INSTITUT
DES HAUTES ETUDES SCIENTIFIQUES
91 - BURES-SUR-YVETTE
928 48-53 - 928 59-77

Bures, le 29 Avril 1969

Notice sur les travaux de Deligne (suite).

par A. Grothendieck (Avril 1969).

8) Catégories triangulées ℓ-adiques (thèse de J.P. Jouanolou). En plus de la définition des faisceaux ℓ-adiques, il est nécessaire, pour avoir un formalisme maniable en cohomologie étale des schémas, de définir en termes de "pro-objets" convenables une catégorie triangulée au sens de Verdier, jouant le rôle d'une "catégorie dérivée" pour les faisceaux ℓ-adiques, et de définir dans ces catégories les opérations habituelles de l'algèbre homologique. J'avais proposé cette question comme travail de thèse à Mr. Jouanolou, qui a piétiné sur place pendant un an ou deux, jusqu'à ce que Deligne lui fournisse le maître d'oeuvre d'une théorie satisfaite, que Mr. Jouanolou est en train de développer de façon détaillée.

9) Théorie globale du complexe cotangent relatif de André-Quillen (thèse de L. Illusie). André et Quillen avaient développé, pour une algèbre commutative B sur un anneau A, une variante cohomologique du module des différentielles relatives, appelée complexe cotangent relatif de B sur A. Pour des questions globales de déformations de structures diverses, il était très désirable d'avoir une variante globale de cette construction pour un espace (ou un topos) annelé sur un autre. Le rapporteur avait développé une telle

théorie globale pour le tronqué du degré 1 du complexe cotangent relatif. Une définition très simple dans le cas général du complexe cotangent tout entier a été proposée par Deligne, qui est actuellement exploitée par L. Illusie. Dans le même ordre d'idées, signalons le résultat suivant obtenu par Deligne à l'aide du complexe cotangent relatif local (par un argument de nature essentiellement classique) : si X est un espace analytique compact tel que l'espace analytique réduit associé X_{red} soit algébrique, X est algébrique. Ce même argument s'applique également dans le cas relatif au-dessus d'un espace analytique quelconque S, ou dans le cadre de la géométrie rigide-analytique, ou dans le cadre de la géométrie formelle.

10) <u>Solution d'une question soulevée par</u> F.M. <u>ATIYAH et</u> L. <u>GARDING sur la cohomologie de De Rham des variétés algébriques non compactes sur le corps</u> $\underline{C}$ <u>des complexes</u>. Si X est une telle variété, lisse sur $\underline{C}$, et si Y est un diviseur à croisements normaux dans X, alors Deligne prouve que la cohomologie de De Rham de X-Y peut se calculer comme l'hypercohomologie de X à valeurs dans le complexe des formes sur X qui sont régulières sur X-Y et qui ont des <u>pôles simples au plus</u> le long de Y, ainsi que leur différentielle extérieure. Dans le cas X-Y affine qui intéressait Atiyah et Garding, cela signifie qu'il suffit de prendre le complexe de De Rham ordinaire de X-Y, mais en se bornant aux formes différentielles algébriques sur X-Y qui ont, ainsi que leur différentielle, des pôles simples au plus le long de Y. En même temps, Deligne montre que la cohomologie complexe d'une partie algébrique (i.e. fermée au sens de Zariski) Y d'un X lisse (Y pas nécessairement à croisements normaux) peut se calculer comme la limite projective des cohomologies de De Rham des voisinages infinitésimaux de Y dans X (cohomologies

qu'on peut au choix interpréter du point de vue purement algébrique, ou du point de vue des faisceaux analytiques).

