H3.1.2.1/1968.17

Notice sur les travaux de Mr. P. Deligne,
par A. Grothendieck.

Les travaux qui suivent correspondent à environ deux années d'activité scientifique de Mr. Deligne à Bures (séparées par une année de service militaire, où cette activité a été quasi-interrompue). Le rapporteur ne mentionne que les résultats qui lui semblent les plus importants, et dont chacun pourrait constituer au moins le résultat central d'une excellente thèse en doctorat. L'ordre suivi est plus ou moins l'ordre chronologique.

1) Une suite spectrale de descente en théorie de cohomologie des faisceaux, relative à une application continue surjective $f: X \to Y$ (ou un morphisme surjectif de schémas, etc) satisfaisant à une hypothèse supplémentaire assez faible, vérifiée par exemple si f est propre: $H(X,F) \Longleftarrow E_2^{p,q} = H^p(s \mapsto H^q((X/Y)^{s+1},F)$. Cette suite spectrale généralise celle de Leray pour un recouvrement ouvert ou fermé de Y (en prenant pour X la somme disjointe des objets du recouvrement). Elle s'insère dans une technique de localisation due à Deligne, qui semble fort commode en algèbre homologique. Elle sert par exemple à ramener certaines propriétés cohomologiques de variétés algébriques ou analytiques quelconques au cas non singulier, en utilisant la résolution des singularités.

2) Divers résultats en théorie des topos (i.e. en topologie, concue dans le point de vue de la théorie des faisceaux). Le plus frappant affirme qu'un topos "localement de type fini" a "assez de points"; ce résultat s'applique à tous les topos (= espaces topologiques généralisés) qu'on a rencontrés jusqu'à présent en géométrie algébrique, et même à des topos qu'on rencontre en analyse p-adique. C'est ainsi que le résultat de Deligne

.../...

implique que la structure d'espace "rigide-analytique" au sens de Tate, sur un corps valué complet non archimédien (notion qui a fait l'objet de travaux extensifs de Grauert, Remmert, Kiehl dans ces dernières années) peut être réduite à la notion habituelle d'espace topologique localement annelé. Les nouveaux "points" des espaces rigides-analytiques, prédits par le théorème de Deligne, ont par la suite pu être déterminés explicitement par Kiehl. Ce résultat sur les espaces rigides-analytiques était entièrement inattendu.

Parmi d'autres résultats techniques intéressants, citons le fait que la notion de platitude d'un Module sur un topos annelé se conserve par images inverses.

3) <u>Nouvelle approche en théorie de dualité des faisceaux cohérents</u>, qui simplifie considérablement la structure de la théorie, telle qu'elle avait été développée dans le Séminaire Hartshorne en 1964 (cf. Springer, Lecture Notes N° 20) d'après des notes du rapporteur. L'idée nouvelle consiste en une définition très ingénieuse d'une "cohomologie à support propre" (pour un morphisme séparé de type fini $f: X \longrightarrow Y$ de schémas noethériens), qui permet alors de transcrire dans le contexte donné des constructions de Verdier en topologie ordinaire, notamment du foncteur $f^!$ comme "adjoint" du foncteur $Rf_!$ "cohomologie à support propre"; cf. lettre de Deligne reproduite à la fin du Séminaire Hartshorne.

Mr. Deligne a également des idées intéressantes sur la façon dont cette théorie peut être généralisée, pour englober aussi les complexes dont les différentielles sont des opérateurs différentiels. Le rapporteur lui a conseillé de laisser le développement de ces idées à de futurs élèves, le travail qui reste à faire étant long mais en partie de nature routinière, et pouvant être fait par des chercheurs n'ayant pas les moyens de Deligne.

.../...

4) <u>Trivialité cohomologique d'un morphisme projectif et lisse</u> $f: X \longrightarrow Y$ <u>de schémas</u> (correspondant intuitivement à une fibration sur Y à fibres de variétés projectives non singulières). En d'autres termes la suite spectrale de Leray pour la cohomologie ℓ-adique - ou à coefficients réels dans le cas du corps de base $\underline{C}$ - dégénère. Ce théorème est prouvé par Deligne modulo le "Théorème de Lefschetz" pour la cohomologie des fibres. Sa démonstration s'applique également dans le contexte des variétés analytiques, pour une fibration analytique complexe à fibres compactes kählériennes. Un cas très particulier de ce théorème, relatif au cas où le système local de la cohomologie des fibres était trivial, constituait le résultat principal de la thèse de Blanchard; mais l'hypothèse de Blanchard n'est réalisée dans presque aucun cas intéressant en géométrie. La démonstration de Deligne est différente bien entendu de celle de Blanchard, que Deligne ne connaissait pas.

