} \mathrm{Pol}(T) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{card} \mathrm{Circ}(T) = \frac{1}{2} \cdot (n-1)!$

ii) $\mathfrak{S}_T$ opère sur $\mathrm{Pol}(T)$ par conjugation
et $\mathrm{Pol}(T)$ est un espace homogène sous $\mathfrak{S}_T$.
L'orientation $\omega(u) = \omega(u^{-1})$ d'une structure polygonale $\{u, u^{-1}\}$
se conserve après l'action d'un élément σ de $\mathfrak{S}_T$, si
et seulement si $\sigma \in \mathrm{Alt}_T$.

VI Construction d'un icosaèdre en termes d'un ensemble à 5 éléments.

Soit $\Pi = (S, A, F, R, R', R'')$ un icosaèdre

On rapelle qu'on note par

$\bar{\Pi} = (\bar{S}, \bar{A}, \bar{F}, \bar{R}, \bar{R}', \bar{R}'')$ l'icosaèdre gauche,

$\rho : \bar{A} \to \bar{A}$, $T = \bar{A}/\rho$, card $T = 5$

une couleur associée à l'icosaèdre est par définition un élément de T.

VI.1. Prop. i.) le groupe $G = \mathrm{Aut}(\Pi)$ opère de la façon naturelle sur T. (transport de structures)

$$G \to \mathfrak{S}_T$$

ii) l'application se factorise

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "///"] & \mathfrak{S}_T \\ G/\underline{a} \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

Dém :

i.) trivial

ii) puisque $\underline{a}$ opère trivialement sur T.

VI.2. Proposition :

$$G/\underline{a} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\bar{\Pi})$$

Dém : Soit $p : \Pi \to \bar{\Pi}$ la projection de l'icosaèdre sur l'icosaèdre gauche

On a une application canonique :

$$G \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(\bar{\Pi})$$

$$g \mapsto \bar{g}$$ tq $\bar{g}$ rends le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Pi \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & \Pi \arrow[d, "p"] \\ \bar{\Pi} \arrow[r, "\bar{g}"'] & \bar{\Pi} \end{tikzcd}$$

Cet homomorphisme est surjectif et son noyau est $\{1, \underline{a}\}$

$$\Rightarrow \quad G/\underline{a} \simeq \mathrm{Aut}(\bar{\Pi})$$

VI. 3. Théorème

$$G/_{\mathfrak{a}} \simeq \mathrm{Aut}(\bar{\Pi}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}_T$$

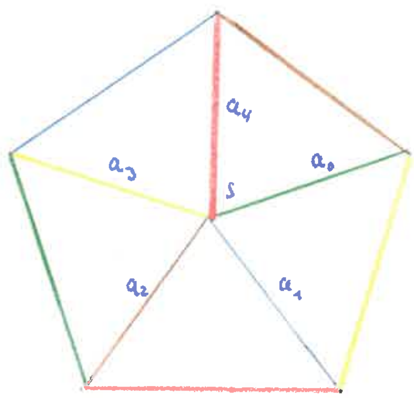
Dém.

l'ordre de G est égal à 120,
donc l'ordre de $G/_{\mathfrak{a}}$ est égal à 60.
On note par $\mathrm{Im}(G)$ l'image de G dans $\mathfrak{S}_T$.
Soit N l'ordre de $\mathrm{Im}(G)$.
Dans la suite on va demontrer que N est égal à 60.
Donc $\mathrm{Im}(G)$ est un sousgroupe d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_T$
donc $\mathrm{Im}(G)$ est égal à Alt_T. (le groupe Alt_T est simple)

VI. 4. Prop.

Deux arêtes orthogonales n'ont pas de sommets commun.

Dém: trivial à cause de la définition de l'application ρ.



VI 4.1. Cor1: Soient $s \in \mathcal{S}$, $A(s)$ l'ensemble des arêtes incidentes.
Alors
$$A(s) \xrightarrow{\sim} T$$
$$a \longmapsto t_s(a) := a \,(\mathrm{mod}\, \rho)$$
est une bijection.