11) Théorie des types pour la cohomologie complexe des schémas algébriques sur le corps C des complexes, application à la "conjecture de Tate complexe analytique" et à la semi-simplicité des groupes de monodromie. Deligne arrive à définir sur la cohomologie complexe d'un schéma algébrique X sur C une structure remarquable, qu'il appelle "structure de Hodge mixte", généralisant la structure de Hodge bien connue dans le cas où X est projective (bigraduation plus réseau entier). Il y parvient en utilisant à fond la résolution des singularités, sa théorie de descente cohomologique (cf. 1)), et les idées qu'il a développées à propos de 10). Ces structures de Hodge mixtes apparaissent dès maintenant comme un outil extrêmement puissant, dont l'importance pour les schémas généraux sur le corps des complexes semble tout à fait comparable à celle de la théorie de Hodge ordinaire dans le cas des schémas projectifs lisses. Dans un certain sens, ces structures constituent l'équivalent, pour le corps C, de la structure sur la cohomologie ℓ-adique obtenue par action des groupes de Galois (et plus particulièrement, des "éléments de Frobenius" dans iceux), lorsque le corps de base est de type fini au sens absolu, structures qu'on n'arrive à exploiter le plus souvent que lorsqu'on admet certaines conjectures non démontrées à l'heure actuelle, telles les conjectures de Weil. A l'aide de sa théorie, certains arguments heuristiques utilisant les conjectures de Weil peuvent être utilisés en caractéristique zéro sans aucune conjecture. C'est ainsi que Deligne démontre la dégénérescence de diverses suites spectrales (conjecturées par le rapporteur), et arrive à établir de façon extraordinairement simple, en le débarrassant

d'hypothèses superflues fort gênantes, des résultats récents de P.A. Griffiths sur une variante analytique complexe des conjectures de Tate (suggérée par le rapporteur il y a quelques années). Si $f : X \longrightarrow S$ est un morphisme propre et lisse de schémas algébriques sur le corps $\underline{C}$, définissant donc une famille de variétés algébriques propres et lisses paramétrées par le schéma S, alors toute section du système local sur S des cohomologies des fibres, qui est de "filtration de Hodge" $\geq k$ en un point, est de filtration de Hodge $\geq k$ en tout point de S (supposé connexe). (Ceci, plus la conjecture de Hodge, impliquerait la variante analytique de la conjecture de Tate, savoir : si la section envisagée est "algébrique" en un point - i.e. provient d'un cycle algébrique sur la fibre - alors il en est de même en tout point de S. Comme on dispose de la conjecture de Hodge pour les classes de cohomologie de dimension 2, cela prouve donc la "conjecture de Tate analytique" pour cette dimension). En fait, Deligne prouve un résultat plus fort, savoir que le sous-système local de la cohomologie des fibres engendré par les sections globales (qu'on peut appeler la "partie fixe" dudit système local) est en tout point de S stable par la décomposition en types (p,q) de la fibre.

Utilisant ce dernier résultat, Deligne arrive à prouver également que l'action du groupe fondamental ordinaire de S sur la cohomologie d'une fibre de S est semi-simple. (Griffiths avait travaillé sur ce problème avec ses méthodes, purement analytiques et topologiques, sans arriver jusqu'à présent à le résoudre).

Dans tout ceci, il n'était question que de coefficients constants. Il est clair qu'il sera nécessaire tôt ou tard de développer la théorie pour des coefficients "quelconques" (une partie du travail consistant d'ailleurs à préciser ce qu'il faut entendre par là ...) Deligne a commencé à faire ce travail dans le cas d'une base qui est une variété kählérienne compacte, et d'un système de coefficients locaux, muni d'une "structure de Hodge polarisée", soumise à diverses conditions (notamment à une condition de transversalité à la Griffiths), inspirées par le cas du système local des cohomologies complexes d'une famille algébrique de variétés projectives complexes paramétrées par S. Il développe dans ce cadre une théorie de Hodge de comparaison des formes harmoniques avec la cohomologie usuelle de X à coefficients dans ce système local. Il arrive à obtenir à nouveau dans ce cadre certains des théorèmes dont il a été question précédemment, notamment ceux sur la partie fixe et et sur la semi-simplicité de l'action de monodromie.

Les résultats qui précèdent semblent au rapporteur d'une portée très grande, supérieurs encore en importance aux travaux cités dans 6) et 7). Il est clair d'ailleurs qu'il ne s'agit là que du démarrage d'une vaste théorie, qui jouerait le rôle d'une contrepartie "analytique" de la théorie conjecturale des "motifs" entrevue par le rapporteur, - avec le grand avantage sur cette dernière de n'être nullement conjecturale, et qu'on y dispose dès maintenant des premiers résultats saillants.