Déjà du point de vue transcendant, l'intérêt du résultat de Deligne pour la topologie des variétés analytiques est évident. Dans l'optique du rédacteur cependant, ce sont ses implications en géométrie algébrique abstraite, et à longue échéance, à la théorie des nombres, qui sont les plus intéressantes. Ce sont d'ailleurs des considérations arithmétiques qui avaient amené le rapporteur à communiquer à Deligne l'énoncé précédent comme une conjecture. Grâce au théorème de Deligne, on peut voir par exemple que les hypothèses de Riemann-Weil en géométrie diophantienne, interprétées en termes des propriétés d'un endomorphisme de frobénius sur la cohomologie ℓ-adique, impliquent des propriétés analogues dans le cas de coefficients tordus (pouvant avoir des singularités quelconques, de plus). Le théorème de Deligne sera un des nombreux ingrédients techniques indispensables pour développer la "théorie des motifs", qui sera une sorte de synthèse géométrico-arithmétique des nombreuses théories cohomologiques dont on dispose à présent

.../...

pour les variétés algébriques, et des représentations linéaires de groupes de Galois arithmétiques auxquelles ces théories donnent naissance.

5) Solution du problème d'introduction d'une -structure (correspontant à la notion de puissance extérieure) dans l'anneau $K^{\circ}(X)$(dit "de Grothendieck") d'un espace topologique localement annelé (par exemple une variété analytique, ou différentiable, ou un schéma), construit à l'aide de la catégorie des complexes "parfaits" sur X. Ce problème était signalé comme le plus important problème resté en suspens dans le Séminaire de Géométrie algébrique de l'IHES 1966/67, sur le théorème de Riemann-Roch. La nécessité de travailler avec le $K^{\circ}(X)$ défini en termes de complexes parfaits, plutôt que de fibrés vectoriels seulement, est imposé par des impératifs techniques irrécusables, qui finiront certainement par s'imposer aussi en dehors de la géométrie algébrique. La solution de Deligne, comme prévu, passe par l'intermédiaire d'une construction de foncteurs puissances extérieures dans la catégorie dérivée D(X) (catégorie de complexes de modules sur X, - en fait, il faut se borner ici aux complexes de chaines), en utili~~s~~sant la théorie de Dold-Puppe. La difficulté sérieuse consistait à prouver que ces opérations dans $K^{\circ}(X)$ satisfont aux propriétés algébriques habituelles, permettant d'exprimer par exemple $\lambda^{i}(xy)$ comme polynôme universel à coefficients entiers en les $\lambda^{j}(x)$, $\lambda^{k}(y)$. Deligne procède par une voie très ingénieuse, en déterminant d'abord la structure du -anneau de toutes les "opérations tensorielles universelles" qu'on peut effectuer sur des fibrés vectoriels. Il n'a écrit sa théorie que lorsqu'on travaille au dessus d'un corps de base (de caractéristique arbitraire). Mais il est hors de doute pour le rapporteur qu'il n'y aura aucune difficulté essentielle pour étendre cette démonstration au cas général. Ici encore, la tâche de généralisation et d'une rédaction d'ensemble sera confiée sans doute à un futur élève de Deligne.

.../...

6) <u>Travaux sur la conjecture de Ramanuyan</u>. Il s'agit de la conjecture sur les coefficients $\tau(p)$ de la fonction de Ramanuyan, Δ

$$\tau(p) \leqslant 2\sqrt{p} \quad \text{, pour p premier.}$$

Des idées récentes (Sato, Ihara) amenaient à penser que cette inégalité devait être une conséquence de l'hypothèse de Weil-Riemann sur les variétés algébriques sur les corps finis. D'autre part, dans un ordre d'idées proche, Serre conjecturait que la fonction $p \mapsto \tau(p)$ pouvait s'interpréter (pour $p \neq$ nombre premier fixé ℓ) en termes des traces des éléments de Frobenius associés à une représentation ℓ-adique convenable, de degré 2, du groupe de Galois Gal $(\overline{\underline{Q}}/\underline{Q})$, ou plus précisément du quotient de ce groupe qu'on peut interpréter comme groupe fondamental de Spec $(\underline{Z}) - \{\ell\}$. Comme Serre a montré dans un exposé récent au Séminaire Pisot, on peut de sa conjecture déduire une quantité de conséquences fort intéressantes sur des propriétés de congruence et certaines propriétés asymptotiques de la fonction τ, expliquant et dépassant ainsi bon nombre de résultats épars obtenus par calcul.