Dém:

inj: à cause de la proposition précedente.
surj: car $\mathrm{card}(A(s)) = \mathrm{card}(T) = 5$

VI.4.2. Cor 2

soit $G_s \subset G$ le stabilisateur du sommet s

i) G_s opère fidèlement sur T par permutations paires : $G_s \hookrightarrow Alt_T$

ii) 10 est un diviseur de $N = \mathrm{card}\,(\mathrm{Im}\,(G \to \mathfrak{S}_T))$

Dém : i) $\mathrm{card}\ A(s) = 5 \Rightarrow$ on peut associer une orientation de $A(s)$, donc de $T \rightleftarrows A(s)$, à la structure polygonale de $A(s)$. Le groupe G_s n'invarie pas la structure polygonale de $A(s)$, donc G_s opère par permutations paires sur T

ii) $\mathrm{card}\ G_s = 10$

Notation : Soit $a \in A$, on note par $t(a) = a \,(\mathrm{mod}\ \underline{a})$ la couleur de a.

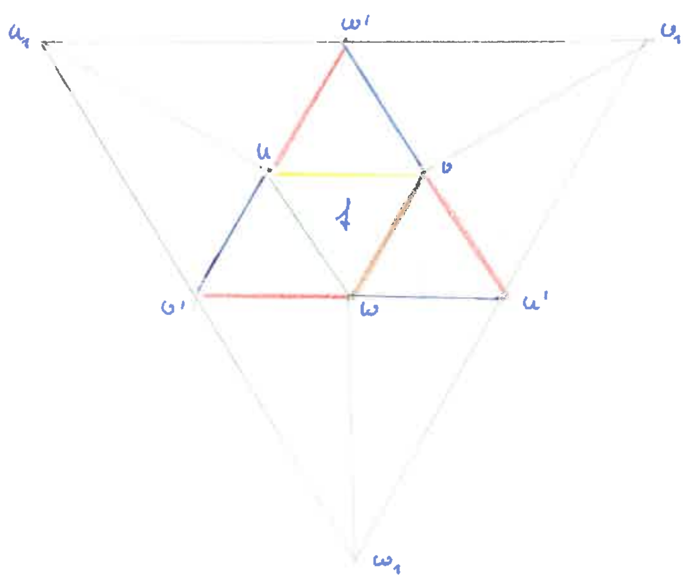
VI.5. Prop

soit $f \in F$ on a

$$T = \{ t\{u,v\}, t\{v,w\}, t\{w,u\}, t\{u,v'\}, t\{u,w'\} \}$$

et

$$t\{u,v'\} = t\{v,w'\} = t\{w,u'\}$$
$$t\{u,w'\} = t\{v,u'\} = t\{w,v'\}$$



Dém : évident grace à Prop. VI.4.

On a l'application canonique de la face f dans T :

$$f = \{u, v, w\} \hookrightarrow T$$
$$x \mapsto t_r(f \setminus \{x\}) \; .$$

Une orientation o de la face f est un ordre circulaire sur $S(f) = \{u, v, w\}$
Soit $o = (u, v, w)$, à l'orientation o on associe la couleur $t_r\{u, v\}$

VI.5.1. Cor :

Les applications précédentes $f \hookrightarrow T$ et $O_r(f) \hookrightarrow T$ définissent une bijection canonique

$$f \sqcup O_r(f) \xrightarrow{\sim} T \; .$$

VI.5.2. Cor : Soit G_f le stabilisateur de la face f, alors

i) G_f opère fidèlement par permutations paires sur T, $G_f \hookrightarrow Alt_T$
ii) 6 est un diviseur de N.

Dém : On a un isomorphisme canonique

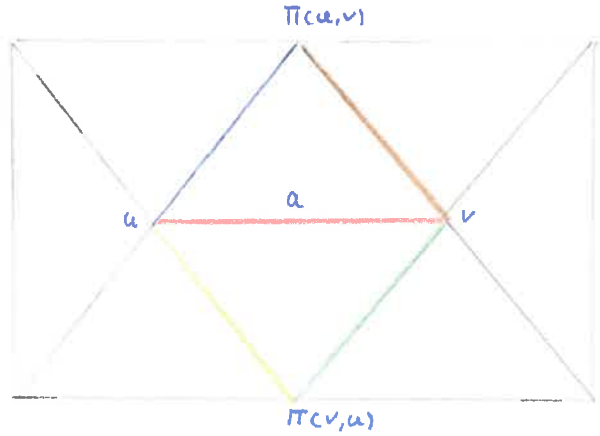
$$G_f \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_{f = \{u, v, w\}} \simeq \mathfrak{S}_3$$

$\mathfrak{S}_{\{u,v,w\}}$ opère fidèlement par permutations paires sur $f \sqcup O_r(f)$.
Car si $\varphi \in \mathfrak{S}_{\{u,v,w\}}$ opère pair sur f, φ opère trivialement sur $O_r(f)$
et si $\varphi \in \mathfrak{S}_{\{u,v,w\}}$ opère impair sur f, φ opère aussi impair sur $O_r(f)$.
Par conséquence $\mathfrak{S}_{\{u,v,w\}}$ opère pair sur $f \sqcup O_r(f)$, donc sur T.