12) Résultats sur les modules stratifiés. Ce sont pour la plupart des résultats marginaux relativement aux travaux dans 11), car les "coefficients" généraux qu'il convient de prendre dans cette théorie devront comprendre notamment des modules stratifiés munis de structures supplémentaires. Parmi les résultats les plus saillants, signalons les suivants :

a) Si X est un schéma algébrique sur $\underline{C}$, alors le foncteur $M \mapsto M^{an}$ de la catégorie des modules cohérents stratifiés sur X (NB ils sont nécessairement localement libres) dans la catégorie des modules analytiques cohérents stratifiés sur X^{an} (qui se classifient par les représentations linéaires complexes du groupe fondamental de X^{an}), induit une équivalence lorsqu'on se borne aux M qui satisfont à une certaine condition de "croissance lente à l'infini" relativement à la stratification (condition qui a d'ailleurs un sens purement algébrique). Ce théorème implique une analyse locale de la situation "à l'infini", lorsque $X = \overline{X} - Y$, $\overline{X}$ étant lisse et Y un diviseur à croisements normaux sur $\overline{X}$, et utilise les théorèmes de triangulabilité semi-analytique de Łojaciewicz.

b) Si $f : X \longrightarrow S$ est un morphisme de schémas algébriques sur $\underline{C}$, alors à condition de remplacer au besoin S par un ouvert dense, la cohomologie de De Rham relative de X sur S est un Module stratifié sur S "à croissance lente à l'infini". Lorsque f est propre et lisse, il est inutile dans cet énoncé de rapetisser S.

c) Soit X un schéma plat et localement de type fini sur un schéma S localement noethérien, tel que X soit un sous-schéma fermé d'un S-schéma X', X' étant un voisinage infinitésimal de X. Alors le foncteur restriction de X' à X induit une équivalence de la catégorie des modules stratifiés sur X' relativement à S, avec la catégorie analogue sur X. Cet énoncé avait été proposé par le rapporteur à P. BERTHELOT (qui avait cherché à le prouver pendant quelque temps), et est bien utile malgré son apparence technique. Il devrait permettre par exemple de prouver que la "cohomologie stratifiante" de X relativement à S est isomorphe à la "cohomologie infinitésimale" (la première n'étant autre que la cohomologie du complexe de De Rham relatif de X sur S, lorsque X est lisse sur S et S de caractéristique nulle). Il est utile également pour faire la théorie de la descente propre pour les modules stratifiés (pour des schémas algébriques sur un corps de base, disons).

13) Théorie de Lefschetz-Picard des cycles évanescents en car. $p > 0$, et généralisation du théorème de Lefschetz-Noether. (Ces résultats, développés par Deligne il y a déjà un an ou deux, avaient été oubliés par le rapporteur dans son premier rapport sur les travaux de Deligne ; ils seront exposés dans le Séminaire de Géométrie Algébrique à l'IHES 1968/69.) Utilisant une technique de spécialisation de la caractéristique zéro à la caractéristique $p > 0$ (essentiellement connue), Deligne établit en car. $p > 0$, par voie transcendante, la formule fondamentale de Picard-Lefschetz pour l'action du groupe de monodromie locale sur la cohomologie d'une fibre singulière n'ayant qu'un seul point singulier, lequel est supposé quadratique ordinaire. Il arrive à expliciter aussi l'action du groupe de monodromie locale sur le groupe fondamental de la fibre générale du système fibré (le seul cas intéressant est alors celui des fibres de dimension 1). Utilisant la formule de Picard-Lefschetz, et sans doute moyennant pas mal de travail supplémentaire, Deligne adapte à la caractéristique p l'argument de Lefschetz qui établit que pour une surface projective non singulière "assez générale" de degré au moins égal à 4, le groupe de Picard est engendré par les sections hyperplanes (donc isomorphe à $\underline{Z}$). Il ne peut évidemment pas s'empêcher de démontrer des généralisations de ce résultat à des dimensions supérieures ...

Dans le même ordre d'idées, je signale que Deligne avait trouvé au début de 1968 une démonstration d'une conjecture de Milnor (prouvée aussi indépendamment par BRIESKORN et par LÊ DŨNG TRANG, par essentiellement la même méthode de "petites déformations"), déterminant le nombre de Betti en dimension critique pour la cohomologie locale d'une hypersurface dans $\underline{C}^n$

admettant l'origine comme point singulier isolé, en termes de l'idéal engendré par f et ses dérivées partielles dans l'anneau local de l'origine (f étant une équation locale de l'hypersurface) : on trouve le rang sur $\underline{C}$ de l'anneau artinien quotient par cet idéal. Plus récemment, Deligne est allé plus loin, en arrivant à formuler une variante plausible de cet énoncé en géométrie algébrique, qui devrait être valable en car. $p>0$ et même en inégales caractéristiques ; cette variante est assez subtile même dans le cas d'égales caractéristiques, car elle doit tenir compte des phénomènes de "ramification sauvage", et faire intervenir par suite des représentations d'Artin (ou plutôt de Swan), comme dans le cas des caractéristiques d'Euler-Poincaré à coefficients singuliers des courbes algébriques en caractéristique $p > 0$. Il arrive à prouver cette formule par voie globale dans le cas d'égales caractéristiques.