Deligne donne une construction générale des représentations ℓ-adiques associées à des formes modulaires (pas seulement à Δ), et prouve par là à la fois la conjecture de Serre, et le fait que la conjecture de Ramanuyan est bien un cas particulier de celle de Riemann-Weil. Sa théorie (qu'il est en train de développer dans un séminaire à l'IHES) travaille systématiquement avec le "site modulaire" pour les courbes elliptiques (introduit par Mumford), et notamment avec la cohomologie ℓ-adique de celui-ci, qui fournit les représentations cherchées. D'ailleurs, sa construction via les sites modulaires donne une façon systématique de construire de nombreux "motifs" lisses au dessus de Spec($\underline{Z}$) tout entier, contrairement à une conjecture hâtive du rapporteur, qui pensait qu'il n'y avait d'autres motifs lisses sur Spec($\underline{Z}$) que les puissances tensorielles du motif dit "de Tate" (qui est

.../...

de nature triviale). Le point est qu'on ne connait aucun schéma lisse et propre sur tout Spec($\underline{Z}$) qui ne soit de nature triviale (telles les grassmaniennes et autres espaces homogènes rationnels, provenant de la théorie des groupes linéaires semi-simples), alors que les sites modulaires fournissent de nombreux exemples remarquables de""sites étales" (= schémas généralisés) lisses et propres sur Spec($\underline{Z}$), dont la cohomologie motivique fournit alors des motifs non triviaux lisses sur Spec($\underline{Z}$).

7) <u>Connexité des variétés modulaires pour les courbes algébriques de genre g</u>. La question est de connecter deux courbes algébriques (projectives, connexes, non singulières, sur un corps algébriquement clos) de même genre g par une famille algébrique, paramétrée par une variété algébrique connexe. Sur le corps des complexes, cette question était déjà familière aux géomètres italiens, et aucune démonstration algébrique de la connexité n'est connue jusqu'à présent. Une démonstration transcendante (la seule connue) résulte de la théorie de Teichmuller, qui implique que le revêtement universel des variétés modulaires "avec échelons" est même contractile. Le rapporteur avait suggéré il y a sept ou huit ans d'utiliser ce résultat transcendant, et le théorème de connexité en géométrie algébrique, pour prouver le même résultat en caractéristique quelconque par "spécialisation". Cela demandait cependant une définition géométrique et une étude soigneuse de la "compactification" des variétés modulaires, offrant des difficultés très sérieuses, qui avaient en particulier arrêté Mumford, qui s'intéresse à ce problème depuis longtemps. Ces difficultés viennent d'être surmontées par Deligne, toujours en s'inspirant de la technique des sites modulaires, donnant un langage plus souple que celui des variétés (ou schémas) modulaires. (Simultanément, une démonstration a été également trouvée par Mumford , utilisant les mêmes ingrédients techniques essentiels, par une méthode en apparence moins "sophistiquée", mais

.../...

qui à mon avis ne donne pas autant de "insight" que celle de Deligne). La démonstration de Deligne s'applique également aux diverses variétés modulaires "avec niveaux", correspondant aux structures supplémentaires de nature discrète (base d'homologie ou du groupe fondamental etc) qu'on peut imposer à une courbe algébrique pour éliminer ses automorphismes.

Ici, comme dans ses travaux sur la conjecture de Ramanuyan, le trait frappant est l'aisance et la conséquence avec laquelle Deligne arrive à appliquer aux "sites étales" les constructions familières en géométrie algébrique, telle le procédé de normalisation de Zariski, pour en tirer partie pour les problèmes qui l'intéressent. Après ces travaux, il ne fait plus de doute que les "sites étales" ont droit de cité en géométrie algébrique au même titre que les schémas et les "variétés" (à la Artin) qu'ils généralisent, et qu'on est là en présence d'un nouvel élargissement substantiel de la géométrie algébrique.