VI. 6. Prop

Soit $a \in A$

On a $T = \{ t_y\{u,v\}, t_y\{u, \pi(u,v)\}, t_y\{u, \pi(v,u)\}, t_y\{v, \pi(u,v)\}\ t_y\{v, \pi(v,u)\} \}$



Dém évident grace à la proposition VI. 4.

VI. 6. 1. Cor Soit G_a le stabilisateur de l'arête a

alors i) G_a opère fidelement par permutations paires sur T, $G_a \hookrightarrow Alt_T$

ii) 4 est un diviseur de N

Dém :

On a une application canonique

$$S(a) \times F(a) \longrightarrow T$$
$$(s, f) \longmapsto t_y\{f \setminus \{s\}\}$$

donc une bijection $S(a) \times F(a) \amalg \{a\} \xrightarrow{\sim} T$

On a une isomorphisme canonique $G_a \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$

le groupe $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$ opère fidelement par permutations paires sur $S(a) \times F(a) \amalg \{a\}$

donc G_a opère fidelement par permutations paires sur T.

Donc 10, 6, 4 sont des diviseurs de N et $N / 60 \Rightarrow 60$

Chaque sousgroupe d'indice 2 du groupe $\mathfrak{S}_5$ est égal au groupe Alt_5.

alors $G/\underline{a} \simeq Alt_5$

Ce qui montre le théorème.

VI.7. Corollar

On considère la categorie des icosaedres gauches avec les isomorphismes comme morphismes et la categorie des ensembles à 5 lettres muni d'une orientation et avec les bijections qui respectent l'orientation comme morphismes. Le foncteur qui associe à un icosaedre gauche l'ensemble de ses 5 couleurs est un equivalence de categories.

Dém:
evident, comme dans ces categories tous les objets sont isomorphes et grace à théorème VI.3..

VI.8. Construction du foncteur quasi-inverse

Soit (T, ω) un ensemble de cardinal 5 muni d'une orientation ω.

On définit : $S := \mathrm{Pol}(T, \omega)$ l'ensemble de structures polygonales

$$A := \mathcal{P}_2(S)$$
$$F := \mathcal{P}_3(T)$$

Les ensembles S, A, F sont des espaces homogenes sous $\mathfrak{A}_T$ et ils ont les cardinaux suivants:

$$\mathrm{card}\, S = \mathrm{card}\, \mathrm{Pol}(T, \omega) = \frac{(\mathrm{card}(T) - 1)!}{4} = 6$$
$$\mathrm{card}\, A = \mathrm{card}\, \mathcal{P}_2(S) = \binom{6}{2} = 15$$
$$\mathrm{card}\, F = \mathrm{card}\, \mathcal{P}_3(T) = \binom{5}{3} = 10$$

On définit les rélations d'incidence :

1.) $R' \subset S \times A$ par l'inclusion , i.e. $s R' a :\Leftrightarrow s \in a$

2.) Soit $s = \{u, u^{-1}\}$ un pair de deux ordres circulaires l'inverse l'un de l'autre, t.q. $\{u, u^{-1}\} \in Pol(T, \omega)$

On a l'injection :

$$r : S \times T \hookrightarrow S \times \mathcal{P}_3(T) = S \times F$$
$$(\{u, u^{-1}\}, t) \longmapsto (\{u, u^{-1}\}, \{t, u^2(t), u^{-2}(t)\})$$

$R \subset S \times F$, $R := r(S \times T)$

3.) $R'' \subset A \times F$ $\quad a R'' f :\Leftrightarrow$ si $a = \{s, s'\} \Rightarrow s R f$ et $s' R f$

<u>VI</u>.8.1. <u>Prop</u> :

$\Pi = (S, A, F, R, R', R'')$ est un icosaedre gauche.

<u>VI</u> 8.2. <u>Déf</u> :

Soit $\Pi = (S, A, F, R, R', R'')$ l'icosaedre gauche défini ci-dessus. Soit $m \in T$.

On dit que l'arète "a" a la couleur "m"

$:\Leftrightarrow$ si $a = \{s, s'\}$ et $s = \{u, u^{-1}\}$, $s' = \{u', u'^{-1}\}$, $s, s' \in Pol(T, \omega)$

alors $T = \{ m, u(m), u^{-1}(m), u'(m), u'^{-1}(m) \}$