14) <u>Théorie des modules henséliens pour les singularités isolées des variétés algébriques</u>. Il s'agit d'un by-product du Séminaire Deligne-Grothendieck sur la théorie des cycles évanescents, mentionné dans 13). Le problème posé par Deligne est celui de raffiner la théorie de la variété formelle des modules de Schlessinger pour la déformation d'une singularité isolée, de façon à remplacer l'anneau local complet (tel un anneau quotient d'un anneau de séries formelles sur un corps de base) dont le spectre est censé représenter la variété des modules locale, par un anneau hensélien essentiellement de type fini sur la base, qui serait donc obtenu par localisation étale ordinaire d'un point d'une variété algébrique sur le corps de base. Deligne précise convenablement ce problème, de façon qu'une solution, si elle existe, soit nécessairement unique à isomorphisme près, et il

donne une solution affirmative à ce problème dans le cas d'une singularité du type particulier "intersection complète". L'outil principal utilisé par Deligne, et qui restera manifestement un outil clef pour traiter le cas général, est le "théorème d'approximation du formel par l'algébrique" prouvé par M. Artin il y a deux ans. Même le cas des singularités quadratiques ordinaires, qui jouera un rôle important dans le Séminaire, est d'ailleurs non trivial.

Dans le même ordre d'idées, signalons des conjectures intéressantes de P. Deligne sur la théorie des déformations des singalarités quelconques de courbes algébriques, qui sont énoncées à la fin de Exp. 7 du Séminaire cité. Un certain nombre de calculs de cas particuliers, faits ces derniers jours par D.S. RIM, corroborent ces conjectures. Comme le rapporteur n'a pas compris les motivations de ces conjectures, il ne se sent pas en mesure de faire à leur sujet d'autres commentaires.

15) Théorie des "vraies catégories triangulées". Depuis l'introduction des catégories dérivées des catégories abéliennes par VERDIER, et malgré les services très grands rendus par cette notion, on prévoyait que celle-ci n'était qu'une première approximation de structures plus complètes qui restaient à dégager en algèbre homologique. La question était devenue aiguë en 1968 pour la théorie des traces et des déterminants, après que FERRAND se fût aperçu que l'additivité des traces (où la multiplicativité des déterminants) pour des endomorphismes de triangles exacts (au sens de Verdier) de complexes parfaits, affirmée et "démontrée" par le rapporteur et divers élèves, était fausse. Pour qu'elle devienne vraie, il était clair qu'il serait nécessaire de travailler dans une catégorie plus fine que celle des triangles ordinaires de Verdier, ce qui conduisait automatiquement à remettre en chantier le formalisme des catégories dérivées. Dans une rédaction d'une soixan-

taine de pages manuscrites fort denses, Deligne pose les grandes lignes d'une telle extension, et d'une hyperstructure (la "vraie catégorie triangulée") correspondante à la notion de catégorie triangulée. Ce travail figurera probablement en appendice au livre de Verdier sur les catégories dérivées. Ces notes ne font d'ailleurs qu'esquisser une des directions possibles dans laquelle on peut songer à perfectionner le formalisme de Verdier pour l'adapter aux besoins croissants des utilisateurs, et il est prématuré de se prononcer sur le sort que l'avenir réservera à cette approche. Une autre approche, développée ultérieurement par ILLUSIE, mais qui ne précise pas la notion axiomatique qui devrait tenir lieu de celle de catégorie triangulée, aurait pour le moment les préférences du rapporteur. D'ailleurs, la catégorie des "vrais triangles" introduite par Illusie est équivalente à celle de Deligne, et restera sans doute ne varietur. Signalons que, fort heureusement, tous ces développements sur le thème inaugéré par Verdier utilisent de façon essentielle le formalisme développé par Verdier lui-même, et complètent celui-ci sans aucunement le remplacer.